Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST

Pablo Rodolfo Roesch Martínez

Asesorado por el Ing. Iván René Morales Argueta

Guatemala, abril de 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

PABLO RODOLFO ROESCH MARTÍNEZ

ASESORADO POR EL ING. IVÁN RENÉ MORALES ARGUETA
AL CONFERÍRSE EL TÍTULO DE

INGENIERO ELÉCTRICO

GUATEMALA, ABRIL DE 2021

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANA	Inga. Aurelia Anabela Cordova Estrada
VOCAL I	Ing. José Francisco Gómez Rivera
VOCAL II	Ing. Mario Renato Escobedo Martinez
VOCAL III	Ing. José Milton De León Bran
VOCAL IV	Br. Christian Moisés De La Cruz Leal
VOCAL V	Br. Kevin Vladimir Armando Cruz Lorente
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Ing. José Guillermo Bedoya Barrios
EXAMINADOR	Ing. Carlos Fernando Rodas
EXAMINADOR	Ing. Julio Rolando Barrios Archila
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, con fecha 22 de MAYO de 2018.

Pablo Rodolfo Roesch Martínez

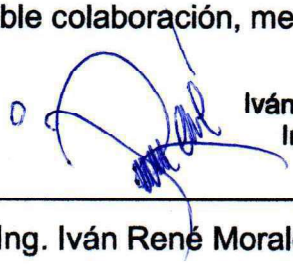
Guatemala, 20 de septiembre de 2020

Ing. Jose Anibal Silva de los Angeles
Coordinador Área de CC. Básicas y Electrotecnia
Escuela de Mecánica Eléctrica
Facultad de Ingeniería

Estimado Ing. Jose Anibal Silva de los Angeles,

Por este medio me dirijo a usted para comunicarle que he asesorado y revisado el trabajo de graduación titulado: "**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST**", desarrollado por el estudiante **Pablo Rodolfo Roesch Martínez**, quien se identifica con número de carnet **200511702** y CUI **2238 78375 0101**. Luego de comprobar su contenido final, considero que cumple con los requerimientos necesarios, y lo apruebo como trabajo de graduación.

Agradeciendo su amable colaboración, me suscribo atentamente,



Ing. Iván René Morales Argueta

Colegiado 12489

ESCUELA DE
INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

REF. EIME 05112020a
05 de Noviembre de 2020

Señor Director
Ing. Armando Alonso Rivera Carrillo
Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de San Carlos de Guatemala

Señor Director:

Me permito dar aprobación al trabajo de Graduación titulado: **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST**, del estudiante; Pablo Rodolfo Roesch Martınez con numero de carnet 2238783750101, que cumple con los requisitos establecidos para tal fin.

Sin otro particular, aprovecho la oportunidad para saludarle.

Atentamente,
ID Y ENSEÑAD A TODOS

JOSE ANIBAL SILVA DE LOS ANGELES
ING ELECTRONICO
COLEGIADO No 5067

Ing. José Anibal Silva de los Angeles
CC. Básicas Y Electrotecnia

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA

REF. EIME 63. 2021.

El Director de la Escuela de Ingeniería Mecánica Eléctrica, después de conocer el dictamen del Asesor, con el Visto Bueno del Coordinador de Área, al trabajo de Graduación del estudiante; PABLO RODOLFO ROESCH MARTINEZ titulado; ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST, procede a la autorización del mismo.

Ing. Armando Alonso Rivera Carrillo

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
DIRECCION ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA ELECTRICA
FACULTAD DE INGENIERIA

GUATEMALA, 12 DE ABRIL 2,021.

Decanato
Facultad de Ingeniería
24189101 - 24189102

DTG. 153-2021

La Decana de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería en Eléctrica, al Trabajo de Graduación titulado: **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS DE UNA MÁQUINA ELECTROSTÁTICA DE INFLUENCIA TIPO WIMSHURST,** presentado por el estudiante universitario: **Pablo Rodolfo Roesch Martínez,** y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE:

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
DECANA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Inga. Anabela Cordova Estrada
Decana

Guatemala, abril de 2021

AACE/asga

ACTO QUE DEDICO A:

Dios	Por permitirme existir y disfrutar de momentos como este.
Mi familia	Mi esposa María Hacohen, hijas Isabel y Mariana Roesch y al nuevo bebé, por ser mi motivación para ser la mejor versión de mí mismo.
Mi madre	Olga Martínez, por su amor, apoyo y fe incondicionales en todo momento de mi vida, será siempre mi inspiración.
Mis hermanos y primo	Iván, Rodrigo, Alexis, Diego Roesch y Wayne Parrott, por ser un ejemplo de humildad, valentía y perseverancia, a ustedes todo mi amor y admiración.
Mi tía	Cristina Martínez, por su cuidado, afecto y siempre creer en mí.
Mi abuela	Julia Luna, por cuidar de mí y educarme con mucho amor.
José Ramos	Por su amistad incondicional y nunca haber dudado de mí.

AGRADECIMIENTOS A:

Universidad de San Carlos de Guatemala	Por brindarme la oportunidad de aprender, crecer y formarme como profesional.
Departamentos de Física y Matemática	Por abrirme las puertas como auxiliar de cátedra y permitirme avanzar con mis estudios, así como crear amistades para toda la vida.
Familia Velarde Polanco	Nefi, Cefv y Rolando. Sin su ayuda y amistad no habría llegado hasta aquí.
Asesor	Iván Morales, por su ejemplo, paciencia, guía y amistad sincera, gracias por no perder la esperanza nunca.
Amigos y Amigas	Oscar Oliva, Alejandro García, Rodrigo De León, Carlos Pérez Noriega, Carlos Garzo, Mynor Ballina, Hernán Velásquez, Juan Bonilla, Edgar Villatoro, Joaquín Salazar, Ana Cabrera y Josué Marroquín, por mostrarme lo importante de no rendirse y por ser un ejemplo para seguir.
Dr. Antonio Carlos Moreirao de Queiroz	Por sus aportes en el campo de la electrostática, su amabilidad y disposición para ayudar en todo momento.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES V
LISTA DE SÍMBOLOS IX
GLOSARIO XI
RESUMEN XV
OBJETIVOS XVII
INTRODUCCIÓN XIX

1. DISEÑO Y ESTRUCTURA DE UNA MÁQUINA DE WIMSHURST 1
   1.1. Tipos de generadores electrostáticos 2
   1.2. Materiales de construcción 3
   1.3. La máquina de influencia 6
   1.4. Teorías de funcionamiento 11
      1.4.1. Teoría de la influencia 11
      1.4.2. Teoría del movimiento relativo 16
   1.5. Usos tradicionales 17

2. PLANTEAMIENTO DE UN CIRCUITO EQUIVALENTE 23
   2.1. Componentes principales y sus modelos 24
      2.1.1. Rotor (mecánico) 24
      2.1.2. Sectores y discos 27
      2.1.3. Varillas de neutralización 29
      2.1.4. Condensadores de Leyden 31
      2.1.5. Terminales de descarga 32
   2.2. Modelado de la capacitancia variable 33
      2.2.1. Análisis para 8 sectores 37

2.2.2. Análisis para doce sectores 39
2.2.3. Análisis para N sectores 39
2.2.4. Fórmula general 40
2.3. Transformación de la energía mecánica en eléctrica 40
2.3.1. Carga y descarga del sistema 41
2.3.2. El campo eléctrico en cada sector 43
2.3.3. La energía del capacitor 45
2.3.4. Incremento de la tensión en cada revolución 47
2.4. Diseño del circuito equivalente 53
2.4.1. Determinación de variables electromagnéticas 54
2.4.2. Velocidad angular mínima 55
2.4.3. Planteamiento del circuito equivalente 56
2.4.4. Reducción del circuito equivalente (Normalizado) . 57
2.4.5. Cálculo de las expresiones a simular 57
2.4.5.1. Impedancia 58
2.4.5.2. Corriente 58
2.4.5.3. Tensión 59
2.4.5.4. Potencia 60

3. IMPLEMENTACIÓN DE LA SIMULACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE 61
3.1. Método de Monte Carlo 61
3.2. Diseño de la simulación 65
3.2.1. Paso 1: creando el modelo paramétrico 66
3.2.2. Paso 2: generando variables aleatorias 71
3.2.3. Paso 3: evaluando cada instancia 73
3.2.4. Paso 4: iterando el proceso 73
3.2.5. Paso 5: análisis estadístico 75
3.3. Implementación en una hoja de cálculo 77
3.3.1. Funcionalidades y uso 77

3.3.1.1. Variables de entrada 78
3.3.1.2. Constantes y salidas 78
3.3.1.3. Otros..... 79
3.3.1.4. Iteraciones..... 80
3.3.1.5. Diagramas de dispersión..... 80
3.3.1.6. Coeficientes de correlación..... 81
3.3.1.7. Coeficientes de determinación..... 82
3.3.2. Código..... 82

4. ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS..... 83
4.1. Configuración de las variables de simulación..... 83
4.1.1. Ciclo para 8 sectores 84
4.1.2. Ciclo para doce sectores..... 84
4.1.3. Ciclo para cien sectores..... 85
4.1.4. Análisis de resultados 86
4.2. Curvas de operación para la impedancia..... 86
4.2.1. Curva para 8 sectores..... 87
4.2.2. Curva para doce sectores 88
4.2.3. Curva para cien sectores 89
4.2.4. Análisis de resultados 90
4.3. Curvas de operación para la tensión 90
4.3.1. Curva para 8 sectores..... 91
4.3.2. Curva para doce sectores 91
4.3.3. Curva para cien sectores 92
4.3.4. Análisis de resultados 93
4.4. Curvas de operación para la corriente..... 94
4.4.1. Curva para 8 sectores..... 94
4.4.2. Curva para doce sectores 95
4.4.3. Curva para cien sectores 96

4.4.4. Análisis de resultados 97
4.5. Curvas de operación para la potencia 98
4.5.1. Curva para 8 sectores 99
4.5.2. Curva para doce sectores 99
4.5.3. Curva para cien sectores 100
4.5.4. Análisis de resultados 101
4.6. Resultados estadísticos de sensibilidad 102
4.6.1. Coeficientes para 8 sectores 102
4.6.2. Coeficientes para doce sectores 104
4.6.3. Coeficientes para cien sectores 106
4.7. Otras variables interesantes 108
4.7.1. Corriente de desplazamiento 110
4.7.2. Impedancia con jarras de Leyden 111
4.7.3. Corriente con jarras de Leyden 112
4.7.4. Impedancia de acoplamiento paramétrico 113
4.7.5. Análisis de sensibilidad 114
4.7.6. Uso de herramientas más robustas 115

CONCLUSIONES 119
RECOMENDACIONES 121
BIBLIOGRAFÍA 123
APÉNDICES 129

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1. Carga electrostática 2
2. Diseño original de Wimshurst 8
3. Máquina Wimshurst de múltiples discos 9
4. Máquina Wimshurst sin sectores 10
5. Diagrama de una máquina Wimshurst 12
6. Teoría alternativa 17
7. Separador electrostático de Sutton 20
8. Sección lateral del separador electrostático de Sutton 20
9. Separador electrostático de Huff 21
10. Engranaje de baja a alta velocidad 25
11. Varillas de neutralización 30
12. Condensador de Leyden 32
13. Terminales de descarga 33
14. Discos rotando 34
15. Capacitor de placas planas paralelas 34
16. Sectores en movimiento 35
17. Área efectiva 36
18. Trapecio circular 37
19. Áreas circulares 37
20. Analogía del capacitor 41
21. Campo eléctrico 45
22. Variaciones del campo eléctrico 49
23. Efecto corona 49
24. Circuito equivalente 53

25. Chispa de descarga 54
26. Circuito sin pérdidas 56
27. Circuito simplificado 57
28. Modelo paramétrico determinista 62
29. Propagación estocástica de incertezas 64
30. Cálculo de variables aleatorias 71
31. Evaluación de cada instancia 73
32. Iteraciones 74
33. Ejemplo de un diagrama de dispersión 76
34. Hoja de cálculos 77
35. Sección de variables 78
36. Sección constantes y salidas 79
37. Sección de otros 79
38. Sección de iteraciones 80
39. Sección de diagramas 81
40. Sección de coeficientes de correlación 81
41. Sección de coeficientes de determinación 82
42. Configuración de las variables para $N = 8$ 84
43. Configuración de las variables para $N = 12$ 85
44. Configuración de las variables para $N = 100$ 86
45. Curva de impedancia para $N = 8$ 87
46. Curva de impedancia para $N = 12$ 88
47. Curva de impedancia para $N = 100$ 89
48. Curva de tensión para $N = 8$ 91
49. Curva de tensión para $N = 12$ 92
50. Curva de tensión para $N = 100$ 93
51. Curva de corriente para $N = 8$ 95
52. Curva de corriente para $N = 12$ 96
53. Curva de corriente para $N = 100$ 97
54. Descarga en circuito abierto 98

55. Curva de potencia para $N = 8$ 99
56. Curva de potencia para $N = 12$ 100
57. Curva de potencia para $N = 100$ 101
58. Coeficientes para $N = 8$ 103
59. Coeficientes para $N = 12$ 105
60. Coeficientes para $N = 100$ 107
61. Variables interesantes con $N = 8$ 110
62. Corriente de desplazamiento con $N = 8$ 111
63. Impedancia incluyendo jarras de Leyden con $N = 8$ 112
64. Corriente al incluir las jarras de Leyden con $N = 8$ 113
65. Impedancia de acoplamiento paramétrico con $N = 8$ 114
66. Variables interesantes y su sensibilidad con $N = 8$ 115
67. Representación de la tensión con $N = 25$ 116
68. Representación de la tensión con $N = 300$ 117

TABLAS

I. Relaciones entre fórmulas y cantidades 67
II. Relación de variables (Monte Carlo) 68
III. Valores experimentales 69
IV. Ecuaciones paramétricas 70
V. Relación de variables (Monte Carlo) extendida 108
VI. Valores experimentales extendidos 109

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
θ	Ángulo
A	Área
$\triangle$	Cambio
C	Capacitancia
Q	Carga eléctrica
cm	Centímetro
π	Constante numérica Pi
τ	Constante de tiempo
K	Constantes
I	Corriente eléctrica
σ	Densidad superficial de carga eléctrica
d	Distancia de separación
U	Energía potencial eléctrica
F	Faradios
Cos	Función coseno
Sin	Función seno
Z	Impedancia eléctrica
m	Metro
n	Número entero positivo
Ω	Ohm
ϵ	Permitividad eléctrica
P	Potencia eléctrica

Rad	Radian
r	Radio
R	Resistencia eléctrica
ρ	Resistividad eléctrica
Y	Salidas
s	Segundo
V	Tensión Eléctrica
t	Tiempo
T	Torque
W	Trabajo
X	Variables de entrada aleatorias
ω	Velocidad angular

GLOSARIO

Acoplamiento Se denomina así al fenómeno físico por el cual el paso de una corriente eléctrica variable en el tiempo produce un campo magnético o una tensión variable produce un campo eléctrico.

Alta tensión Se le denomina así a la diferencia de potencial eléctrico con un valor eficaz nominal usualmente mayor a 1 000 voltios.

Electrostático Se refiere a los efectos mutuos que se producen entre cuerpos debido a sus cargas eléctricas.

Electromagnético Se refiere a sistemas que operan al generar campos magnéticos mediante corrientes eléctricas.

Estocástico Este término se utiliza para denominar al sistema en el cual el comportamiento de sus magnitudes independientes es aleatorio y varían con el tiempo que evolucionan en función de otra u otras variables, argumentos o parámetros.

Hoja de cálculo Una hoja de cálculo es un programa informático que permite la manipulación de datos números dispuestos en tablas por medio de fórmulas para realizar operaciones complejas y obtener resultados.

Jarra de Leyden	También conocido como botella o condensador de Leyden, es una forma primitiva de capacitor que se utilizó para almacenar cargas eléctricas.
Microsoft Excel	Es un programa informático desarrollado y distribuido por la empresa estadounidense conocida como *Microsoft Corporation*. Este permite realizar tareas contables, financieras, cálculos, entre otros, gracias a sus funciones, desarrolladas específicamente para ayudar a crear y trabajar con hojas de cálculo.
Monte Carlo	El método de Monte Carlo es una técnica numérica para calcular probabilidades y otras cantidades relacionadas utilizando secuencias de números aleatorios.
Paramétrico	Diferente a un modelo convencional, el paramétrico basa su construcción en factores conocidos por nombre, a los cuales se les debe de asignar valor; es decir, que el primero tendrá una composición definitiva y fija mientras que el segundo tendrá elementos variables en función de la configuración de los factores que lo rijan.
Pinta	Es una medida espacial de volumen utilizada por la Mancomunidad Británica de Naciones, con el equivalente a 568,261 mililitros.
Sectores	Hace referencia a piezas finitas de un material metálico con una forma geométrica bien definida.

Simulación	Es una técnica numérica para conducir experimentos en una computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura del sistema o sistemas del mundo real sobre los cuales se están realizando inferencias.
Wimshurst	Es el apellido del inventor James Wimshurst, quien implementó la máquina generadora electrostática que lleva su nombre.

RESUMEN

Se muestra un análisis de los parámetros electromagnéticos principales que afectan la eficiencia y operación de una máquina electrostática de influencia tipo Wimshurst.

En el capítulo 1 se hace un resumen del diseño y estructura de una máquina electrostática, explicando desde los principios básicos que la rigen, hasta llegar específicamente a la máquina de Wimshurst y su operación.

En el capítulo 2 se analiza las componentes mecánicas y eléctricas de la máquina de Wimshurst, con el objetivo de plantear un circuito equivalente alternativo al de la literatura actual que permita calcular las expresiones eléctromagnéticas de los parámetros principales de operación. Hace especial énfasis en la potencia, porque esta permite observar las similutudes con las máquinas de inducción electromagnéticas.

El capítulo 3 se enfoca en la determinación, implementación de los algoritmos, pruebas computacionales (simulaciones) a las cuales se someterá el circuito equivalente del capítulo anterior, de tal forma que permita el cálculo para la representación gráfica de los parámetros electromagnéticos más importantes tales como las corrientes, las tensiones y las potencias del sistema.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos por medio de las simulaciones para ejemplificar el comportamiento de los parámetros eléctricos en función de cambios mecánicos y cambios estructurales, entre otras variables.

OBJETIVOS

General

Determinar la sensibilidad de las variables electromagnéticas de una máquina electrostática de influencia tipo Wimshurst.

Específicos

1. Modelar el régimen dinámico de la máquina para 8, 12 y n sectores.

2. Plantear el funcionamiento dinámico de la red eléctrica equivalente en función de sus parámetros normalizados.

3. Determinar las curvas de sensibilidad de las variables electromagnéticas a través de la simulación del funcionamiento de la máquina electrostática de influencia de tipo Wimshurst.

INTRODUCCIÓN

Se realiza un análisis teórico de las variables electromagnéticas de una máquina electrostática de influencia tipo Wimshurst para determinar su sensibilidad. La característica principal de este tipo de máquina es su gran simplicidad mecánica y que puede generar directamente altas tensiones en su salida. Para analizar su funcionamiento se ha diseñado un modelo de la parte mecánica embebida en el mismo circuito equivalente eléctrico, de esta forma se integra las partes estáticas y dinámicas de su operación para generar un marco de referencia consistente y robusto para su posterior simulación y estudio.

La investigación de este tipo de máquina está centrada en conocer su funcionamiento desde el punto de vista electrotécnico que, por lo general, se utilizan para demostraciones sencillas de los efectos de las cargas. Sin embargo, en los textos no se profundiza sobre su funcionamiento interno, el cual también tiene usos en la industria de la pintura, precipitación y separación de materiales. La finalidad de esta investigación es proveer un punto de partida como referencia sobre el funcionamiento de esta máquina que permita el diseño y construcción de forma eficiente de la misma con base en sus parámetros electromagnéticos.

1. DISEÑO Y ESTRUCTURA DE UNA MÁQUINA DE WIMSHURST

De todos los fenómenos eléctricos con aplicaciones industriales los electrostáticos no gozan usualmente de mucha atención lo que se verifica fácilmente al consultar cualquier texto de pregrado de uso común en las facultades de ingeniería. Dichas máquinas, si fuesen ideales, permitirían que los electrones sean separados de los átomos con un trabajo equivalente recuperable al permitir la recombinación de cargas (positivas y negativas). Hay mucho camino por recorrer (técnico) antes de llegar a una máquina ideal pero no hay fundamentos teóricos que impidan que se operen estos dispositivos con una eficiencia alta, similar a la de las máquinas electromagnéticas.

En la historia de las máquinas electrostáticas no faltan quienes indican que no son dignas de atención, porque son sensibles al clima, frágiles, con variaciones repentinas en su salida, que se necesita una fuente de energía externa para moverlas y que las máquinas de inducción electromagnética son más eficientes. Hay amplia bibliografía que muestra que estas aseveraciones son falsas.

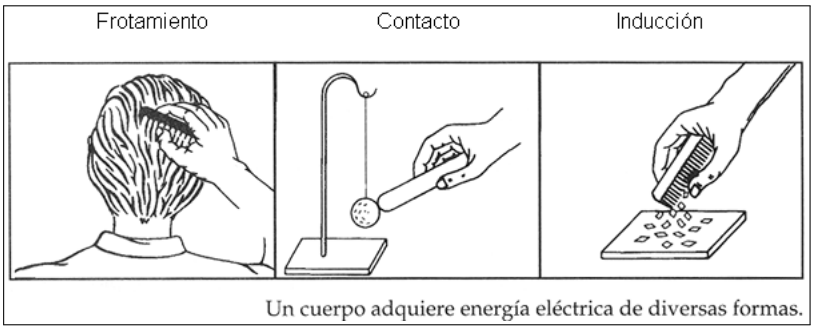
Además, aunque en muchas referencias se sugiera que la salida de potencia de estas máquinas son directamente proporcionales a la velocidad de rotación o a su área superficial, en este trabajo se confirmará que no es así al analizar las simulaciones del comportamiento de sus variables electromagnéticas que permiten conocer las variaciones de los parámetros de funcionamiento con base en rangos de las variables de entrada del sistema.

1.1. Tipos de generadores electrostáticos

Existen dos tipos principales de generadores electrostáticos. El primer tipo genera las diferencias de cargas mediante fricción o impacto, lo que significa que debe de existir contacto entre las superficies que poseen las cargas. Al proceso de carga por medio de fricción se le conocía originalmente como efecto triboeléctrico que viene del griego rozar o frotar.

En las aulas usualmente se muestran ejemplos frotando piezas de ebonita o plástico con un tejido de lana, o con un globo frotado con fieltro; y luego cualesquiera de los dos ejemplos se aproximan al cabello humano o piezas pequeñas de papel que son atraídas hacia los objetos en mención.

Figura 1. **Carga electrostática**



Fuente: PHYSICSCJ. *Transferencia de Carga*. https://physicscj.wordpress.com/2013/05/23/transferencia-de-carga-3/. Consulta: julio de 2018.

El segundo tipo de máquinas son llamadas generadoras de inducción electrostática. El término inducción se entiende como generar la electrificación sin hacer contacto, solamente al aproximarse un objeto al otro.

El generador de inducción fue conocido al inicio como máquina de influencia, luego el cambio de nombre ocurrió paulatinamente entre los años 1890 al 1920. El término influencia fue utilizado en el contexto de cambios inmateriales solamente visibles a través de sus efectos. El principio científico por medio del cual este efecto se produce es la ley de Coloumb que es, en resumen, la interacción entre cargas de igual y distinto signo por medio de sus campos eléctricos que atraviesan el espacio que les rodea, de esta forma generan efectos a distancia sin contacto físico.

1.2. Materiales de construcción

Los materiales utilizados normalmente en la contrucción de máquinas electrostáticas buscan asegurar que la carga no escape al ambiente. Es importante notar que en un sitio húmedo el reto de que las máquinas funcionen correctamente es alto, lo cual ha llevado a ingeniar distintos arreglos que contrarrestan los efectos de disipación de carga en la atmósfera. Los principales materiales empleados en estas máquinas han sido vidrio, ebonita, mica, mezclas de mica y otros elementos y papel tratado (con resinas y gomas). El caucho suele ser muy pesado y podría afectar el desempeño mecánico del sistema.

Las máquinas electrostáticas suelen ser relativamente simples desde el punto de vista mecánico, y es necesario que los materiales con los que están construidas sean livianos y de alta calidad desde el punto de vista eléctrico para asegurar la mayor eficiencia. A continuación se explicará un poco sobre cada material utilizado, empezando por el vidrio y terminando en las partes de metal. En esta última parte también se discutirá para qué piezas son utilizados los diferentes tipos de materiales.

El vidrio es una excelente substancia a pesar de su fragilidad. Es importante seleccionar vidrio que no contenga exceso de elementos alcalinos, porque en presencia de humedad esto hace que su superficie sea conductora y es precisamente lo contrario, ser aislante, lo que se busca de este material. Por esto se recomienda no utilizar vidrio común, porque afecta la eficiencia de la máquina. Tampoco se debe barnizar, porque usualmente los barnices se pueden volver conductores o se derriten en presencia de las chispas eléctricas. La gran limitante del vidrio es que, debido a su resistencia mecánica, no puede ser utilizado a grandes velocidades.

La ebonita tiene ventajas sobre el vidrio porque puede resistir altas velocidades de mejor forma; sin embargo, se deteriora más rápido con el tiempo y es susceptible a las condiciones atmosféricas, en especial a la luz fuerte o a cambios de temperatura que le deforman rápidamente.

También se debe de tomar en cuenta que las máquinas electrostáticas suelen generar ozono al operar; este gas también afecta a este material. A veces después de cierto tiempo de uso, la ebonita se cubre de una capa conductora la cual se puede limpiar, lo cual hace que sea práctico crear piezas de este material.

La mica es una substancia que permite crear discos de hasta 12 pulgadas de diámetro para máquinas eficientes. Posee una resistencia dieléctrica alta que no es afectada por el calor. Cuando son utilizadas a altas velocidades se corre el riesgo de que se rompa en dos. Sus mayores desventajas son que su superficie provee muchas fugas de carga y al funcionar a altas velocidades genera mucho ruido.

La micanita consiste en capas de mica que se mantienen juntas con capas de cemento aislante. Usualmente incluye papel o tela para incrementar la resistencia dieléctrica del material. Aunque su resistencia mecánica es mayor, así como la facilidad para construirla, su desempeño en menor al de la ebonita o la mica.

El papel comprimido permite operar las máquinas a muy altas velocidades, dado que usualmente es tratado con barnices y resinas, suele adquirir una resistencia similar a la de hojas de hierro. Su mayor desventaja es que debido a la no uniformidad de su composición, similar a la de la micanita, suele no tener una eficiencia muy alta. Su mayor ventaja, por otro lado, es que la humedad no tiende a depositarse en su superficie y, en comparación al vidrio, no necesita de agentes para el secado del mismo.

En las máquinas donde los potenciales se elevan a niveles mayores a los 100 000 voltios el tema de los aislantes se vuelve crítico. Debido a las limitantes de los materiales como la ebonita o la mica, las fugas de carga de sus superficies ya no pueden ser contenidas simplemente por agentes de secado o al cubrirlas de materiales aislantes simples, porque las altas tensiones son capaces de fracturar dichos materiales.

El material que se utilizará debe de ser como el aire; una vez termina la ruptura dieléctrica, recupera sus propiedades aislantes. Superficies debidamente pulidas y aire comprimido suelen ser las mejores opciones. También las superficies de soporte como mástiles o manijas se pueden construir de forma corrugada para disminuir los efectos de las altas tensiones.

La cera de parafina es usualmente un aislante temporal de alto coeficiente dieléctrico. De forma similar, la baquelita en forma de barniz es calentada hasta servir como un aislante, como protección contra la humedad y contra los solventes.

Siguiendo la línea de los aislantes, para tensiones no tan elevadas se suele utilizar compuestos de calcio o cloro para absorber la humedad. Tienen las desventajas de descomponerse en subcompuestos además de depositarse en los discos de las máquinas y entorpecer su operación; sin embargo, para tensiones más altas, aire previamente secado (dicho con otras palabras, con la humedad removida) se suele utilizar al colocar las máquinas dentro de recipientes adecuados que pueden contener este aire o incluso contener el aire a presiones mayores a las atmosféricas.

Para las partes conductoras de metal usualmente se ha utilizado cobre o latón que no pueden llevar ninguna laca porque se deterioran rápidamente con cada descarga del sistema. El aluminio es preferido por sus propiedades contra la oxidación y a su mayor conductividad en comparación al latón. Para otras piezas del equipo usualmente se utiliza madera endurecida, tratada con parafina o bakelita. En la época moderna también ya se utilizan piezas de plástico que son más livianas, más aislantes, de menor costo.

1.3. La máquina de influencia

El generador de influencia básico tiene sus orígenes con la teoría de electrificación sin contacto de 1753 de John Canton. Él visualizaba una atmósfera eléctrica, un medio que envuelve a los cuerpos eléctricos y que actúa a través del espacio.

Luego en 1787, Abraham Bennet describió un generador que duplicaba la salida, el cual a través de aplicar de forma continua el principio de influencia iba acumulando pequeñas cargas hasta llegar a magnitudes ya medibles. A los largo de los años 1800, nuevos diseños aparecieron, su número empezó a incrementarse a partir del año 1860.

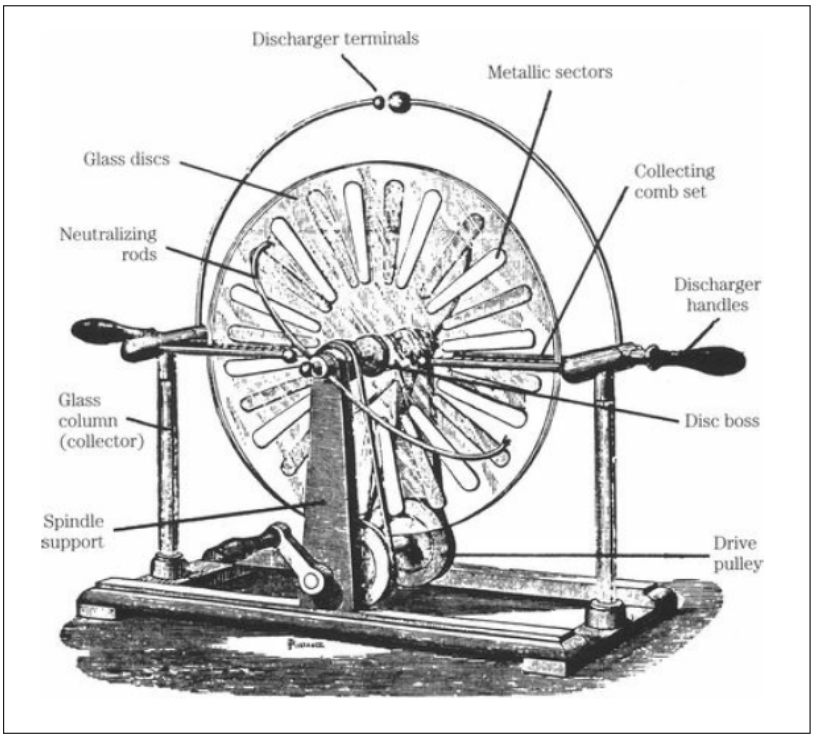
No es posible describir aquí todos los diseños; sin embargo, los más populares fueron la máquina de Varley (1860), la de Toepler (1865), Holtz (1865), Leyser (1873), Voss (1880). De estas, el generador de Holtz continuaría utilizandose por muchos años en el campo de la electroterapéutica porque era capaz de mejorar la eficiencia de una máquina de Wimshurst bajo buenas condiciones climáticas.

Pero estos diseños iniciales sufrían de dificultades para iniciar su funcionamiento bajo malas condiciones climáticas así como de reversiones de polaridad aleatorias que impactaban la salida de las máquinas. En 1878, James Wimshurst de Inglaterra dispuso remediar estos problemas y mejorar el diseño para la máquina de Holtz.

En 1883 el diseño básico de Wimshurst empezó a aparecer en las publicaciones científicas. El diseño original se puede apreciar en la figura 2: En la misma se observa que originalmente no había un medio para almacenar las cargas generadas. En 1882 se agregó un medio para almacenar las cargas utilizando dos jarras de Leyden que fueron el primer tipo de capacitor. Este método mejoró la eficiencia del sistema además de permitir generar una chispa más larga entre las terminales de descarga de la máquina.

El generador de Wimshurst demostró ser bastante confiable para funcionar en condiciones climáticas adversas como las de Inglaterra, debido al uso de sectores metálicos en los discos de la máquina. Bastaba con una vuelta a la manija para que las terminales mostrasen chispas. Además, este diseño resultó inmune a las reversiones de polaridad. Estas dos particularidades de la máquina le dieron su popularidad en Europa y permitieron la aparición de muchas variaciones del diseño que enriquecieron el repertorio de máquinas disponibles.

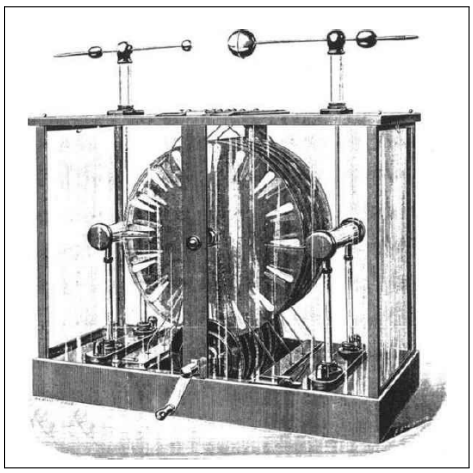
Figura 2. **Diseño original de Wimshurst**



Fuente: FORD, Richard. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. p. 23.

La máquina de Wimshurst más grande fue construida en 1888; tenía dos discos de vidrio de 7 pies de diámetro con 3/8 de pulgada de grosor, pesaba cada uno 280 libras. Cuando operaba esta máquina daba un torrente de chispas con flamas eléctricas de hasta 22 pulgadas de longitud. Por mucho tiempo estuvo resguardada en el Museo de Ciencia e Industria de Chicago en Illinois, USA. Otra variación de este diseño colocaba esta máquina en un recipiente sellado con agentes químicos para el secado del aire. Dicho aire seco mejoraba tanto la salida como el arranque de la máquina. Este diseño se convirtió en el estándar comercial utilizado por los practicantes de la electroterapia. El colector de carga se hizo más grande pero siempre constituido por una pieza de metal. Al utilizar múltiples discos de vidrio en un mismo eje la corriente se incrementó considerablemente, la tensión se mantuvo la misma, como una analogía a conectar baterías en paralelo. Esto se puede apreciar en la figura 3.

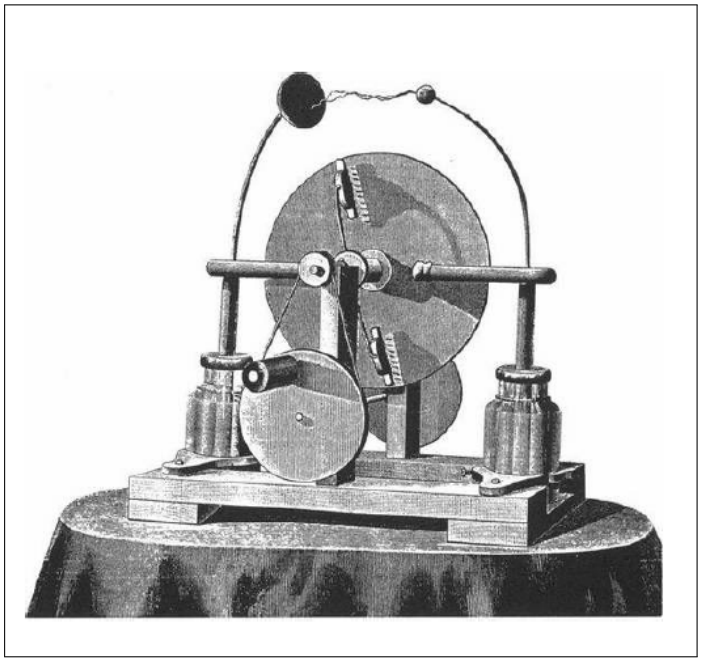
Figura 3. **Máquina Wimshurst de múltiples discos**



Fuente: FORD, Richard. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. p. 26.

Otra modificación fue realizada por Lemstroem entre 1899 y 1903. Utilizó cilindros concéntricos en lugar de discos para hacer la máquina más compacta con mayor salida de corriente. Al ser una máquina más compacta se podía almacenar en una recipiente de madera con agentes químicos para el secado del aire pudiendo operar por largos periodos sin interrupción, sin mantenimiento, siendo resiliente a los cambios del clima. Entre los tantos diseños interesantes que son modificaciones de la máquina de Wimshurst también es posible apreciar versiones que no poseen sectores metálicos como se aprecia en la figura 4.

Figura 4. **Máquina Wimshurst sin sectores**



Fuente: FORD, Richard. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. p. 31.

1.4. Teorías de funcionamiento

En esta sección se incluye dos teorías de cómo funciona la máquina de influencia. Es justo decir que existen tantas teorías como inventores de diseños originales. Desde la década de 1880 hasta la década de 1920 muchos debates intesos surgieron en las publicaciones sobre electricidad respecto a qué teoría era la mejor y esto sigue sin resolverse: no hay una sola teoría que explique las peculiaridades de todos estos aparatos. Esta investigación incluye, por lo mismo, solamente las dos teorías más populares aplicadas exclusivamente a la máquina de Wimshurst.

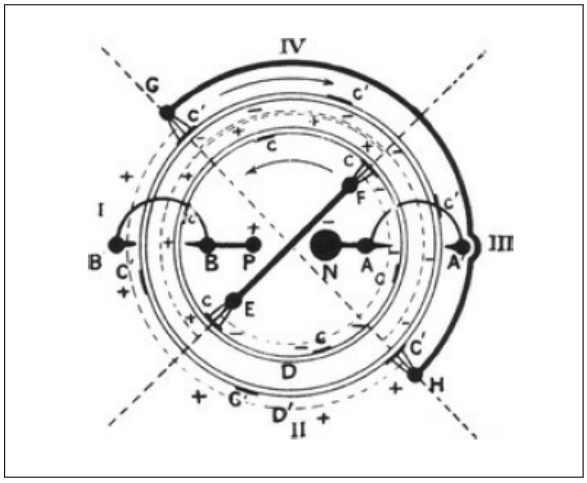
1.4.1. Teoría de la influencia

La primera teoría explica el funcionamiento de la máquina de Wimshurst como el efecto de la influencia eléctrica de uno de los discos con sus sectores en el otro disco y sus respectivos sectores. Aquí se considera al campo eléctrico como una banda elástica, estirándose o relajándose entre los dos discos o las varillas neutralizadoras. Actualmente se piensa que esta máquina de influencia es equivalente a un capacitor que varía continuamente donde los sectores en los discos forman las placas de un condensador o capacitor. Aquí se mantiene la condición $V = \frac{Q}{C}$, donde V es la tensión, Q es la carga, C es la capacitancia.

Los colectores y las jarras de Leyden se pueden considerar accesorios que no son indispensables para inciar la acumulación de carga. Wimshurst diseñó sin duda una máquina simple, con dos discos con dos neutralizadores que funcionan muy bien.

Los sectores de metal en los discos no son necesarios, el generador es más eficiente sin ellos; solamente ayudan en el arranque de la máquina. Máquinas sin sectores pueden ser vistas como dos placas con un número infinito de pequeños sectores que corresponden a las partículas que conforman los discos donde se minimizan las fugas de carga. Máquinas con discos que rotan en sentido contrario fueron descritas en 1883, difiriendo no solo en su método de construcción sino también en su comportamiento respecto a las máquinas anteriores que tienen la capacidad de autoarranque o salidas muy altas, incluso en malas condiciones atmosféricas. El sentido de la corriente no cambia mientras la máquina opera ni tampoco se va a perder la electrificación del dispositivo aunque las terminales se separen más allá de la distancia necesaria para producir descargas. El funcionamiento de la máquina de Wimshurst puede explicarse con el diagrama de la figura 5.

Figura 5. **Diagrama de una máquina Wimshurst**



Fuente: FORD, Richard. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. p. 138.

En el diagrama los discos que rotan en sentido contrario se representan mediante el método de Bertin como secciones de los cilindros D, D'. El círculo interior D representa el disco frontal, el círculo exterior D' el disco posterior donde cada uno rota en el sentido mostrado por las flechas. En cada disco hay una serie de conductores metálicos denotados como C, C'. La barra neutralizadora EF está fijada en el disco D para conectar conductores diametralmente opuestos conforme pasan y tocan las escobillas en los extremos de la barra. De forma similar la barra neutralizadora GH está montada en la cara del disco D', mientras sus escobillas se encuentran en un diámetro perpendicular al EF. Los electrodos BP, AN tienen terminales de descarga P, N en un extremo y colectores BB', AA' en el otro. Los colectores BB' se encuentran uno frente al otro enfrente de cada uno de los discos estando conectados metálicamente por una varilla curva que pasa sobre el borde de los discos. La misma configuración se utiliza para los colectores AA'.

Esta máquina, como todas las que poseen partes activas metálicas posee la capacidad de autoarranque; es decir, que no requiere que se traslade carga eléctrica de un medio externo para iniciar a funcionar. La operación de esta máquina no depende de la presencia de los colectores, ya que las cargas de las superficies no dependen de los mismos, por lo que para un análisis básico pueden obviarse los colectores y electrodos sin problema. Aunque no es realmente conocido cómo se genera la carga inicial para el arranque de la máquina, se asumirá que una mitad $GB'H$ del disco D' posee una pequeña carga positiva y que la otra mitad $IIA'G$ posee una pequeña carga negativa. Bajo la influencia de la carga positiva en D' cada conductor C sobre D recibe una carga negativa cuando entra en contacto con la escobilla E que va a ser transportada alrededor por el movimiento del disco hasta que cada conductor en la mitad EAF del disco posea una carga negativa.

De la misma forma, la influencia de la carga negativa en D' impartirá una carga positiva a cada conductor C cuando tenga contacto con la escobilla F, por lo que la mitad FBE del disco D se llenará de carga positiva. Las dos mitades en las que el disco está dividido por sus varillas neutralizadoras actuan entonces como placas de campo para inducir cargas en las dos mitades en las que el disco D está dividido por sus varillas neutralizadoras.

Las dos mitades de D actúan ahora como placas de campo e inducen cargas en los conductores C' del disco D'. Los discos estarán continuamente reaccionado uno respecto al otro en la forma descrita e incrementan la carga uno en el otro hasta el límite donde la fuga de carga se presente. La distribución final de carga se muestra como líneas punteadas con símbolos $+$ y $-$ en el diagrama.

Si consideramos que los discos están divididos en cuatro cuadrantes (I, II, III, IV) debido a las varillas neutralizadares se encontrará que las cargas en los dos discos en los cuadrantes II, IV son opuestos por lo tanto se atraen el uno al otro pero en los cuadrantes I, III son iguales, por lo que se repelen. Los colectores están colocados de forma opuesta al centro de los cuadrantes I, III para extraer las cargas que se autorrepelen. Esto, como se muestra en el diagrama, imparte una carga positiva a la terminal de descarga P y una negativa a la terminal de descarga N. Si estas terminales no están muy separadas, van a saltar chispas entre ellas.

Como la operación de la máquina ocurre sin depender de los colectores no es necesario que estos estén en contacto para que la máquina pueda arrancar. Es por esta misma razón que es imposible revertir la acción de la máquina al separar las terminales de descarga fuera de la distancia de ruptura dieléctrica.

Generalmente, hay un número de propiedades de este generador que una teoría adecuada debería de ser capaz de describir para explicar las siguientes características:

- La fuente de la carga inicial en las máquinas con sectores (se ha mencionado los rayos cósmicos y el potencial de contacto como posibles causas)
- El límite superior de tensión aparte del efecto corona
- La importancia de la micro-estructura de los discos y por qué se descompone con el tiempo
- El rol del medio que rodea a la máquina (sea líquido o gaseoso), ¿Por qué el hidrógeno puro y comprimido es efectivo a pesar de su bajo potencial dieléctrico?
- ¿Por qué el potencial de la máquina desaparece cuando las terminales de descarga se separan más allá de la distancia de ruptura dieléctrica?
- La naturaleza de la electrificación (sea por fricción, impacto, contacto o inducción).

1.4.2. Teoría del movimiento relativo

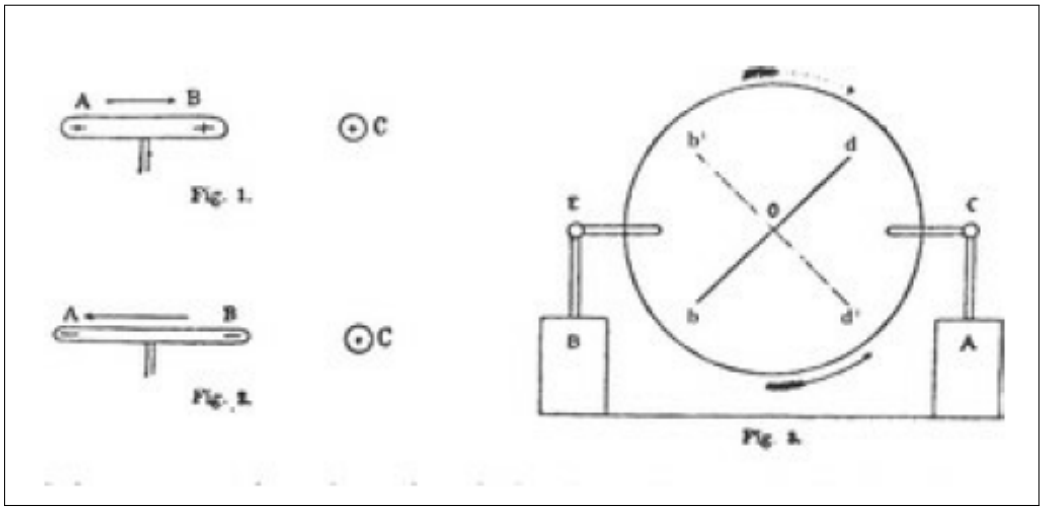
La segunda teoría evita depender de la inducción o influencia. Su novedad radica en explicar el funcionamiento con base en el movimiento relativo de las cargas acumuladas en el aparato. Si un cuerpo aislado AB se mueve rápidamente hacia un cuerpo cargado C, el mismo obtendría una carga similar como se muestra en la figura 6.

Este fenómeno no puede ser explicado por medio de la inducción, ya que las cargas en A y en B son similares. Si el movimiento ocurre en la dirección contraria de tal forma que los conductores se separan, el signo de la carga de AB se revierte. Estos resultados experimentales sugieren otra explicación para la máquina de Wimshurst.

Supongamos entonces que solo uno de los discos se mueve y que hay un poco de carga positiva en C. Los elementos del sector bOC se acercan a C, por lo que se carga positivamente, y de esta forma la carga en C se incrementa. En el sector COd el inverso ocurre aunque el cambio numérico es menor, debido a que la superficie es menor. Los elementos del sector dOE obtienen carga negativa, ya que se alejan de C; por lo mismo, E se carga negativamente.

Una pequeña carga, sea en C o en E, determina la polaridad de la máquina. Cuando ambos discos rotan el segundo actúa en el primero, el sector $b'OC$ positivamente cargado incrementa la carga en C, luego el sector cargado de forma negativa incrementa la carga en E. La acción más importante es la de un disco en el otro. En el ángulo dOd' los elementos cargados positivamente se acercan los unos a los otros, por lo que se cargan cada vez más. Esta acción es mayor conforme la distancia entre los discos es la menor posible.

Figura 6. **Teoría alternativa**



Fuente: FORD, Richard. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. p. 142.

1.5. Usos tradicionales

Mucho antes de la invención de la máquina de influencia, ya se utilizaban otros dispositivos que generan cargas electrostáticas con fines prácticos, como médicos o eletro-terapéuticos.

Las características necesarias para que una máquina electrostática pueda servir a fines prácticos se encuentran en poder generar corrientes a altas frecuencias, capacidad de almacenar energía por periodos considerables, ser estables en su modo de operación, ser fácilmente adaptables o ajustables y, sobre todo ser capaces de generar altas tensiones en una sola máquina; en otras palabras, que no se necesite muchas máquinas en serie o paralelo para generar el efecto.

Considerando los usos electro-terapéuticos (médicos) para una máquina electrostática es posible hablar de las prácticas descontinuadas de aplicar descargas eléctricas al cuerpo humano o la de la generación de rayos X. Enfocados en las máquinas de rayos X, las máquinas actuales que funcionan con electromagnetos y fuentes radioactivas son muy eficientes y a la vez muy caras, por lo que es posible que el estudio de las máquinas electroestáticas permitan en un futuro substituir componentes de las mismas, de esta forma contribuyendo a reducir los costos considerablemente.

Otro uso que se ha explorado es el de la electrocultura que se refiere a la práctica de utilizar campos eléctricos para alterar de manera beneficiosa el desarrollo de las plantas e incluso animales, para mejorar la agroindustria. Esto, aunque es algo antiguo que ha explorado de forma interrumpida desde los años 1800 y con dudas de si realmente la inversión genera una diferencia rentable, se puede analizar con base en los experimentos como el del profesor Lemstroem, sueco. Durante sus viajes al Ártico se sorprendió de lo rápido que las plantas crecían durante el verano que atribuyó a las fuerzas de corrientes eléctricas en la atmósfera que afectan dichas regiones. En 1886 cultivó algunas plantas bajo los efectos de un intenso campo electrostático con resultados en el incremento de producción en comparación a plantas control que no estaban afectadas por dicho campo eléctrico.

Otros experimentos similares como el de J. E. Newman en Golden Valley Nurseries (Bristol, Reino Unido) donde utilizó una máquina de Wimshurst para aplicar campos eléctricos a plantas durante 108 días, 9,3 horas al día divididos entre noche y día, obtuvo porcentajes de crecimiento acelerado de hasta 80 % en fresas, 2 % en coles y ninguna diferencia con los tomates.

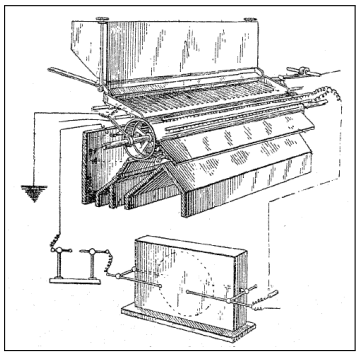
Como estos existen muchos otros experimentos que si bien han demostrado resultados positivos, no han sido consistentes no habiéndose logrado establecer si existen rangos operacionales que permitan estandarizar y utilizar en la industria de forma beneficiosa. Como dato curioso, un profesor de apellido Wentworth aplicó estas técnicas a ovejas en Los Gatos (California, USA) y duplicó la cantidad de lana producida por los animales. En China una técnica similar se ha estudiado para mejorar la calidad de vinos jóvenes.

Antes de la venida de las tecnologías de telecomunicaciones actuales, las máquinas de influencia se utilizaban para telegrafía inalámbrica. Actualmente aún se utilizan máquinas electrostáticas, si bien no en la misma configuración que las de este trabajo de investigación, para la separación de partículas basadas en sus diferentes propiedades dieléctricas. Un ejemplo es el separador de Sutton, que se puede apreciar en las figuras 7 y 8. Esta máquina es utilizada para separar minerales conductores de los no conductores, como por ejemplo:

- Cuarzo
- Pirita
- Grafito
- Granito
- Silicatos, entre otros.

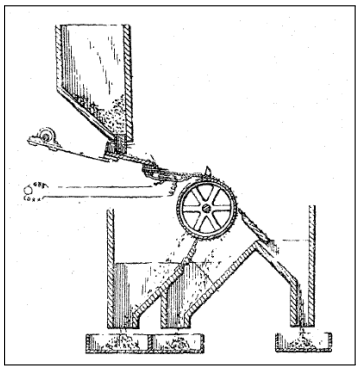
Otros usos dentro de la misma área es en la metalurgia para separar metales, donde el separador de Huff fue utilizado, como se aprecia en la figura 9. Las máquinas electrostáticas también se utilizan para limpiar el aire y generar precipitación electrostática de humo, neblina o polvo. De forma similar se utilizan para generar ozono, para la ignición de gases y otros productos inflamable.

Figura 7. **Separador electrostático de Sutton**



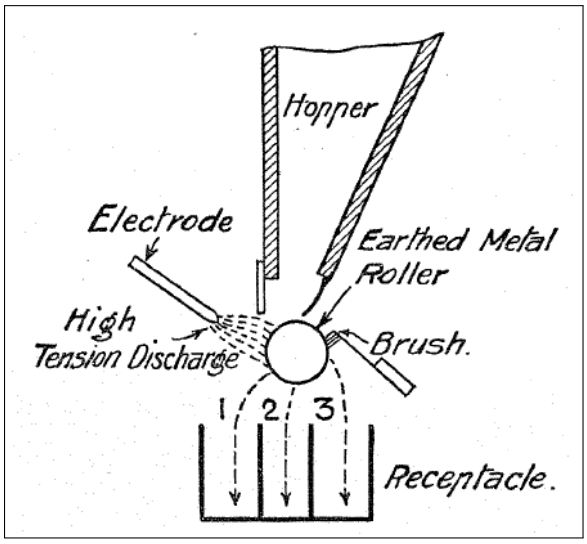
Fuente: JOHNSON, Valen. *Modern High-Speed Influence Machines*. p. 255.

Figura 8. **Sección lateral del separador electrostático de Sutton**



Fuente: JOHNSON, Valen. *Modern High-Speed Influence Machines*. p. 256.

Figura 9. **Separador electrostático de Huff**



Fuente: JOHNSON, Valen. *Modern High-Speed Influence Machines*. p. 259.

2. PLANTEAMIENTO DE UN CIRCUITO EQUIVALENTE

En el capítulo 1 se habló sobre las dos teorías más populares para describir el funcionamiento de una máquina de Wimshurst. De ahora en adelante se tomará como punto de partida la primera teoría donde la máquina de Wimshurst es considerada un capacitor variable dónde se desarrollará una nueva propuesta basada en el principio de la conversión paramétrica de potencia.

Al iniciar su operación, la capacitancia empieza a variar lo que a su vez hace que la tensión se incremente hasta que se genera una descarga eléctrica en las terminales de salida. Esto se repite indefinidas veces. Se puede decir que la potencia de salida de estos generadores depende de la fuerza dieléctrica del medio que las envuelve, su velocidad de rotación y su área superficial.

Es también importante notar que a pesar de las altas tensiones que la máquina de Wimshurst puede entregar, en comparación a sus pares electromagnéticos es un dispositivo de baja potencia.

La razón más importante para esto es que las máquinas electromagnéticas hacen uso de materiales de alta permeabilidad como el hierro cuando la máquina de Wimshurst no hace uso de materiales de alta permitividad. Esto último se debe a que los materiales de alta permitividad eléctrica aún no han sido desarrollados. Actualmente no hay gases o líquidos polares que tengan un índice de permitividad muy alto.

El aporte de este capítulo es capturar en formas funcionales los parámetros de funcionamiento de la máquina. Esto permite su posterior análisis. Se utiliza métodos modernos de electrotecnia que permiten reducir a un circuito equivalente un dispositivo que normalmente no se estudia en los libros de texto de la carrera de ingeniería eléctrica.

2.1. Componentes principales y sus modelos

Los capacitores variables que funcionan como generadores poseen tres elementos clave por analizar: (a) la captura de la energía mecánica, (b) la conversión paramétrica de la energía mecánica en energía eléctrica mediante el movimiento de los componentes físicos de los discos y (c) el procesamiento y almacenaje de la energía eléctrica generada. De todas las posibles combinaciones de arreglos de capacitores variables, aquellos que involucran áreas que varían con el tiempo son las que mejor desempeño proveen en este contexto. Para este trabajo se asume que la variación de la capacitancia ocurre de un valor máximo a un valor mínimo o lo más próximo a ello. Luego de generar modelos funcionales se utilizarán los datos que permitan crear una curva de ajuste que describa la operación de los distintos parámetros eléctricos del sistema. Se introducirá ruido en el análisis para que se pueda tomar en cuenta las fugas u otros efectos parásitos dentro de la operación normal de una máquina de Wimshurst.

2.1.1. Rotor (mecánico)

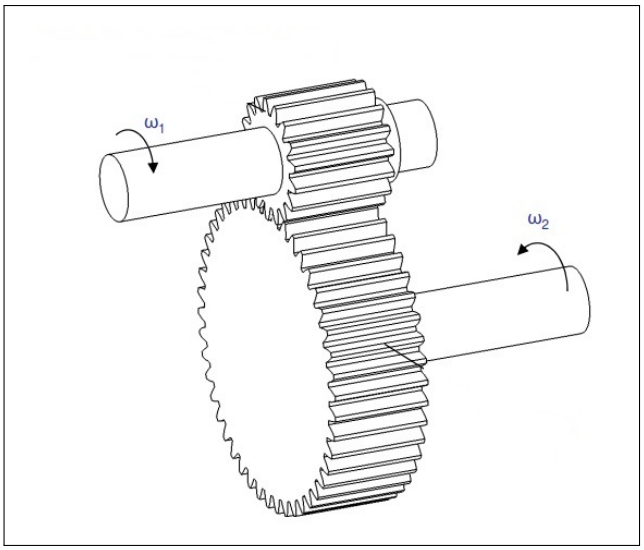
Este trabajo de investigación no busca analizar la eficiencia mecánica de una máquina de Wimshurst, por lo que es importante tener en cuenta que la energía eléctrica que dicho generador produce viene de la energía mecánica

que se utiliza para hacerle rotar que se traduce en términos eléctricos como variaciones en la capacitancia o el campo eléctrico que actúa entre los discos. El primer factor a tomar en cuenta es la inercia de la máquina donde al considerar todos los elementos que permiten convertir la energía mecánica (como engranajes, levas, varillas, entre otros) y los componentes de la máquina de Wimshurst (discos, perillas, entre otros), y aplicar la segunda ley de Newton al eje que conecta la turbina de entrada a la máquina de Wimshurst se puede escribir (ver figura 10):

$$T_T - T_L = I_T \frac{d\omega_T}{dt} \quad (2.1.)$$

$$T_H - T_C = I_C \frac{d\omega_C}{dt} \quad (2.2.)$$

Figura 10. **Engranaje de baja a alta velocidad**



Fuente: ESPAZOABALAR. *Engranajes*.
https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoobalar/files/datos/1464947673/contido/43engranajes.html.
Consulta: febrero de 2019.

Donde T_T es el torque de la turbina, T_L es el torque transmitido por la sección de baja velocidad, T_H es de alta velocidad, T_C es el torque que opone la máquina de Wimshurst. I_T, ω_T son el momento de inercia y la velocidad angular de la turbina respectivamente, I_C, ω_C los de la máquina de Wimshurst. Se asume que los engranajes son ideales sin pérdidas o deslizamientos, asumiendo que los ejes son rígidos, entonces la relación de los engranajes $\frac{n_1}{n_2}$ permiten establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{T_L}{T_H} = \frac{\omega_C}{\omega_T} \tag{2.3.}$$

$$\frac{T_L}{T_H} = \frac{n_1}{n_2} \tag{2.4.}$$

Aquí el torque neto viene dado por:

$$T_{Neto} = T_T\frac{n_2}{n_1} - T_C \tag{2.5.}$$

$$T_{Neto} = I_{Neto}\frac{d\omega_C}{dt} \tag{2.6.}$$

La inercia neta es $I_{Neto} = I_T{\frac{n_2}{n_1}}^2 + I_C$. Esto indica que el torque neto depende del momento de inercia de la turbina y de la máquina de Wimshurst, la aceleración angular, la relación de los engranajes. Como el momento de inercia neto es positivo, la aceleración angular $\frac{d\omega_C}{dt}$ debe de ser también positiva para que los discos roten por lo que se puede expresar como:

$$T_T\frac{n_2}{n_1} - T_C > 0 \tag{2.7.}$$

De lo anteriormente expuesto se deduce que para que la máquina de Wimshurst pueda rotar es necesario que el torque T_T sea mayor a $\frac{n_1}{n_2}T_C$. Para fines prácticos se trabajará con la energía rotacional entregada a la máquina de Wimshurst directamente. No se incluirá en el análisis la conversión de la energía mecánica entre engranajes.

Es importante notar que el hecho de que la máquina de Wimshurst es liviana en comparación a sus contrapartes electromagnéticas le da la ventaja de que es más eficiente para transformar la energía mecánica en eléctrica, lo que se evidencia en los muchos experimentos donde se observa que con unas pocas vueltas de los discos se genera una descarga eléctrica de alta tensión.

2.1.2. Sectores y discos

La máquina está compuesta de un rotor y un estator. Si la máquina posee dos discos se dice que posee dos polos, si posee más se dice que tiene N polos, donde N es la cantidad de discos que rotan en la máquina. La variación de la capacitancia puede producirse al variar el área superficial A, la distancia entre discos d o el material aislante entre los discos ε, o cualesquiera de las posibles combinaciones de las situaciones descritas.

Para este trabajo se analizará únicamente la máquina de dos polos porque es la más simple de todas; en teoría cualquier otra configuración de N polos debiese poderse construir con base en la de dos polos. Los discos y sectores funcionan como capacitores de placas planas paralelas la capacitancia en función del tiempo está dada por:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{2.8.}$$

En la configuración de la máquina de Wimshurst la distancia entre los discos se mantiene constante, el material entre los discos es homogéneo y los sectores metálicos en un discos varían su posición con respecto a los del otro según la rotación de los mismos, la expresión que representa la capacitancia entre ambos

discos se puede escribir como:

$$C = \varepsilon \frac{A_{efectiva}}{d} \tag{2.9.}$$

Donde $A_{efectiva}$ es dada por la proyección de los sectores de un disco sobre el otro. La capacitancia de este arreglo es, entonces, una función del ángulo de rotación θ y la mayor capacitancia es cuando el valor del ángulo es cero.

En general cuando el espaciamiento entre sectores, sus tamaños son regulares y hay N sectores en cada disco, el número de capacitores es también de N por lo que la capacitancia total del arreglo en un momento t de la máquina de dos polos es:

$$C = (N)\varepsilon \frac{A_{efectiva}(t)}{d} \tag{2.10.}$$

Aunque los efectos parásitos se ignoran por simplificación en este trabajo, es importante tomar en consideración que en una máquina real (no teórica) los sectores no son perfectos debido al material con el que se construyen y a sus bordes, lo que provoca que el campo eléctrico sufra deformaciones que generan capacitancias parásitas en paralelo al capacitor variable y que, por consiguiente, causan un pequeño incremento en la capacitancia total del sistema en distintas posiciones angulares.

Con el advenimiento de la Teoría de la relatividad de Einstein, se ha mostrado que la inducción unipolar es un efecto relativista.

Dado que no hay una teoría electrodinámica que opere en marcos de referencia que rotan, es importante determinar si las ecuaciones de Maxwell funcionan para describir su funcionamiento.

Las máquinas electrostáticas como la de Wimshurst pueden ser analizadas con las aproximaciones electroquasiestáticas de las ecuaciones de Maxwell, lo que nos dice que las máquinas que rotan a una velocidad angular uniforme pueden ser analizadas con las ecuaciones para movimiento lineal uniforme en comparación a máquinas donde se deba de definir algún marco inercial de referencia.

$$\nabla \times E = 0 \tag{2.11.}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + j \tag{2.12.}$$

$$\nabla \cdot D = const \tag{2.13.}$$

$$D = \varepsilon_0 E \tag{2.14.}$$

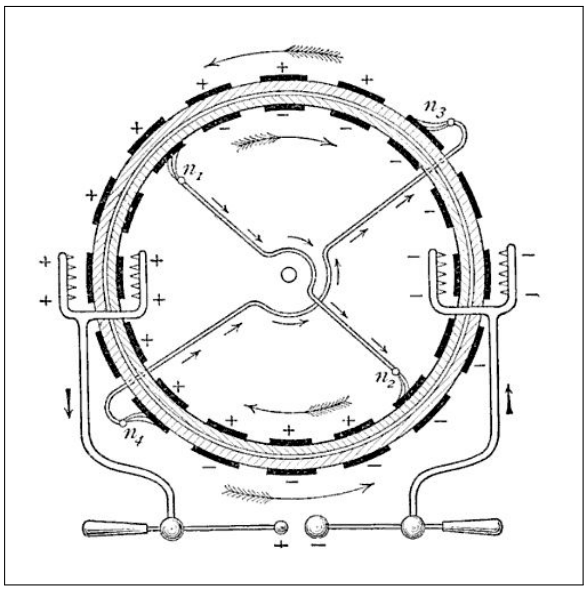
De esto, que lo que se ha asumido en párrafos anteriores sigue siendo válido lo que es útil para los propósitos de simular y analizar el funcionamiento de esta máquina utilizando circuitos lineales.

2.1.3. Varillas de neutralización

Muchas de las máquinas anteriores a la de Wimshurst poseen la característica de inversiones espontáneas de polaridad, lo que hace que la tensión de salida y su polaridad no sean constantes.

Una de las características de la máquina de Wimshurst es que utiliza un ingenioso arreglo de varillas metálicas que actúan como puntos de referencia virtuales (tierras) que efectivamente dividen al capacitor variable en dos polaridades opuestas en cada ciclo lo que ayuda a dar estabilidad al proceso de transformación de energía mecánica en potencial eléctrica. Esto se logra físicamente con las varillas de neutralización (en el caso de la máquina de dos polos, solo se utilizan 2) que, como se dijo, dividen cada disco en dos mitades, cada una con polaridad contraria. Por ende, se colocan las varillas formando un ángulo de preferencia perpendicular para lograr que ambos discos puedan complementarse, tal como se muestra en la figura 11.

Figura 11. **Varillas de neutralización**



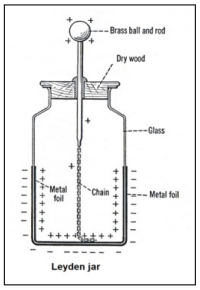
Fuente: MENDES, Joao. *Máquina de Winshurst*. https://www.coe.ufrj.br. Consulta: febrero de 2019.

2.1.4. Condensadores de Leyden

Los sectores de los discos son muy pequeños para sostener la tensión acumulada sin generar una ruptura dieléctrica del medio en el cual se encuentran. Por otro lado para que la máquina tenga aplicaciones prácticas es necesario que sea capaz de elevar su tensión a niveles mucho mayores a los del límite de ruptura dieléctrica del aire, por lo que la mejor solución es trasladar la energía que se va acumulando en cada ciclo de la máquina hacia un dispositivo que tenga una densidad energética mayor a la de los sectores de los discos.

Por razones históricas se siguen utilizando las jarras o condesadores de Leyden que son capacitores antiguos que permitieron, en su momento, lograr los niveles de tensión deseados. En la actualidad, pueden ser substituidos por cualquier condensador que se pueda adecuar a la función. Son estos condensadores o capacitores los que dispersan su energía acumulada en las demostraciones de laboratorio. En la figura 12 se puede apreciar la estructura de dichos componentes.

Figura 12. **Condensador de Leyden**

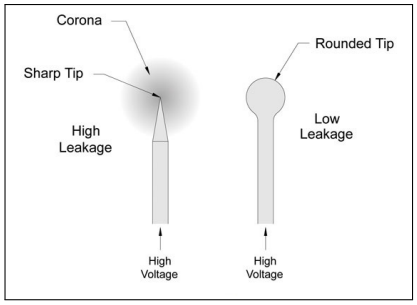


Fuente: MILLER, James. *Electrostatics*. https://solitaryroad.com/c1042.html. Consulta: febrero de 2019.

2.1.5. Terminales de descarga

Dependiendo de la aplicación final que se le vaya a dar a la máquina de Wimshurst así es el tipo de salida que tendrá. Es común observar esta máquina con terminales de salida esféricas en donde la distancia entre ellas es ajustable de tal forma que las descargas pueden ser observadas o medidas visualmente. Entre los usos comunes que se le da a la máquina es la de ionizar el aire (utilizando terminales con aristas pronunciadas) o para aplicación directa a una superficie (terminales grandes y homogéneas), esto se puede apreciar en la figura 13. Para fines prácticos en este trabajo se consideran terminales esféricas (para minimizar el efecto corona) que permiten analizar la salida en circuito abierto.

Figura 13. **Terminales de descarga**



Fuente: ELLIOTT, Brian. *Corona Discharge*.
https://library.automationdirect.com/corona-discharge-and-high-voltage-leaks-issue-12-2008/.
Consulta: febrero de 2019.

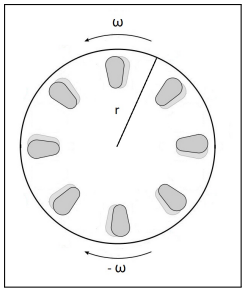
2.2. Modelado de la capacitancia variable

Como se expone al inicio de este capítulo, el parámetro principal del modelo propuesto es que los discos y sus sectores actúan como un capacitor variable. Por esto se va a analizar esta propiedad a continuación considerando que los discos giran en paralelo, de forma contraria uno respecto al otro con velocidad angular constante ω, tal como se puede apreciar en la figura 14. Se puede realizar un análisis de la capacitancia variable considerando este sistema como un capacitor de placas planas paralelas, como se aprecia en la figura 15.

Hay dos terminales eléctricas separadas una distancia fija d y cada una tiene un área superficial A. Esta combinación de parámetros donde entre las placas hay una diferencia de potencial V_{ab} creada por la carga Q sobre las mismas y el medio entre el cual se encuentran tiene una permitividad eléctrica ε generan una capacitancia que se representa como:

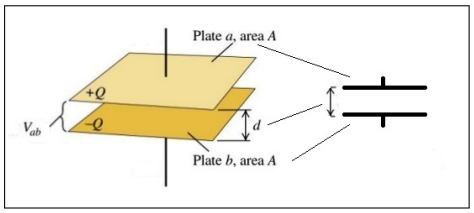
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{2.15.}$$

Figura 14. **Discos rotando**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

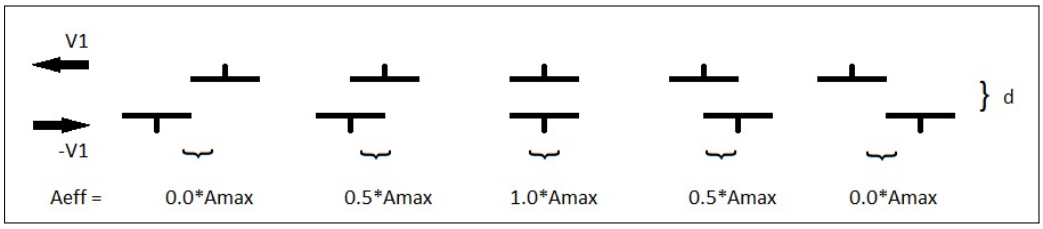
Figura 15. **Capacitor de placas planas paralelas**



Fuente: PINELA, Florencio. *Capacitancia*.
https://es.slideshare.net/fpinela/capacitancia-fsica-cespol. Consulta: febrero de 2019.

Ahora sí suponemos que los sectores en cada disco de la máquina (seguimos trabajando con una máquina de solo dos discos por simplicidad) son placas con un área definida constante A_{max} por cada sector, separados una distancia d que es la distancia entre los discos que no cambia nunca durante la operación y que se mueven con la misma rapidez pero en direcciones contrarias entonces podemos ver que el área efectiva A_{eff} es una función del tiempo $A_{eff}(t)$ donde hay una parámetro que va cambiando conforme el disco gira pero el valor total del área de cada sector A_{max} es una constante de proporcionalidad. En la figura 16 se puede apreciar esta evolución del valor del área efectiva de los capacitores formados por los sectores de los discos.

Figura 16. **Sectores en movimiento**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

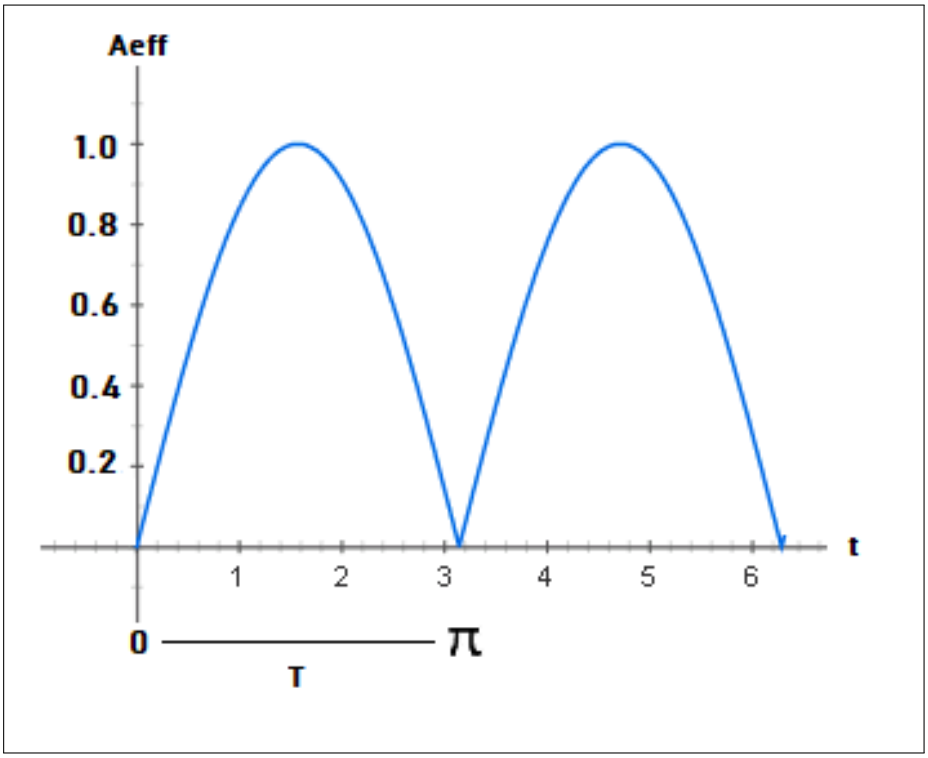
Definiendo las velocidades como funciones del radio del disco r y de la velocidad angular ω podemos simplificar el comportamiento mediante una gráfica, como la que se muestra en la figura 17.

Aquí se puede apreciar que una representación algebraica de este comportamiento viene dado por la siguiente función asumiendo que todo se mide desde el centro de los discos:

$$A_{eff}(t) = A_{max} Sin\left(\frac{\omega}{N}t\right) \tag{2.16.}$$

Donde el argumento está dado por $\frac{2\omega}{2N}t = \frac{\omega}{N}t$ para tomar en cuenta la cantidad N de sectores y la velocidad angular ω con que se mueven los discos que contienen los sectores (siempre a la misma velocidad pero en direcciones contrarias).

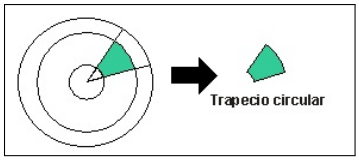
Figura 17. **Área efectiva**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

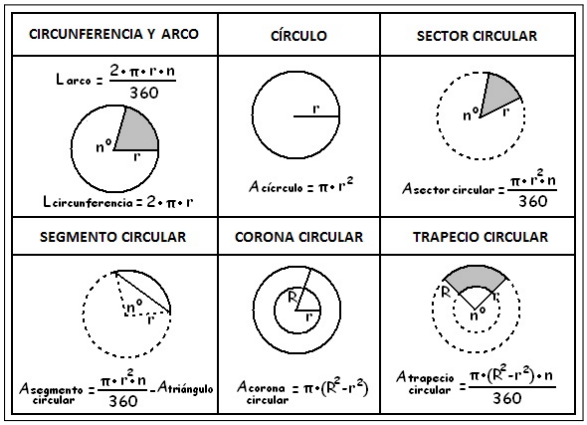
El argumento de la función seno solo varía en el intervalo $[0 - \pi]$ para este caso en particular, expresado de forma matemática $0 \leq \frac{\omega}{N}t \leq \pi$ de donde sabemos que el tiempo varía entre $0 \leq t \leq \frac{N\pi}{\omega}$. Por lo anterior, ahora necesario calcular el área máxima A_{max} de cada sector, asumiendo que los mismos se pueden construir como trapecios circulares, tal como se muestra en la figura 18. En la figura 19 encontramos las fórmulas que utilizaremos para calcular las propiedades de cada sector.

Figura 18. **Trapecio circular**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

Figura 19. **Áreas circulares**



Fuente: CATEDU. *Áreas Circulares*. http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula. Consulta: febrero de 2019.

2.2.1. Análisis para 8 sectores

Para dividir el disco en 8 sectores distanciados equitativamente debemos dividir la circunferencia en 16 partes iguales para alternar sector con espacio libre. Al hacer este cálculo llegamos a que el ángulo que forma a cada sector es:

$$\theta = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \tag{2.17.}$$

Luego queremos que los sectores sean todos del mismo tamaño y que, además, estén posicionados cerca del borde externo para facilitar la recolección de carga minimizando las pérdidas asociadas a esta actividad. Por simplicidad vamos a dividir el radio del disco entre 5 y los sectores ocuparán el espacio de la 4^a división, contando del centro hacia afuera. De esta forma el área del sector viene está por:

$$A_{max} = A_{Rf} - A_{Ro} = \frac{\theta r_f^2}{2} - \frac{\theta r_o^2}{2} = \frac{\theta}{2}\left(r_f^2 - r_o^2\right) \tag{2.18.}$$

Donde los radios vienen dados por

$$r_f = \frac{4r}{5} \tag{2.19.}$$

$$r_o = \frac{3r}{5} \tag{2.20.}$$

Dado lo anterior el área de cada sector se puede simplificar como:

$$A_{max} = \frac{\theta}{2}\left(\frac{16r^2}{25} - \frac{9r^2}{25}\right) = \frac{7\theta r^2}{50} \tag{2.21.}$$

Y al incluir el valor de θ en la ecuación se obtiene el valor final que es:

$$A_{max} = \frac{7\pi r^2}{400} \approx 0,055r^2 \tag{2.22.}$$

Por supuesto que el tamaño del sector puede variar y no necesariamente se debe utilizar una quinta parte, como en este ejemplo. La razón de definir de esta forma el área de los sectores es hacer simple y entendible de forma visual al lector cómo construir las expresiones críticas para determinar las variables electromagnéticas de esta máquina.

2.2.2. Análisis para doce sectores

Para doce sectores se sigue una lógica como en la anterior. Se necesita 24 espacios para alternar uno con sector y uno sin sector, por lo que θ se calcula como:

$$\theta = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \tag{2.23.}$$

Al sustituir en la fórmula para el área de sectores de largo de un quinto del radio se obtiene:

$$A_{max} = \frac{7\pi r^2}{600} \approx 0,037r^2 \tag{2.24.}$$

2.2.3. Análisis para N sectores

Partiendo del hecho de que la cantidad de sectores N en un disco siempre va a ser par y aplicando la misma lógica se necesitan $2N$ espacios para alternar uno con sector y uno sin sector, por lo que θ se calcula como:

$$\theta = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N} \tag{2.25.}$$

De donde al sustituir en la fórmula para el área de sectores de largo de un quinto del radio se obtiene:

$$A_{max} = \frac{7\pi r^2}{50N} \approx \frac{0,44r^2}{N} \tag{2.26.}$$

De forma general, sin definir el tamaño del sector podemos establecer que para sectores de forma de trapecio circular distribuidos homogeneamente el área viene dada por:

$$A_{max} = \frac{\pi}{2N}\left(r_f^2 - r_o^2\right) \tag{2.27.}$$

2.2.4. Fórmula general

Al sustituir las ecuaciones 2.26. y 2.16. en la expresión dada por la ecuación 2.15. se obtiene la siguiente expresión, que será de utilidad en los subsiguientes cálculos de este trabajo:

$$C(t) = \frac{7\pi\varepsilon r^2}{50dN} Sin(\frac{\omega}{N}t) \tag{2.28.}$$

Que corresponde a la capacitancia variable en el tiempo.

2.3. Transformación de la energía mecánica en eléctrica

En las teorías, en general, el incremento en la tensión después de cada revolución de los discos de la máquina de Wimshurst se atribuye al transporte de carga, sin embargo en este trabajo se plantea un razonamiento distinto.

Primero se atribuye el incremento de tensión a la transformación de energía mecánica en potencial eléctrica a través de la variación de parámetros del sistema.

Segundo, se desmiente la transferencia de carga con base en el principio de que un capacitor no puede almacenar más carga de la que ya se encuentra disponible en el sistema.

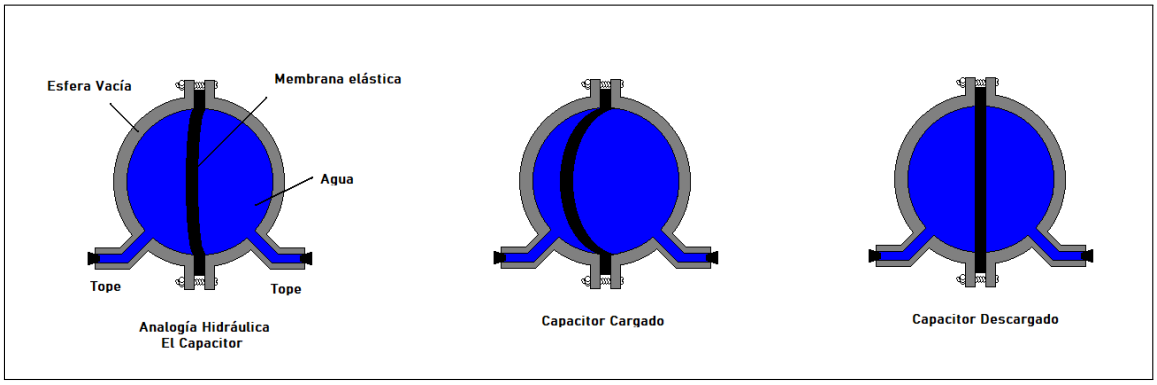
2.3.1. Carga y descarga del sistema

Como los discos no poseen fuentes externas de carga, es de suma importancia ejemplificar mediante una analogía cómo funciona un capacitor en este contexto.

Esto se puede apreciar en la figura 20, donde hay un contenedor vacío al cual se le introduce agua.

En este ejemplo se puede hacer las analogías entre el agua como la carga, la membrana elástica como el campo eléctrico y el contenedor como el área superficial del capacitor.

Figura 20. **Analogía del capacitor**



Fuente: BEATY, William. *Capacitor Complaints*. http://amasci.com/emotor/cap1.html. Consulta: marzo de 2020.

Cuando el capacitor hidráulico es cargado la membrana se estira pero la cantidad total de agua en la cavidad sigue siendo la misma, por lo que de igual forma al 'descargarse' el capacitor, la membrana retorna a su posición original y la cantidad de agua se mantenie constante.

Con esto podemos concluir que en un capacitor la energía se almacena en la tensión que sufre el campo eléctrico entre las placas del capacitor. Sería engañoso decir que la esfera descrita es un dispositivo para almacenar agua como lo sería también decir que la esfera está cargada de agua y esta agua se recuperará al descargarse.

Lo que realmente ocurre es que la energía almacenada, al ser liberada, produce una corriente (de forma similar a la que un resorte puede tranformar energía mecánica cinética en energía potencial elástica y liberarla de nuevo como energía cinética al dejarlo retornar a la posición de reposo).

Ahora, de forma análoga a una máquina de inducción electromagnética, en vez de considerar la velocidad cinética relativa de las densidades de carga, vamos a considerar los cambios en el flujo de campo eléctricos o líneas de fuerza eléctricas cuando cambia el área de cada capacitor formado por dos sectores, de forma similar a como las espiras en movimiento cortan el campo magnético generan una corriente: aquí la variación de campo eléctrico debido al movimiento rotatorio de los discos genera una diferencia de tensión entre los discos.

2.3.2. El campo eléctrico en cada sector

Para entender lo anterior con mayor detalle iniciamos por considerar que los sectores metálicos en los discos no retienen carga eléctrica por su naturaleza metálica, sin embargo debido a las imperfeccciones de los materiales y otros factores externos del ambiente como la temperatura, cargas eléctricas en el aire, fuentes cercanas de radiación, entre otras, cada sector se polariza con una cantidad mínima de carga q en su superficie, lo cual se vuelve relevante cuando se calcula la autocapacitancia que permite identificar la energía inicial que posee (eléctricamente) al momento del inicio de operación del sistema.

La relevancia se debe a que los sectores no estan eléctricamente conectados a ningún otro punto del sistema sino en una configuración de circuito abierto, donde la energía se almacena e incrementa en cada revolución de los discos hasta llegar a la tensión de ruptura. Esta energía inicial viene dada por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{r_0}^{r}\frac{\sigma}{r}dS(r) \tag{2.29.}$$

Donde σ es la densidad de carga superficial del sector, dS es el diferencial de área y r el la distancia desde dS a un punto M fijo dentro del sector. Si bien no es el propósito de este trabajo calcular el valor de esta energía inicial, porque en el sistema los sectores no se encuentran aislados (desde el punto de vista de los campos electromagnéticos por ende de las capacitancias mutuas), lo que se busca resaltar es que el sistema posee una energía inicial, la cual es amplificada por el proceso de conversión de energía eletro-mecánica que, a su vez, permite explicar la propiedad de autoarranque de la máquina de Wimshurst.

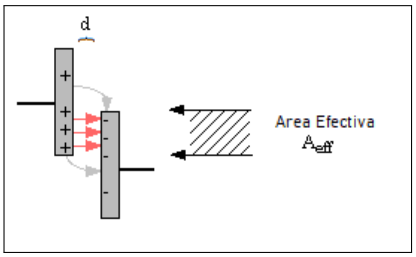
Es necesario ahora considerar que cuando los discos giran hay momentos donde, si se viesen lateralmente, dos sectores se superponen y forman un capacitor de placas planas paralelas, donde la distancia entre ellos se mantiene constante pero el área va cambiando conforme los discos giran. Como se dijo en el párrafo anterior, cada sector posee energía eléctrica desde el inicio, lo que les permite generar durante el instante que se sobreponen un campo eléctrico perpendicular a las superficies.

Es aquí donde la pregunta de que si no hay una conexión eléctrica entre los sectores ni un intercambio de cargas ¿por qué se incrementa la tensión con cada revolución de los discos? Para responder a esto es importante regresar al análisis de la variación paramétrica del sistema al verlo como un capacitor variable.

La variación del área efectiva de los capacitores que forman los sectores generan una transferencia paramétrica de energía; es decir, transforman la energía que genera el cambio en el área en energía potencial eléctrica.

La aseveración anterior no puede darse por válida a simple vista, sin entender que las cargas en los sectores tienden a acumularse en la región donde se traslapan las áreas de los sectores cuando se mueven (debido a su naturaleza metálica). Aunque algunas cargas de cada sector generen líneas de campo eléctrico hacia los puntos que no se traslapan (capacitancias parásitas o mutuas) estas son despreciables durante la mayoría del tiempo, lo que nos permite analizar el efecto solamente de aquella en la región del área efectiva. Esto se puede apreciar mejor en la figura 21.

Figura 21. **Campo eléctrico**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

2.3.3. La energía del capacitor

Consideremos un capacitor de placas planas paralelas que posee una energía almacenada en forma de campo eléctrico con valor U. Entonces, la energía almacenada o trabajo necesario para mantener las cargas polarizadas (separadas) y el campo eléctrico entre las placas se representa por medio de la expresión $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV_0 = \frac{1}{2}CV_0^2$ donde Q es la carga eléctrica, C es la capacitancia, V_0 es la tensión entre sus terminales.

Los siguientes parámetros son relevantes para el análisis que viene a continuación:

- Potencia del capacitor $P_C = \frac{dw}{dt} = VI = \frac{V^2}{R} = I^2Z$
- Corriente del capacitor $I_C(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$

Aplicando la regla de la cadena para la expresión para calcular la potencia P en el capacitor variable que forman los discos de la máquina de Wimshurst cuando los parámetros V y C ambos varían en el tiempo, se obtiene lo siguiente:

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}CV^2\right] = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}C\frac{dV^2}{dt} \tag{2.30.}$$

Que se puede simplificar como sigue:

$$P = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}2VC\frac{dV}{dt} = \left(\frac{1}{2}\frac{dC}{dt}\right)V^2 + V\left(C\frac{dV}{dt}\right) \tag{2.31.}$$

Al agrupar los términos se obtiene una expresión que se puede interpretar como una impedancia variable en el capacitor (que depende de la geometría del mismo):

$$\frac{1}{2}\frac{dC}{dt} \Rightarrow \frac{1}{Z_C} \tag{2.32.}$$

Otra expresión que puede representar la corriente que circula en el capacitor como:

$$C\frac{dV}{dt} = I_C \tag{2.33.}$$

Donde se asume que para cada caso se cumple que $V = V_C$ lo que genera el siguiente resultado:

$$P_C = \frac{V_C^2}{Z_C} + V_C I_C \tag{2.34.}$$

En la ecuación de arriba se puede apreciar que la fuerza electromotriz y, por ende la transferencia de energía puede ocurrir de dos formas:

- (A) Acoplamiento paramétrico $\frac{V_C^2}{Z_C}$
- (B) Acoplamiento del flujo eléctrico $V_C I_C$

Si se analiza a fondo cada componente mostrado arriba, para la potencia eléctrica se aprecia que (A) expresa la potencia efectiva entregada por la máquina de Wimshurst y (B) expresa la potencia de electrificación que se puede equiparar en ingeniería eléctrica a la corriente de magnetización (en este caso, tensión de electrificación) que en una máquina de inducción electromagnética es necesaria para mantener los campos magnéticos de los devanados. Es importante notar que en este caso, como no hay movimiento de cargas, la corriente corresponde a la corriente de desplazamiento en el capacitor.

La tensión del sistema es variable, dependiente de la configuración del mismo en cada instante $'t'$ por lo que se concluye que la conversión de energía ocurre en la componente (A) a traves de los cambios paramétricos del capacitor variable que forman los discos de la máquina.

2.3.4. Incremento de la tensión en cada revolución

De la sección anterior sabemos que el movimiento giratorio de los discos modifica el área del capacitor que forman los discos y que, por ende, hay variaciones en la tensión del mismo. Lo que no queda claro es ¿cómo se traduce esto en un incremento en la energía y, por ende, de la tensión de salida de la misma?

Para comprender esto mejor es necesario recordar que en un capacitor de placas planas paralelas el campo eléctrico viene representado por medio de la ecuación 2.35.:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2.35.}$$

Donde ε es la permitividad eléctrica del medio, σ la densidad de carga superficial de cada placa que, a su vez, se puede expresar como $E = \frac{Q}{A}$, donde Q es la carga de la placa y A el área efectiva del capacitor. Debido a la corta separación entre las placas es posible utilizar la relación aproximada $V = Ed$, donde E es la magnitud del campo eléctrico, d la distancia perpendicular entre las superficies de las placas. Podemos costruir la relación que se muestra en la ecuación 2.36.:

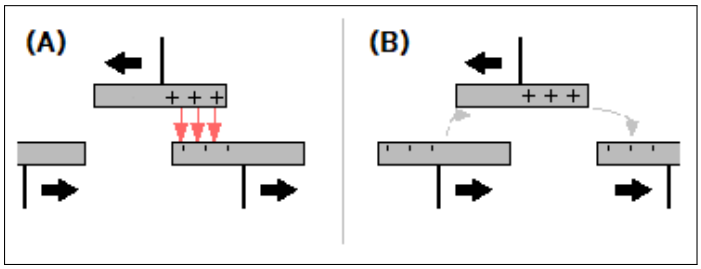
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q\varepsilon}{\sigma d} = \frac{QA\varepsilon}{Qd} = \frac{A\varepsilon}{d} \tag{2.36.}$$

Ya se sabe que por la configuración física de la máquina de Wimshurst lo que varía en la ecuación anterior es el área y, por ende, la capacitancia. Esto se puede apreciar en la ecuación 2.37.:

$$\Phi_E = \oint_S E \cdot \mathrm{d}A = \frac{Q_S}{\varepsilon_0} \tag{2.37.}$$

Lo que significa que si el área A del capacitor varía, también el flujo eléctrico E lo hará proporcionalmente (así como la tensión y la energía acumuladas), dado que las cargas se reubican en los extremos, como se muestra en la figura 22. Cuando las cargas tratan de redistribuirse en la superficie de cada sector cuando la velocidad angular supera el valor mínimo, para que esto no ocurra, entonces el efecto es puramente aditivo, ánalogo a la máquina generadora de inducción electromagnética, donde se varía mecánicamente el flujo magnético para inducir una corriente. Aquí se varía el flujo eléctrico para inducir una tensión.

Figura 22. **Variaciones del campo eléctrico**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

Otra analogía es que cada ciclo el campo eléctrico se comprime como un resorte o muelle. Lo hace mecánicamente cuando se le da cuerda a un reloj, lo que por supuesto tiene un límite, que es la tensión de ruptura. Por otro lado, esto puede explicar el efecto corona observado a veces en los sectores, como se puede apreciar en la figura 23.

Figura 23. **Efecto corona**

Fuente: REVOLVY. *Wimshurst Machine*. https://www.revolvy.com/page/Wimshurst-machine. Consulta: marzo de 2020.

Hay trabajos en los que se argumenta que la máquina de Wimshurst absorbe carga del ambiente o la mueve de unos sectores a otros por medio de las escobillas lo cual no es del todo comprensible en el sentido de que 1) hay máquinas que se encuentran aisladas del ambiente en contenedores al vacío, 2) los sectores no contienen cargas ilimitadas y aunque se moviesen de sector a sector no puede esta dinámica explicar el incremento en tensión de la totalidad de la máquina (no solo en un sector), 3) hay variantes que no poseen sectores metálicos para quitarles cargas y 4) otras que, en vez de escobillas, solo tienen ”inductores” que sirven para conectar capacitivamente con la jarras de Leyden, pero no permite la movilidad de las cargas en forma de corriente.

Teniendo todo lo anterior en consideración, se puede apreciar que no se puede explicar la diferencia entre la tensión inicial y final de la máquina como el transporte de cargas, que en un generador de Van Der Graaf sí tiene una fuente conocida y que para fines prácticos, ilimitada.

Para proveer otro argumento a favor del modelo presentado en este trabajo, imaginemos que las cargas sí se transfieren a lo largo de las varillas neutralizadoras que usualmente están hechas de aluminio. Las mismas suelen tener $30\ cm$ de largo, $1,25\ mm$ de radio por lo que considerando la resistividad del aluminio a temperatura ambiente que es de $\rho = 0,028\frac{\Omega mm^2}{m}$, vemos que la resistencia de la varilla es de $R = \rho\frac{L}{A} = 1,71 \times 10^{-3}\ \Omega$. Imaginemos que la máquina llega a generar $V = 10\ kV$ de tensión, utilizando la ley de Ohm $I = \frac{V}{R}$; esto implicaría una corriente de $I = 5,84 \times 10^6\ A$ que en comparación a un conductor de aluminio del las dimensiones ya establecidas soporta solamente hasta $100\ A$ en condiciones normales. Implica que la máquina dejaría de funcionar antes siquiera de llegar a la tensión mencionada, lo que en la práctica no ocurre.

Continuando el proceso de análisis, el siguiente paso consiste en calcular el cambio en la tensión en cada ciclo o iteración de la máquina, de tal forma que se pueda predecir o conocer el incremento que tendrá el sistema si no es interrumpido por algún agente externo y hasta alcanzar la tensión de ruptura. Para esto se parte de la ecuación 2.38.:

$$V = \frac{Q}{C} \tag{2.38.}$$

Como ya se sabe que la carga se mantiene constante en el sistema al diferenciar la ecuación 2.38. se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta V \simeq \frac{dV}{dt} = Q\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C(t)}\right) \tag{2.39.}$$

Donde por la regla de la cadena sabemos que la ecuación 2.39. se puede representar como se muestra en la ecuación 2.40.:

$$\Delta V \simeq \frac{dV}{dt} = Q\frac{-C'(t)}{(C(t))^2} \tag{2.40.}$$

Al substituir la expresión de la ecuación 2.28. en la ecuación 2.40. finalmente se obtiene la ecuación 2.41. sabiendo que al derivar respecto al tiempo la ecuación 2.28. se obtiene $\frac{7\pi\varepsilon\omega r^2}{50dN^2}Cos(\frac{\omega}{N}t)$.

$$\Delta V \simeq= Q\frac{-\frac{7\pi\varepsilon\omega r^2}{50dN^2}Cos(\frac{\omega}{N}t)}{(\frac{7\pi\varepsilon r^2}{50dN}Sin(\frac{\omega}{N}t))^2} \tag{2.41.}$$

Es ahora necesario conocer el valor del cambio cuando el área se aproxima a cero ($A \to 0$) y esto ocurre cuando $\frac{\omega}{N}t \to \pi$. Si evaluamos la ecuación 2.41. con este valor obtenemos una función indefinida.

Dado que el comportamiento senoidal del valor del área es una aproximación, no debiese de afectar significativamente si se utilizan series de Taylor truncadas en el segundo término para aproximar la función. Para esto se utilizan las expresiones mostradas en la ecuación 2.43.:

$$Cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \tag{2.42.}$$

$$Sin(x) = x - \frac{x^3}{6} \tag{2.43.}$$

Es importante notar que al substituir todos los valores se obtiene la siguiente espresión acorde a la ecuación 2.44., donde se dejan como variables los parámetros Q, d, r y ω, los cuales serán utilizados en el siguiente capítulo para la simulación del sistema.

Por lo pronto a este valor se le llamará contante k del sistema. También es independiente del valor de N y de la cantidad de sectores.

$$k = \Delta V \simeq \frac{-50Qd\omega}{7\pi\varepsilon r^2}\frac{-3,9348022}{4,105162767} = 2,46 \times 10^{11}\frac{Qd\omega}{r^2} \tag{2.44.}$$

Se puede apreciar que el valor de k es positivo ya porque las variables dependientes solo pueden ser positivas. Esto indica que, en efecto, la tensión se incrementa con cada ciclo y finalmente permite expresar la tensión V_i como una función de su valor anterior, tal como se muestra en la ecuación 2.45. para $i > 0$:

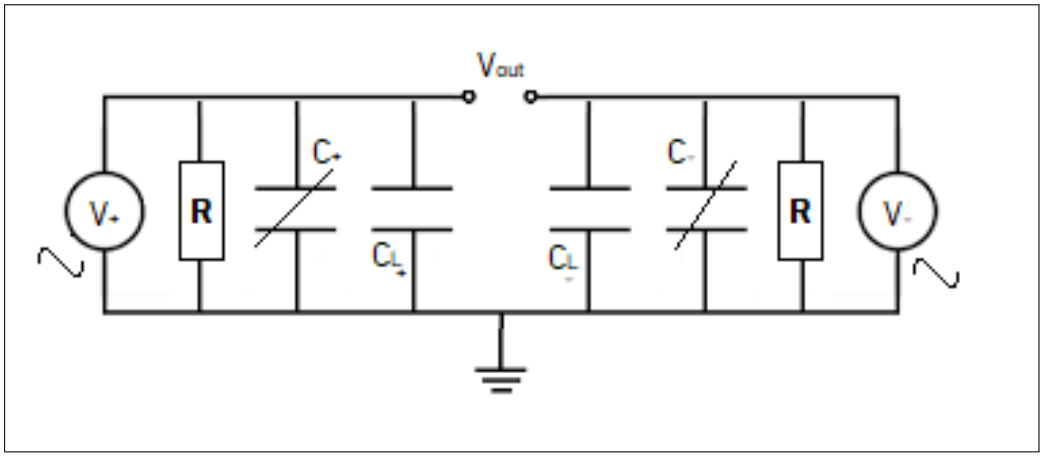
$$V_i = \Delta V \times V_{i-1} \tag{2.45.}$$

A la vez permite verificar el incremento de la energía porque la misma es directamente proporcional a la tensión acorde a la relación $U = \frac{1}{2}QV$ donde Q es constante y V se incrementa con el tiempo.

2.4. Diseño del circuito equivalente

Las varillas de neutralización, como se indicaba antes en este capítulo, dividen el capacitor variable en dos mitades de polaridades opuestas; sin embargo, viéndolo desde el punto de vista del movimiento relativo, lo que estas varillas hacen es generar una tierra virtual, un punto de referencia eléctrico para la tensión manifiesta en cada sector y en cada disco. Las pérdidas del sistema en condiciones normales debido a capacitancias parásitas también pueden incluirse como resistencias muy grandes y que, para fines prácticos, pueden considerarse como circuitos abiertos. En la figura 24 puede apreciarse una representación general del circuito que representa las dos mitades del capacitor variable, las dos jarras de Layden, las pérdidas, y las fuentes de tensión variables que existen como parte de la transformación de energía mecánica en potencial eléctrica.

Figura 24. **Circuito equivalente**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

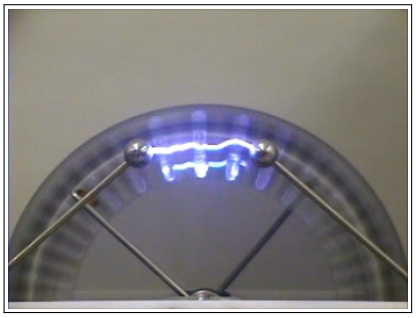
2.4.1. Determinación de variables electromagnéticas

Dentro del marco de análisis de variables electromagnéticas en electrotecnia, este trabajo se debe enfocar en identificar el comportamiento de las siguientes variables:

- Impedancia
- Corriente
- Tensión
- Potencia

En las secciones anteriores se ha hecho énfasis en que la máquina de Wimshurst no opera con corrientes significativas; en este caso, significa que la corriente que se calculará es aquella cuando se llega a la tensión de ruptura del aire y genera la conocida chispa de descarga en el aire o vacío como se puede apreciar en la figura 25.

Figura 25. **Chispa de descarga**



Fuente: PHYSICS UCSB. *Wimshurst Machine*. http://web.physics.ucsb.edu/ lecturedemonstrations/Composer/Pages/56.32.html. Consulta: marzo de 2020.

2.4.2. Velocidad angular mínima

Para tener el efecto magnificador de la tensión en la máquina de Wimshurst es necesario que la velocidad angular de los discos tenga un valor mínimo mayor a cero acorde a la ecuación 2.44.

Se argumenta aquí que dicha velocidad angular es función de la geometría y composición física de la máquina de Wimshurst, ya que, por un lado, depende de las propieddes de los materiales de los que está hechos sus sectores y, por otro, depende de la forma de los mismos.

Esto se puede aseverar con base en que el tiempo de disipación de la energía de una superficie conductora es función de su distancia a tierra (también del material entre tierra y la máquina), su capacitancia propia (que depende de su forma). Esto se puede representar mediante la relación $\tau = RC$ que nos da la constante de tiempo del sector.

Por fines prácticos para ilustrar hasta cierto punto la magnitud de esta constante de tiempo se utilizará un sector circular de aluminio con un valor de autocapacitancia que viene dada por $C = 8\varepsilon r$ donde ε es la permitividad eléctrica del vacío y r es el radio del disco.

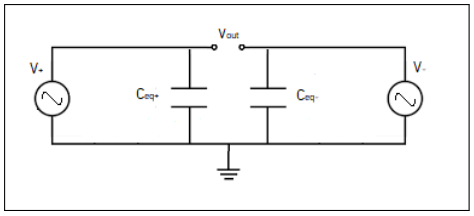
Asumiendo un disco de $1\ cm$ de diametro a una altura de $1\ m$ sobre tierra el mismo tendría una capacitancia propia de $C = 3,54 \times 10^{-13}\ F$ y la resistencia sería de $R = 1,3 \times 10^{16}\ \Omega$ (que corresponde a la resistencia del aire) por lo que la constante de tiempo da $\tau = 4\ 604\ s$ que es poco más de una hora, sin embargo esto puede variar acorde a la humedad del sistema entre otros.

Lo anterior garantiza que, en condiciones de baja humedad en el ambiente (o de que la máquina se encuentre aislada del ambiente con gas o vacío), cuando la velocidad angular sea mayor a cero la máquina va a magnificar eficientemente la tensión, lo cual coincide con las observaciones de que en ocasiones, con menos de un giro de los discos, se generan chispas en sus terminales de salida. Esto es explicado por el incremento exponencial de la tensión que alcanza el potencial de ruptura dieléctrica del aire rápidamente.

2.4.3. Planteamiento del circuito equivalente

Utilizando el circuito de la figura 24 se procede a eliminar las resistencias que representan las pérdidas porque se pueden considerar como circuitos abiertos, también a sumar los capacitores variables, los capacitores de Leyden para tener una capacitancia equivalente tal y como se puede apreciar en la figura 26. La capacitancia equivalente de cada lado se puede escribir como $C_{eq} = C_{var} + C_{Leyden}$ ya que ambos estan en configuración en paralelo. Basta con sumar el valor fijo de C_{Leyden} con la expresión variable en el tiempo de C_{var} que se incluye en la ecuación 2.28..

Figura 26. **Circuito sin pérdidas**

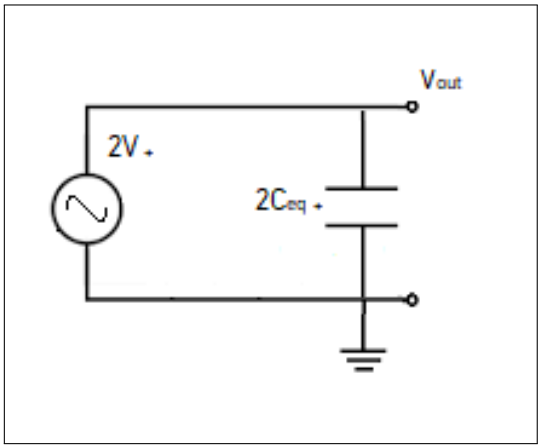


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

2.4.4. Reducción del circuito equivalente (Normalizado)

Dado que los dos extremos del circuito son iguales en magnitud pero contrarios en signo, observamos en la figura 26 que se puede escribir $V_{out} = V_+ - V_- = V_+ - (-V_+) = 2V_+$ de donde se puede re-escribir el circuito como se muestra en la figura 27:

Figura 27. **Circuito simplificado**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Paint.

2.4.5. Cálculo de las expresiones a simular

A continuación se definen las expresiones que representan las variables electromagnéticas de la máquina de Wimshurst. Las mismas quedarán en expresadas en función de sus parámetros y hasta el siguiente capítulo cuando se simule, se utilizarán valores reales.

2.4.5.1. Impedancia

A partir de la ecuación 2.28. sabemos ya la expresión para la impedancia capacitiva de esta máquina, la cual se muestra a continuación como la ecuación 2.46. y su primera derivada en el tiempo como la ecuación 2.47.. Finalmente, la impedancia capacitiva (sin incluir la jarra de Leyden) viene dada por la expresión de la ecuación 2.48.

$$C(t) = \frac{7\pi\varepsilon r^2}{50dN} Sin\left(\frac{\omega}{N}t\right) \tag{2.46.}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{7\pi\varepsilon\omega r^2}{50dN^2} Cos\left(\frac{\omega}{N}t\right) \tag{2.47.}$$

$$Z(t) = \frac{1}{\omega C(t)} = \frac{50dN}{7\pi\varepsilon r^2\omega Sin\left(\frac{\omega}{N}t\right)} \tag{2.48.}$$

2.4.5.2. Corriente

Tal como se expresó con anterioridad, la máquina de Wimshurst no posee corrientes internas, pero es necesario calcular la corriente de salida de las terminales de la máquina con respecto al vacío. Aquí se asume el valor de $Z_0 = 120\pi \simeq 376,73\ \Omega$. Usualmente esta descarga ocurre cuando la tensión de salida V_{out} alcanza el valor de tensión de ruptura del aire que tiene un valor aproximado de $3 \times 10^6 \frac{V}{m}$. Se asume que los electrodos están usualmente separados $10\ cm$, lo cual es equivalente a $V_{aire} = 4,50 \times 10^5 V$.

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z_0} \tag{2.49.}$$

La ecuación 2.49. expresa esta relación, la cual, aunque tenga algún valor menor a la tensión de ruptura, no fluirá a través del aire.

2.4.5.3. Tensión

Partiendo de la ecuación 2.45., la cual es de naturaleza discreta, al substituir la misma expresión n veces en sí misma hasta llegar al término $V_0 \simeq \Delta V$ y asumiendo que i es n veces grande, se observa que posee la estructura funcional de una expresión exponencial de base ΔV (cuyo valor es dado por la ecuación 2.44.) de la forma $V_n = \Delta V \times ... \times \Delta V = \Delta V^n$ que para fines prácticos permite aproximar la expresión para la tensión en función del tiempo t, como se muestra en la ecuación 2.50.

$$V(t) = \left(2,46 \times 10^{11} \frac{Qd\omega}{r^2}\right)^t \tag{2.50.}$$

En la ecuación 2.51. se muestra la primera derivada respecto al tiempo de la expresión para la tensión.

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left(2,46 \times 10^{11} \frac{Qd\omega}{r^2}\right)^t Ln\left(2,46 \times 10^{11} \frac{Qd\omega}{r^2}\right) \tag{2.51.}$$

Estas dos ecuaciones serán de utilidad para el cálculo de otras expresiones que describirán el comportamiento de los parámetros electromagnéticos de la máquina. Es relevante observar que al ser la tensión de naturaleza exponencial (con base positiva), su razón de cambio también lo es.

Lo anterior se puede resumir como: cuanto más giran los discos de la máquina, más se incrementa la tensión de salida.

2.4.5.4. Potencia

Con la ecuación 2.31. y substituyendo en ella las ecuaciones 2.50. para la tensión, 2.51. para su primera derivada, 2.46. para la capacitancia y 2.47. para su primera derivada, se obtiene una expresión para la potencia que se representa por medio de la ecuación 2.52..

$$P(t) = \left(\frac{7\pi\varepsilon r^2}{50dN}\right)\left(2,46\times 10^{11}\frac{Qd\omega}{r^2}\right)^{2t}\left[\frac{\omega}{2N}Cos\left(\frac{\omega}{N}t\right) + Ln\left(2,46\times 10^{11}\frac{Qd\omega}{r^2}\right)Sin\left(\frac{\omega}{N}t\right)\right] \quad (2.52.)$$

3. IMPLEMENTACIÓN DE LA SIMULACIÓN DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

En el capítulo 2 se realizaron todos los desarrollos teóricos para plantear un circuito equivalente con sus variables electromagnéticas. Es en este capítulo donde se realizan dos acciones sobre los resultados del anterior, 1) se establecen valores numéricos para los parámetros de forma que sea utilizable en una simulación, 2) se plantea un modelo numérico que permita simular el comportamiento del circuito. Para el primer punto es importante notar que se han seleccionado valores que coinciden con máquinas reales y que, por lo tanto, permiten comparar los resultados con otras simulaciones y observaciones realizadas por otros investigadores.

La principal contribución de este capítulo es que corresponde con el planteamiento de un modelo generalizado de naturaleza estocástica en que es extendible a futuras investigaciones. Esto es, en sí mismo, una herramienta simple y de gran poder, que permite agilizar la obtención de resultados experimentales para máquinas electrostáticas y de otros tipos de dispositivos que puedan ser reducidos a circuitos equivalentes lineales.

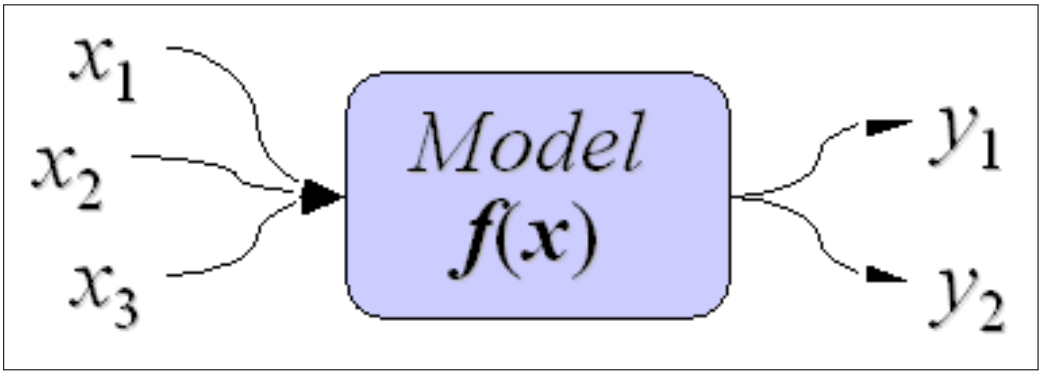
3.1. Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un proceso que involucra el uso de números aleatorios y probabilidades para resolver problemas. Lo anterior se logra al aplicar técnicas numéricas para calcular probabilidades además de otras cantidades relacionadas.

Una simulación por medio de una computadora tiene que ver con utilizar modelos computacionales (como en el caso del método de Monte Carlo) para imitar procesos reales y realizar predicciones sobre su comportamiento. En el caso de este trabajo, el modelo es creado en una hoja de cálculos electrónica (*Microsoft Excel*) donde se tiene un número dado de parámetros de entrada, algunas ecuaciones que utilizan estos parámetros para generar salidas o variables de respuesta.

En este caso corresponden a las variables electromagnéticas de la máquina de Wimshurst de las cuales buscamos conocer su comportamiento. Usualmente este tipo de modelos es determinista, lo que significa que se obtiene el mismo resultado sin importar cuántas veces se repita el cálculo, tal como se muestra en la figura 28.

Figura 28. **Modelo paramétrico determinista**



Fuente: WITTWER, Jon. *Monte Carlo Simulation Basics*. https://www.vertex42.com/ExcelArticles/mc/MonteCarloSimulation.html. Consulta: marzo de 2019.

Además, es capaz de proporcionar soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos al posibilitar la realización de experimentos con muestreos de números pseudoaleatorios en una computadora.

El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o determinista y, a diferencia de los métodos numéricos que se basan en evaluaciones en N puntos en un espacio M-dimensional para producir una solución aproximada, el método de Montecarlo tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$ en virtud del teorema del límite central, lo que se podrá apreciar más adelante como la propagación de las incertezas en la figura 29.

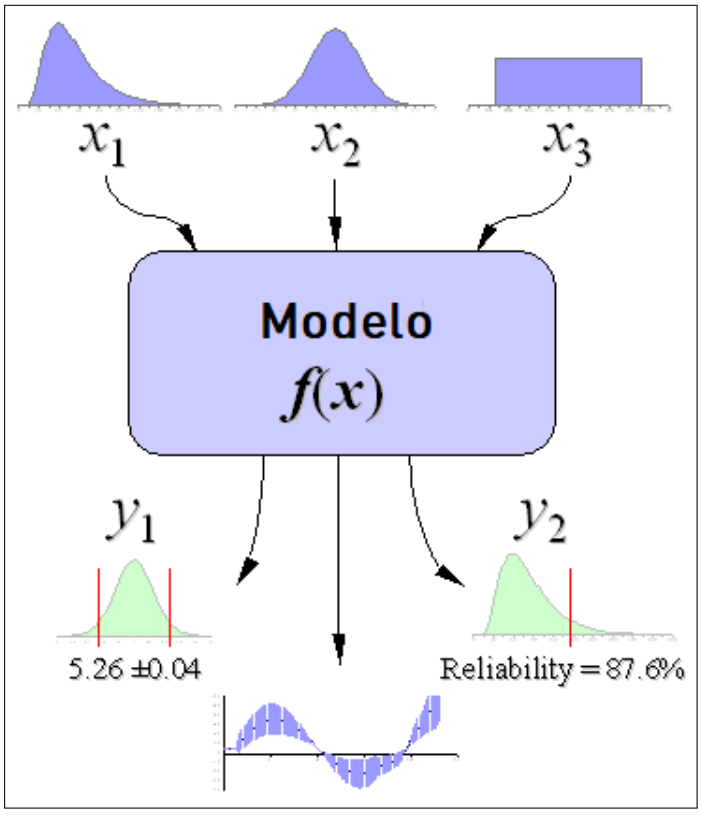
Al aplicar el método de Monte Carlo en la simulación, lo que se está realizando es evaluar el modelo determinista de forma iterativa utilizando un conjunto de valores aleatorios como entradas. Este método es utilizado comúnmente cuando el modelo es complejo, no lineal o involucra más de dos parámetros con incertidumbre.

Una simulación de este tipo fácilmente puede involucrar una cantidad mayor a 10 000 evaluaciones del modelo, una tarea que en el pasado era impráctica para realizarse a mano, pero en la actualidad es muy sencillo con el uso de las computadoras. En resumen, al utilizar variables aleatorias como entradas se está transformando el modelo determinista en un modelo estocástico.

En este trabajo utiliza un generador uniforme de números aleatorios para las entradas del modelo. Esto no implica que sea la única forma de representar la incertidumbre dentro del proceso a simular, ya que se pueden utilizar muchas distribuciones estadíticas distintas según la naturaleza del proceso.

Antes de continuar es necesario considerar la propagación de las incertezas, donde el método de Monte Carlo es solo una de las muchas formas de analizar la propagación, tal cómo se muestra en la figura 29 donde el objetivo es determinar como las variaciones aleatorias, la falta de información sobre un proceso y los errores en el mismo afectan la sensibilidad, desmepeño o confiabilidad del sistema que se está modelando.

Figura 29. **Propagación estocástica de incertezas**



Fuente: WITTWER, Jon. *Monte Carlo Simulation Basics*. https://www.vertex42.com/ExcelArticles/mc/MonteCarloSimulation.html. Consulta: marzo de 2019.

El método de Monte Carlo para simulaciones está categorizado como un método de muestreo porque las variables aleatorias están generadas con base en una distribución de probabilidades para replicar el comportamiento de tomar muestras de procesos o poblaciones reales.

Por lo anterior, cuando se diseña el cálculo de los valores aleatorios se intenta siempre seleccionar una distribución probabilística para las entradas que se acerque lo más posible a la información ya existente (bibliográfica o experimental) o que, en el peor de los casos, mejor representa nuestro conocimiento actual sobre el fenómeno que se está investigando.

3.2. Diseño de la simulación

A continuación se detalla los pasos generales para implementar el modelo de Monte Carlo:

- Paso 1: crear un modelo paramétrico, $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$
- Paso 2: generar un conjunto de entradas aleatorias, $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}$
- Paso 3: evaluar el modelo y almacenar los resultados como iteraciones, y_i
- Paso 4: repetir los pasos 2 y 3 para $i = 1$ hasta n
- Paso 5: analizar los resultados utilizando técnicas estadísticas

3.2.1. Paso 1: creando el modelo paramétrico

El escenario donde se realiza esta simulación involucra una máquina de dimensiones y componentes que se asemejan a las de otros experimentos similares. En este caso, se desea conocer las curvas de operación aproximadas (se asume ruido entre otras incertezas en los valores exactos de los parámetros propios del sistema) para distintos valores de N (cantidad de sectores.

La idea es obtener aproximaciones aleatorias por medio de la aplicación del método de Monte Carlo a partir de las cuales se crean diagramas de dispersión que luego permiten crear curvas de ajuste que representarán las curvas de operación buscadas. Lo anterior puede implementarse realivamente fácil utilizando hojas de cálculo.

Se va a iniciar con descomponer las ecuaciones obtenidas en el capítulo 2 en sus parámetros principales (variables y constantes), de tal forma que lleguemos a expresiones donde trabajemos con las cantidades fundamentales.

Idealmente, para que el método funcione de la mejor forma posible, es necesario que todas las entradas sean independientes: es mucho más sencillo descomponer en variables fundamentales un problema para analizar sus resultados (cuando es posible) que intentar calcular correlaciones entre entradas aleatorias dependientes.

Para esto, a continuación se realiza un resumen de las expresiones por simular y los valores seleccionados para este proceso (inspirados en configuraciones reales). Se resalta en cada fórmula cuáles son valores fijos y variables, su valor, dimensionales, entre otros.

Muchos de los parámetros son dependientes de los demás, lo que simplifica hasta cierto punto la cantidad de cálculos ya que en vez de repetir los mismos, se alimentará sus valores calculados en las otras fórmulas. En la tabla I se pueden apreciar las características electromagnéticas (expresiones), sus variables y parámetros (constantes).

Tabla I. **Relaciones entre fórmulas y cantidades**

Expresión	**Variables**	**Constantes**
1. Impedancia Capacitiva		
$C(t) = \frac{7\pi\epsilon r^2}{50Nd} Sin\left(\frac{\omega}{N}t\right)$ $\frac{dC(t)}{dt} = \frac{7\pi\epsilon r^2\omega}{50N^2d} Cos\left(\frac{\omega}{N}t\right)$ $Z(t) = \frac{1}{\omega C(t)}$	r, d, ω	N, π, ε, $\frac{7}{50}$
2. Corriente		
$I(t) = \frac{V(t)}{Z_0}$	$-$	Z_0
3. Voltaje		
$V(t) = \left(2,46 \times 10^{11} \frac{Q\omega d}{r^2}\right)^t$ $\frac{dV(t)}{dt} = \left(2,46 \times 10^{11} \frac{Q\omega d}{r^2}\right)^t Ln\left[2,46 \times 10^{11} \frac{Q\omega d}{r^2}\right]$	Q, d, ω, r	$2,46 \times 10^{11}$
4. Potencia		
$P(t) = \frac{1}{2} V(t)^2 \frac{dC(t)}{dt} + V(t)C(t)\frac{dV(t)}{dt}$	$-$	$\frac{1}{2}$

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

La razón de separar variables de las constantes es para hacer constar que las primeras dependen de la configuración inicial del sistema y las segundas serán lo mismo, independientemente de las configuraciones que se decidan.

Si bien ambas clases de parámetros son valores a definir, las variables son las que poseen incerteza (las constantes se mantienen inmutables todo el tiempo).

Saber esto no es suficiente y por eso el ejercicio de la tabla sirve para identificar las componentes fundamentales o más básicas de cada expresión, de forma que idealmente todas las variables que alimenten las expresiones a calcular sean totalmente independientes las unas de las otras.

Tabla II. **Relación de variables (Monte Carlo)**

Referencias para la simulación		
Salidas	**Entradas**	**Constantes**
$Y_1 = C(t)$	$X_1 = r$	$K_1 = N$
$Y_2 = \frac{dC(t)}{dt}$	$X_2 = d$	$K_2 = \pi$
$Y_3 = V(t)$	$X_3 = \omega$	$K_3 = \epsilon$
$Y_4 = \frac{dV(t)}{dt}$	$X_4 = Q$	$K_4 = \frac{7}{50}$
$Y_5 = I(t)$	$X_5 = t$	$K_5 = Z_0$
$Y_6 = P(t)$		$K_6 = 2,46 \times 10^{11}$
$Y_7 = Z(t)$		$K_7 = \frac{1}{2}$

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

A la vez se ha tomado en cuenta qué expresiones dependen las unas de las otras, por lo que hasta cierto punto, unas se transformarán en las entradas de las otras, una vez sean calculadas como se muestra en las tablas III y IV.

Para la simulación se utilizará los siguientes parámetros: un diámetro de 15 cm para los discos que están separados 5 mm y que giran a una velocidad angular de 10 $\frac{rev}{s}$.

Tabla III. **Valores experimentales**

Valores experimentales de constantes y variables		
Parámetro	**Valor(es)**	**Dimensional**
N	8, 12, 100	$-$
Z_0	376,73	Ω (Ohms)
π	3,141592654	$-$
ϵ	$8,85 \times 10^{-12}$	$\frac{F}{m}$ (Farad sobre Metro)
r	0,150	Metros
d	0,005	Metros
ω	62,8318 (~ 10 RPS)	$\frac{rad}{s}$
Q	$5,00 \times 10^{-12}$	Coloumbs
t	$0 \leq t \leq \frac{N\pi}{\omega}$	Segundos

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

Si bien no es el objeto de este trabajo conocer la relación entre las dos clases de argumentos de las expresiones electromagnéticas (constantes y variables), es importante para que cuando alguien desee utilizar este material para replicar las simulaciones o construir el dispositivo, tenga presente qué es o qué no es dependiente de la geometría de las componentes.

Ahora, para este trabajo, la tabla IV permite conocer la parametrización básica a utilizar para construir los algoritmos de simulación y generar las curvas de operación.

Tabla IV. **Ecuaciones paramétricas**

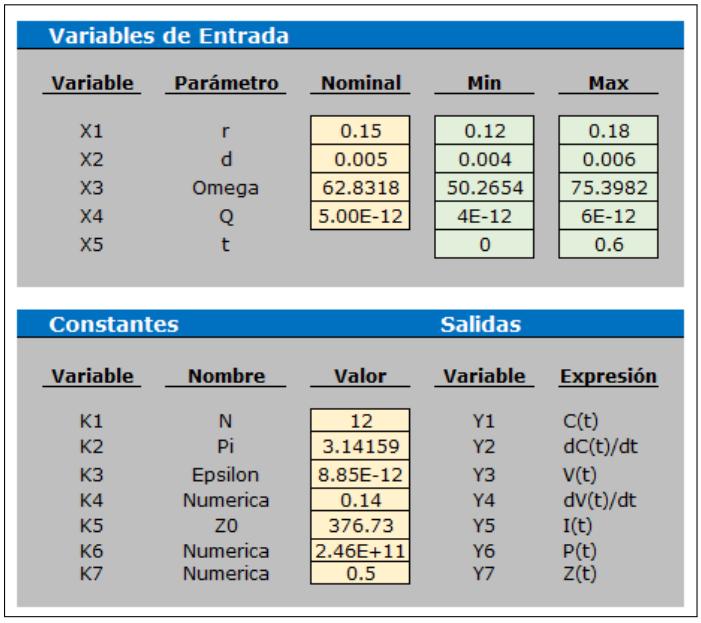
Ecuaciones paramétricas		
Y_i	$=$	$f(K_1, ..., X_1, ...)$
Y_1	$=$	$\frac{K_4 K_2 K_3 X_1^2}{K_1 X_2} Sin\left(\frac{X_3}{K_1} X_5\right)$
Y_2	$=$	$\frac{K_4 K_2 K_3 X_1^2 X_3}{K_1^2 X_2} Cos\left(\frac{X_3}{K_1} X_5\right)$
Y_3	$=$	$\left(\frac{K_6 X_4 X_3 X_2}{X_1^2}\right)^{X_5}$
Y_4	$=$	$\left(\frac{K_6 X_4 X_3 X_2}{X_1^2}\right)^{X_5} Ln\left[\frac{K_6 X_4 X_3 X_2}{X_1^2}\right]$
Y_5	$=$	$\frac{Y_3}{K_5}$
Y_6	$=$	$K_7 Y_3^2 Y_2 + Y_3 Y_1 Y_4$
Y_7	$=$	$\frac{1}{X_3 Y_1}$

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

3.2.2. Paso 2: generando variables aleatorias

La clave para utilizar el método de Monte Carlo para simulaciones es la de generar un conjunto de variables de entrada aleatorias. Así como con cualquier metodología de simulación y modelado, conviene recordar el principio de que el ruido que se alimente al modelo es el ruido que sale del mismo aplica en este caso. De lo anterior deriva la importancia de seleccionar la mejor distribución estadística para el cálculo de las variables aleatorias que alimetarán el modelo que se implementó en la hoja de cálculo. Para este trabajo se van a representar las cinco variables de entrada principales por medio de una distribución aleatoria uniforme.

Figura 30. **Cálculo de variables aleatorias**



Variables de Entrada

Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.004	0.006
X3	Omega	62.8318	50.2654	75.3982
X4	Q	5.00E-12	4E-12	6E-12
X5	t		0	0.6

Constantes

Variable	Nombre	Valor
K1	N	12
K2	Pi	3.14159
K3	Epsilon	8.85E-12
K4	Numerica	0.14
K5	Z0	376.73
K6	Numerica	2.46E+11
K7	Numerica	0.5

Salidas

Variable	Expresión
Y1	C(t)
Y2	dC(t)/dt
Y3	V(t)
Y4	dV(t)/dt
Y5	I(t)
Y6	P(t)
Y7	Z(t)

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

En la figura 30 se aprecia que se utilizan rangos de valores mínimos y máximos para indicar la incerteza de las variables X_i. Para generar los números aleatorios dentro de este rango se pueden utilizar las siguientes fórmulas en la hoja de cálculo:

Distribución uniforme

```
= min + RAND()*(max−min)
```

Distribución normal (gaussiana)

```
=NORM.INV(RAND(),mean,standard_dev)
```

Distribución logaritmica-normal

```
=LOGNORM.INV(RAND(),meanlog,sdlog)
```

Distribución de Weibull

```
=c*(−LN(1−RAND()))^(1/m)
```

Distribución beta

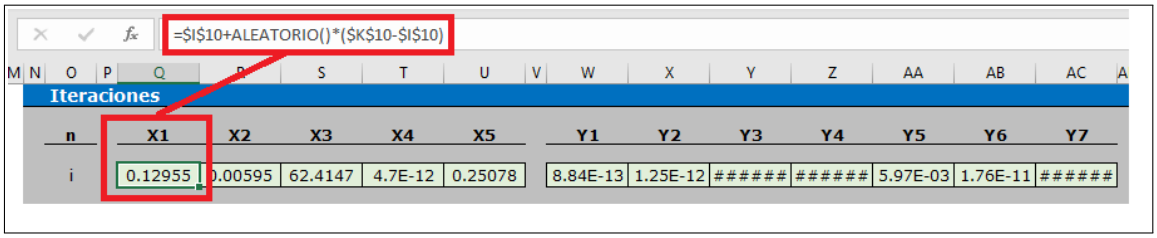
```
=BETA.INV(RAND(),alpha,beta,A,B)
```

Esta última se utiliza cuando las variables tienen cotas finitas (A, B). Usa dos parámetros α, β. Cuando ambos son iguales a la unidad (1) equivalen a la distribución uniforme; cuando ambos equivalen a dos (2) se obtiene una distribución en forma de domo (que usualmente se utiliza como distribución triangular) y si ambos son iguales o mayores a cinco (5) se tiene una distribución en forma de campana. Cuando estos dos parámetros no son iguales entre sí se obtienen muchas formas sesgadas de la distribución.

3.2.3. Paso 3: evaluando cada instancia

En la figura 31 se observa el uso de las funciones de números aleatorios uniformes para el cálculo de las variables X_i.

Figura 31. **Evaluación de cada instancia**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.2.4. Paso 4: iterando el proceso

Para este modelo se realizaron 5 000 evaluaciones (tamaño de la muestra) de las ecuaciones, lo cual para simulaciones usuales se considera poco, pero es suficiente para los fines de este trabajo. Dado que el método de Monte Carlo es estocástico, si repetimos la simulación los valores van a cambiar ligeramente desde el punto de vista estadístico; sin embargo, entre más grande es la muestra menor es la diferencia entre resultados de simulaciones repetidas.

Una forma conveniente en una hoja de cálculo para organizar los datos para la simulación es la de crear una columna para cada variable, tal como se captura en la figura 32.

Se debe notar que la referencia del inicio de la fórmula corresponde al valor mínimo del modelo. Luego, para generar 5 000 entradas basta con copiar esta misma fómula en las siguientes 4 999 filas. Luego, para realizar cada iteración se repite el proceso anterior pero para las fórmulas de las salidas. Cada fila representa una evaluación unitaria del modelo. Aunque después de realizar esto aún falta el análisis estadístico es posible decir que se ha completado la simulación esencial. Tomando en cuenta que la función para generar números aleatorios es volátil (es decir, que no guarda el valor sino que se recalcula cada vez que se corre) los datos de la simulación son copiados y capturados para su posterior análisis en otra hoja de datos.

Figura 32. **Iteraciones**

Iteraciones

n	X1	X2	X3	X4	X5	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
i	0.13108	0.00472	54.367	5.3E-12	0.24829	1.06E-12	2.31E-12	2.09E+00	6.23E+00	5.56E-03	1.89E-11	1.73E+10
1	0.15516	0.00464	58.2397	4.2E-12	0.49042	1.16E-12	-5.91E-12	3.34E+00	8.24E+00	8.88E-03	-1.09E-12	1.48E+10
2	0.12272	0.00549	72.3449	5.2E-12	0.35487	7.50E-13	-2.89E-12	3.49E+00	1.23E+01	9.26E-03	1.45E-11	1.84E+10
3	0.15658	0.00481	60.0235	5.5E-12	0.11646	9.11E-13	6.92E-12	1.38E+00	3.83E+00	3.67E-03	1.14E-11	1.83E+10
4	0.14275	0.00571	68.2334	5.4E-12	0.46103	5.76E-13	-5.72E-12	4.43E+00	1.43E+01	1.17E-02	-1.96E-11	2.55E+10
5	0.15378	0.00569	54.1893	4.4E-12	0.0014	8.55E-15	6.09E-12	1.00E+00	2.65E+00	2.66E-03	3.09E-12	2.16E+12
6	0.17243	0.00425	72.0459	5.3E-12	0.16103	1.87E-12	7.74E-12	1.52E+00	3.93E+00	4.03E-03	2.01E-11	7.43E+09
7	0.12131	0.00517	61.3046	5.7E-12	0.43413	7.37E-13	-2.84E-12	4.38E+00	1.49E+01	1.16E-02	2.08E-11	2.21E+10
8	0.13272	0.00438	53.414	5.8E-12	0.06973	3.98E-13	5.53E-12	1.23E+00	3.60E+00	3.26E-03	5.92E-12	4.70E+10
9	0.14813	0.00406	54.3467	5.6E-12	0.51044	1.29E-12	-5.36E-12	3.82E+00	1.01E+01	1.02E-02	1.05E-11	1.42E+10
10	0.15149	0.00445	57.9578	4.2E-12	0.18206	1.29E-12	5.15E-12	1.56E+00	3.82E+00	4.15E-03	1.40E-11	1.34E+10
11	0.15696	0.00526	53.6334	4.5E-12	0.1152	7.48E-13	5.91E-12	1.34E+00	3.39E+00	3.55E-03	8.69E-12	2.49E+10
12	0.15196	0.00447	69.9905	6E-12	0.54555	-6.77E-14	-9.78E-12	5.11E+00	1.53E+01	1.36E-02	-1.33E-10	-2.11E+11
4986	0.12049	0.00454	63.4352	5E-12	0.39338	9.07E-13	-2.67E-12	3.51E+00	1.12E+01	9.32E-03	1.92E-11	1.74E+10
4987	0.15615	0.00579	68.4961	4.8E-12	0.56748	-1.33E-13	-7.76E-12	5.38E+00	1.59E+01	1.43E-02	-1.24E-10	-1.10E+11
4988	0.15212	0.00407	63.5457	4.7E-12	0.09703	9.06E-13	8.50E-12	1.28E+00	3.27E+00	3.40E-03	1.08E-11	1.74E+10
4989	0.13404	0.00447	69.7995	6E-12	0.28475	1.30E-12	-6.48E-13	2.52E+00	8.16E+00	6.68E-03	2.46E-11	1.10E+10
4990	0.17149	0.00417	59.8465	6E-12	0.09393	1.03E-12	1.02E-11	1.27E+00	3.20E+00	3.36E-03	1.24E-11	1.62E+10
4991	0.12027	0.0043	53.8173	5.9E-12	0.35455	1.09E-12	-9.43E-14	3.05E+00	9.57E+00	8.09E-03	3.14E-11	1.70E+10
4992	0.16814	0.00512	66.0647	4.1E-12	0.38624	1.52E-12	-5.20E-12	2.63E+00	6.56E+00	6.97E-03	8.30E-12	9.95E+09
4993	0.16662	0.00419	74.599	5.9E-12	0.28203	2.11E-12	-2.42E-12	2.20E+00	6.12E+00	5.83E-03	2.26E-11	6.34E+09
4994	0.14557	0.00574	55.8955	5.6E-12	0.36708	1.19E-12	-7.73E-13	3.06E+00	9.30E+00	8.11E-03	3.01E-11	1.51E+10
4995	0.16948	0.00449	67.9642	4.5E-12	0.32489	2.00E-12	-3.13E-12	2.24E+00	5.53E+00	5.93E-03	1.69E-11	7.35E+09
4996	0.15457	0.00572	73.9763	5.2E-12	0.41389	7.54E-13	-6.94E-12	3.64E+00	1.14E+01	9.66E-03	-1.48E-11	1.79E+10
4997	0.15154	0.00451	70.8184	5.8E-12	0.03544	3.43E-13	9.54E-12	1.11E+00	3.31E+00	2.95E-03	7.16E-12	4.12E+10
4998	0.16726	0.00561	60.8168	4.5E-12	0.17785	1.27E-12	5.09E-12	1.59E+00	4.15E+00	4.22E-03	1.48E-11	1.30E+10
4999	0.16833	0.00439	68.6416	5.9E-12	0.52195	3.26E-13	-1.18E-11	4.17E+00	1.14E+01	1.11E-02	-8.75E-11	4.47E+10
5000	0.16659	0.00516	67.417	5.2E-12	0.22553	1.67E-12	2.93E-12	1.87E+00	5.20E+00	4.97E-03	2.13E-11	8.91E+09

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

Quizás parezca una forma extraña de implementar una simulación con el método de Monte Carlo, pero si se analiza lo que ocurre cada vez que se re-calculan los datos se observa que se generan conjuntos de 5 000 variables aleatorias y estas a su vez alimentan 5 000 salidas evaluadas en dicho conjunto; es decir, la hoja de cálculo ha gestionado el proceso de iteración internamente.

3.2.5. Paso 5: análisis estadístico

El último paso es analizar los resultados para determinar la información clave del modelo. Para esto se inciará generando un diagrama de dispersión en la hoja de cálculo que nos permitirá observar gráficamente el comportamiento del conjunto de datos generado.

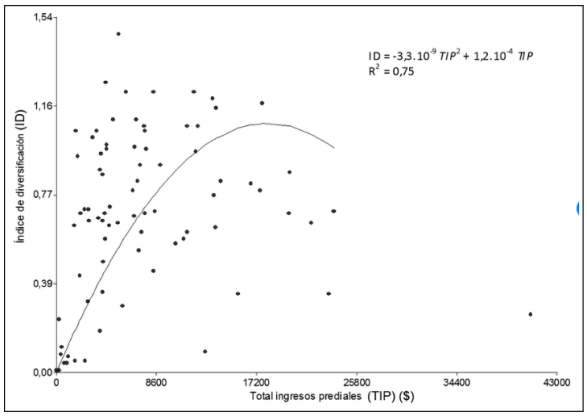
Esto permitirá a través del sistema generar curvas de ajuste con coeficientes de correlación y regresión que nos pueden indicar la naturaleza del modelo.

La correlación estadística es utilizada aquí porque tenemos dos grupos de variables continuas: t y las variables electrogmanéticas Y_i.

Necesitamos conocer la relación entre ambas al arreglarlas como pares ordenados (t_i, Y_i) en el plano cartesiano (el ya mencionado diagrama de dispersión). La finalidad de esto es examinar la dirección con su fuerza de la asociación entre las dos variables cuantitativas.

Esto se puede inferir no solo gráficamente sino también algebraicamente al calcular el coeficiente de correlación (de Pearson si es lineal, de Spearman si no lo es) lo que genera un valor r en el rango de $-1 \leq r \leq 1$, donde el signo identifica la dirección con su proximidad a cualquiera de los dos extremos su fuerza.

Figura 33. **Ejemplo de un diagrama de dispersión**



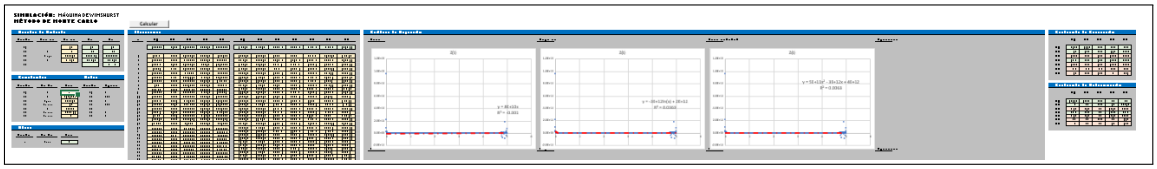
Fuente: KARLIN, Marcos. *Diagrama de dispersión y regresión cuadrática*. https://www.researchgate.net/figure/Figura-4-Diagrama-de-dispersion-y-regresion-cuadratica-de-los-Indices-de-Diversificacion _fig2 _272291498. Consulta: junio de 2019.

Luego de esta parte, sigue el análisis de regresión estadística, que explica cómo es la relación entre las dos variables y saber si las curvas de ajuste permiten predecir valores de Y_i para cualquier valor válido de t_i. Cuando la relación es fuerte, el coeficiente de determinación R^2 que varía en el intervalo $0 \leq R^2 \leq 1$ se aproxima más a 1, lo que nos indica que el grado en que la curva de regresión (curva de ajuste) se acerca a los valores reales que se define como el porcentaje de variabilidad total de Y_i respecto a t_i, dicho de otra manera, la sensibilidad. Esto será extensible a las variables aleatorias X_i en el capítulo 4. Se puede decir, entonces, que la variable t_i representa $R^2 \times 100\,\%$ de la variabilidad de Y_i. Existen varios tipos de regresión y, en el caso de las hojas de cálculo, nos permite ver los resultados de las curvas de regresión lineales, logarítmicas, exponenciales o polinomiales. En al simulación se generarán todas estas opciones para selecionar la que posea un coeficiente de determinación más alto.

3.3. Implementación en una hoja de cálculo

Para la simulación se generó una hoja de cálculos en Microsoft Excel con el fin de realizar los cálculos aleatorios y análisis estadísticos en un solo documento. En la figura 34 se puede apreciar una vista del mismo.

Figura 34. **Hoja de cálculos**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1. Funcionalidades y uso

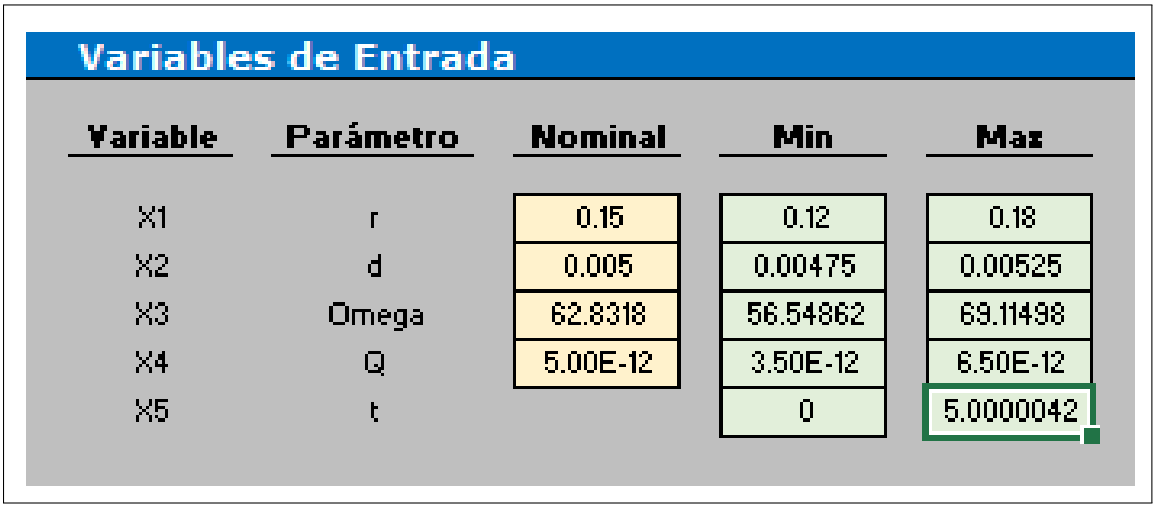
La hoja de cálculo se encuentra dividida en 7 secciones distintas:

- Variables de entrada
- Constantes y salidas
- Otros
- Iteraciones
- Diagramas de dispersión
- Coeficientes de correlación
- Coeficientes de determinación

3.3.1.1. Variables de entrada

En la figura 35 se enumeran las variables principales, se colocan sus valores nominales y se calculan sus intervalos de variabilidad. Estos intervalos se ajustan manualmente una vez para luego ser llamados por las demás funciones.

Figura 35. **Sección de variables**



Variables de Entrada

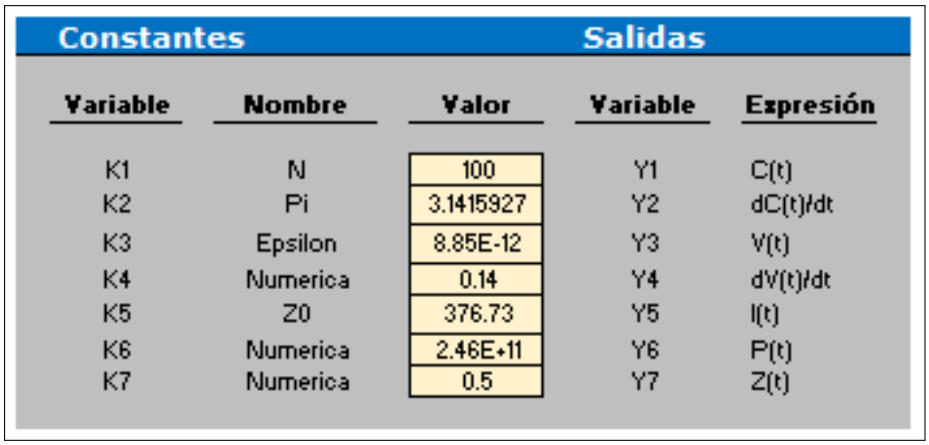
Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.00475	0.00525
X3	Omega	62.8318	56.54862	69.11498
X4	Q	5.00E-12	3.50E-12	6.50E-12
X5	t		0	5.0000042

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.2. Constantes y salidas

Las constantes y salidas se pueden observar enumeradas con sus valores en la figura 36. Esta sección es utilizada para llamar a las constantes desde las demás funciones, así como para dar títulos a los diagramas de dispersión.

Figura 36. **Sección constantes y salidas**



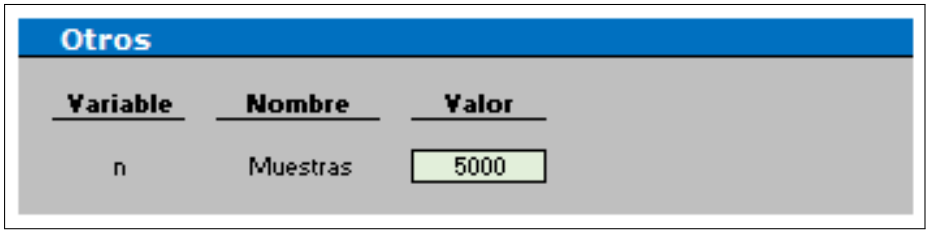
Constantes			Salidas	
Variable	**Nombre**	**Valor**	**Variable**	**Expresión**
K1	N	100	Y1	C(t)
K2	Pi	3.1415927	Y2	dC(t)/dt
K3	Epsilon	8.85E-12	Y3	V(t)
K4	Numerica	0.14	Y4	dV(t)/dt
K5	Z0	376.73	Y5	I(t)
K6	Numerica	2.46E+11	Y6	P(t)
K7	Numerica	0.5	Y7	Z(t)

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.3. Otros

Esta sección está reservada para desarrollos posteriores; sin embargo, como se puede apreciar en la figura 37, actualmente muestra la cantidad de iteraciones totales.

Figura 37. **Sección de otros**



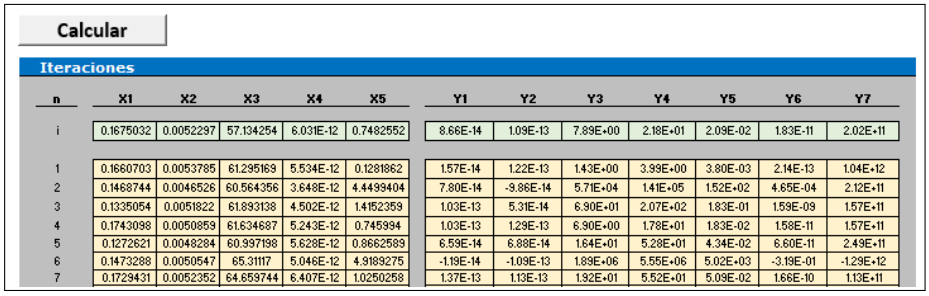
Otros		
Variable	**Nombre**	**Valor**
n	Muestras	5000

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.4. Iteraciones

El corazón de la simulación se encuentra ubicado en esta sección, donde una macro utiliza las fórmulas de evaluación unitarias. Como se ve en la figura 38, la propaga en las 5 000 filas para las iteraciones y luego, debido, a que la función unitaria es volátil, copia los valores generados para pegarlos después y que estos no cambien. El código se mostrará al final de este capítulo, el cual se ejecuta cuando se selecciona el botón 'Calcular'. Esto es necesario si se realizó algún cambio en los parámetros o simplemente si se quiere recalcular todo.

Figura 38. **Sección de iteraciones**



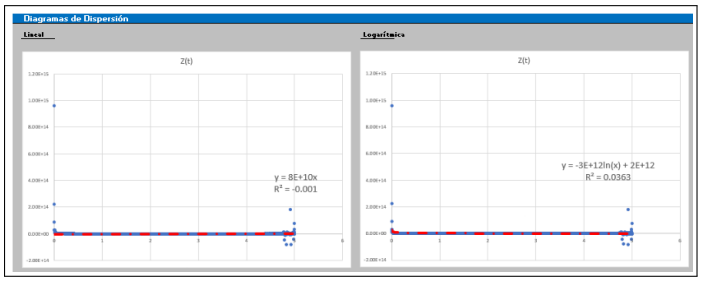
n	X1	X2	X3	X4	X5	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
i	0.1675032	0.0052297	57.134254	6.031E-12	0.7482552	8.66E-14	1.09E-13	7.89E+00	2.18E+01	2.09E-02	1.83E-11	2.02E+11
1	0.1660703	0.0053785	61.295169	5.534E-12	0.1281862	1.57E-14	1.22E-13	1.43E+00	3.99E+00	3.80E-03	2.14E-13	1.04E+12
2	0.1468744	0.0046526	60.564356	3.648E-12	4.4499404	7.80E-14	-9.86E-14	5.71E+04	1.41E+05	1.52E+02	4.65E-04	2.12E+11
3	0.1335054	0.0051822	61.893138	4.502E-12	1.4152359	1.03E-13	5.31E-14	6.90E+01	2.07E+02	1.83E-01	1.59E-09	1.57E+11
4	0.1743098	0.0050859	61.634687	5.243E-12	0.745994	1.03E-13	1.29E-13	6.90E+00	1.78E+01	1.83E-02	1.58E-11	1.57E+11
5	0.1272621	0.0048284	60.997198	5.628E-12	0.8662589	6.59E-14	6.88E-14	1.64E+01	5.28E+01	4.34E-02	6.60E-11	2.49E+11
6	0.1473288	0.0050547	65.31117	5.046E-12	4.9189275	-1.19E-14	-1.09E-13	1.89E+06	5.55E+06	5.02E+03	-3.19E-01	-1.29E+12
7	0.1729431	0.0052352	64.659744	6.407E-12	1.0250258	1.37E-13	1.13E-13	1.92E+01	5.52E+01	5.09E-02	1.66E-10	1.13E+11

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.5. Diagramas de dispersión

Las curvas de operación estimadas, sus ecuaciones, su coeficiente de determinación y su representación visual se muestran en esta parte, como se aprecia en la figura 39 También se muestran todas las opciones disponibles en la hoja de cálculo para seleccionar la distribución que genere un coeficiente de determinación más fuerte.

Figura 39. **Sección de diagramas**



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.6. Coeficientes de correlación

En la figura 40 se calculan los coeficientes de correlación entre todas las variables. Se resaltan en color distinto aquellas de mayor interés. Estas permitirán realizar el análisis de sensibilidad en el capítulo 4 de este trabajo.

Figura 40. **Sección de coeficientes de correlación**

Coeficientes de Correlación

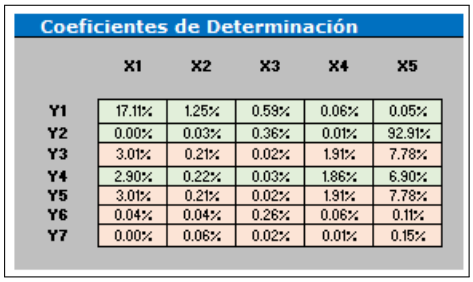
	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	0.4136	-0.1119	-0.0766	-0.0235	-0.0233
Y2	-0.0016	0.0179	-0.0599	-0.0116	-0.9639
Y3	-0.1734	0.0457	0.0156	0.1383	0.2789
Y4	-0.1703	0.0469	0.0159	0.1363	0.2628
Y5	-0.1734	0.0457	0.0156	0.1383	0.2789
Y6	0.0202	-0.0207	-0.0507	-0.0242	-0.0334
Y7	0.0017	0.0242	-0.0126	0.0080	-0.0391

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.1.7. Coeficientes de determinación

Aquí en la figura 41 se calculan los coeficientes de determinación entre todas las variables. Se resaltan en color distinto aquellas de mayor interés. Estas permitirán realizar el análisis de sensibilidad en el capítulo 4 de este trabajo.

Figura 41. **Sección de coeficientes de determinación**



Coeficientes de Determinación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	17.11%	1.25%	0.59%	0.06%	0.05%
Y2	0.00%	0.03%	0.36%	0.01%	92.91%
Y3	3.01%	0.21%	0.02%	1.91%	7.78%
Y4	2.90%	0.22%	0.03%	1.86%	6.90%
Y5	3.01%	0.21%	0.02%	1.91%	7.78%
Y6	0.04%	0.04%	0.26%	0.06%	0.11%
Y7	0.00%	0.06%	0.02%	0.01%	0.15%

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

3.3.2. Código

Cuando se generó la primera versión de la hoja de cálculo se presentaron algunos inconvenientes a la hora de tratar de capturar los diagramas y valores, debido a la volatilidad de las funciones utilizadas así como el trabajo pesado que se le daba al procesador de la computadora para recalcular continuamente todos los 60 000 valores disponibles en el modelo. Estos consumen no solo memoria sino poder de procesamiento cada vez que se actualiza la hoja. Para evitarlo, se diseñó un código que calcula las 60 000 celdas para luego dejar estos valores fijos al pegarlos como datos evitando dejarlos como fórmulas. El código puede apreciarse en el apéndice 1.

4. ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD DE LAS VARIABLES ELECTROMAGNÉTICAS

Al concluir el desarrollo del capítulo 2 se logró obtener expresiones algebraicas que representan a las variables electromagnéticas que definen la operación en régimen dinámico de la máquina de Wimshurts.

Al utilizar las mismas en el capítulo 3 se diseñó e implementó una simulación con el método de Monte Carlo en una hoja de cálculo electrónica por medio de la cual se generaron los resultados de las curvas de operación de la máquina que serán analizados en este capítulo.

Es importante resaltar que el método de simulación utilizado es una de muestreo estadístico y, por lo tanto, los resultados tratan de emular los que se hubiesen obtenido de haber realizado multiples mediciones en un sistema real.

Para aprovechar la flexibilidad de la simulación se agregará al final de este capítulo el análisis para otras variables electromagnéticas de interés para el experimentador.

4.1. Configuración de las variables de simulación

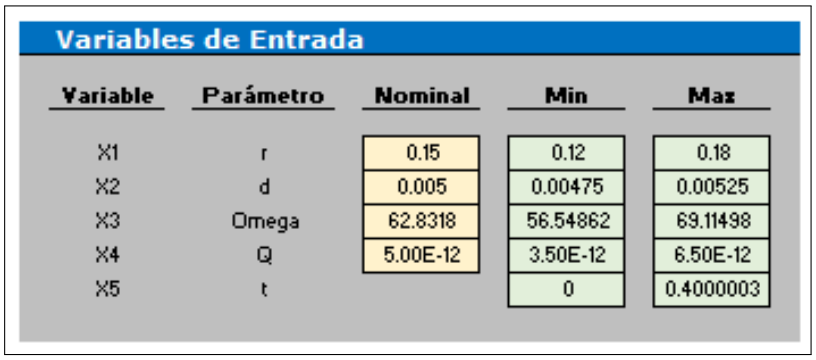
La simulación fue ejecutada para ver primero el comportamiento de las curvas aproximadas de operación y luego, para ver cómo cambian al incrementar el número de sectores en la máquina de Wimshurst.

Si bien las variables son en general las mismas para todas las simulaciones en el caso de $X_5 = t_i$ sabemos que cada ciclo de variación de la capacitancia ocurre en el intervalo de $0 \leq t_i \leq \frac{N\pi}{\omega}$ esto hace que cada simulación tenga un distinto periodo cubierto en el eje horizontal.

4.1.1. Ciclo para 8 sectores

En la figura 42 se puede observar que cuando $N = 8$ y con una ω equivalente a diez revoluciones por segundo, el tiempo de cada ciclo es de $0,4$ segundos, aproximadamente.

Figura 42. **Configuración de las variables para $N = 8$**



Variables de Entrada

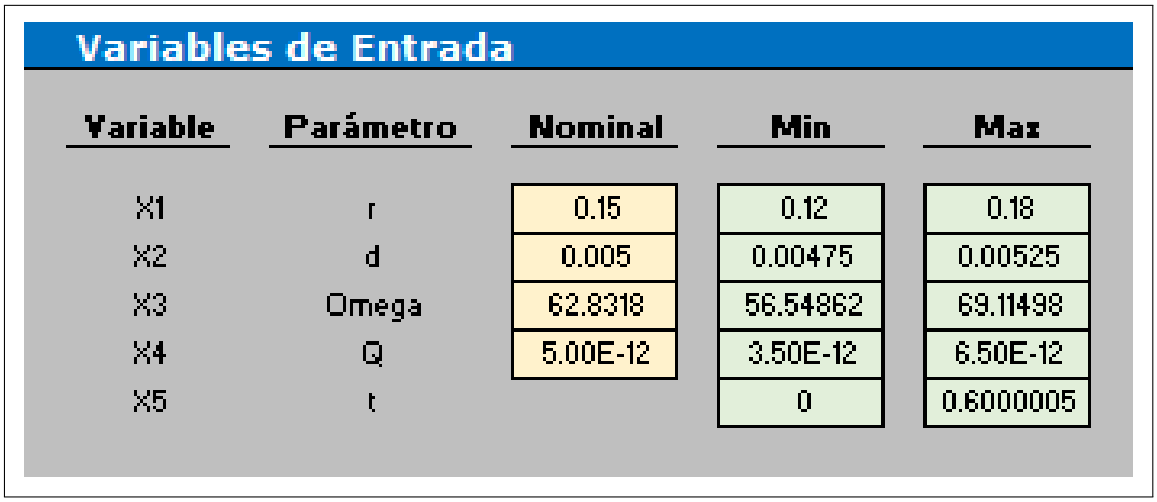
Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.00475	0.00525
X3	Omega	62.8318	56.54862	69.11498
X4	Q	5.00E-12	3.50E-12	6.50E-12
X5	t		0	0.4000003

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.1.2. Ciclo para doce sectores

Al incrementar la cantidad de sectores a $N = 12$ en la figura 43 se puede comprobar que el tiempo de cada ciclo cuando es de $0,6$ segundos aproximadamente, se incrementa.

Figura 43. **Configuración de las variables para $N = 12$**



Variables de Entrada

Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.00475	0.00525
X3	Omega	62.8318	56.54862	69.11498
X4	Q	5.00E-12	3.50E-12	6.50E-12
X5	t		0	0.6000005

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.1.3. Ciclo para cien sectores

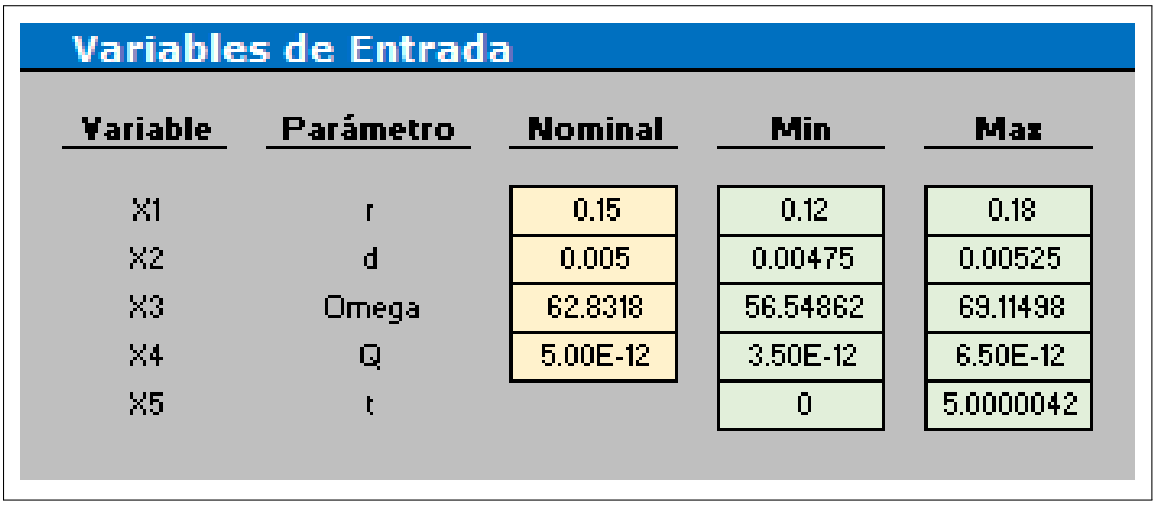
Si bien no podemos hacer un cálculo con infinitos sectores en este momento (lo cual sería equivalente a un disco de un solo sector o una placa continua o de ninguno a la vez, según la perspectiva aplicada) sí podemos seleccionar un número muy alto.

Al principio se consideró utilizar $N = 500$ y $N = 1\,000$ pero los resultados de la simulación se veían comprometidos por las limitaciones de la hoja de cálculo. Después de algunos intentos de prueba y error, se encontró que con $N = 100$ los efectos de que $N \to \infty$ se pueden inferir o calcular con la simulación de Monte Carlo.

4.1.4. Análisis de resultados

En la figura 44 se puede comprobar que el tiempo de cada ciclo con este valor de N, cuando es de $5,0$ segundos aproximadamente, claramente indica que conforme se agregan más sectores cada ciclo es más largo y se necesita incrementar proporcionalmente ω para compensarlo.

Figura 44. **Configuración de las variables para $N = 100$**



Variables de Entrada

Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.00475	0.00525
X3	Omega	62.8318	56.54862	69.11498
X4	Q	5.00E-12	3.50E-12	6.50E-12
X5	t		0	5.0000042

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.2. Curvas de operación para la impedancia

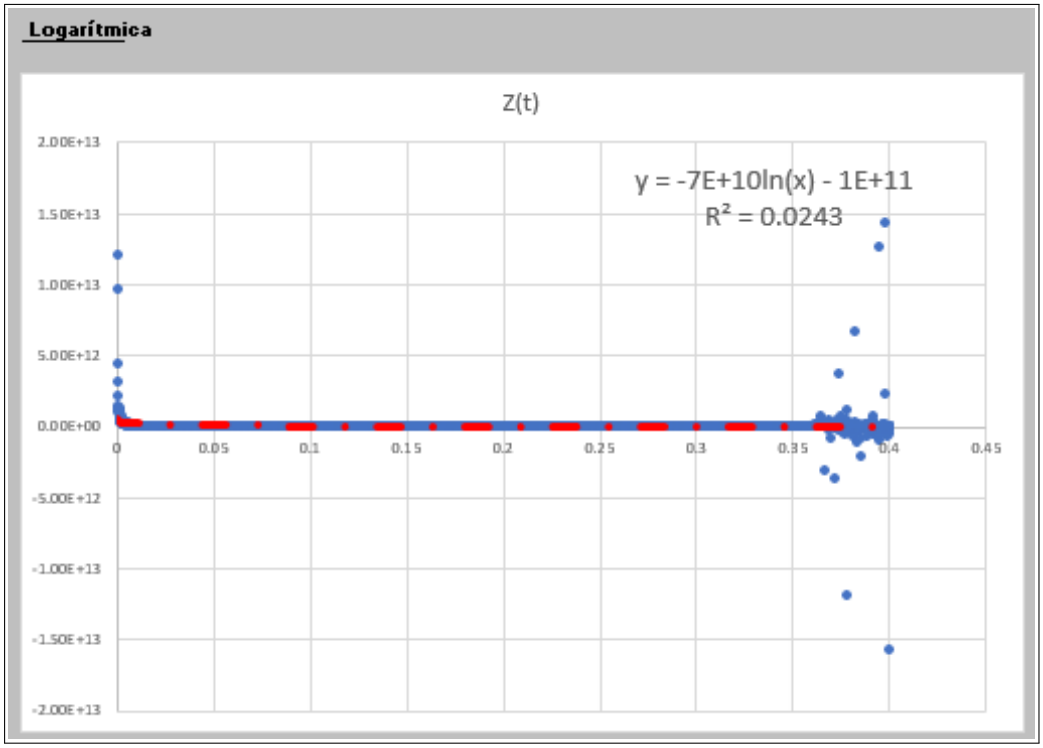
Para la impedancia del circuito equivalente $Z(t)$ se hace uso del valor de la capacitancia $C(t)$ y de la velocidad angular del sistema ω.

Asumiendo que como no se tiene un comportamiento senoidal se puede suponer que la periodicidad eléctrica del sistema equivale a la periodicidad del sistema mecánico. La impedancia entonces es $Z(t) = \frac{1}{\omega C(t)}$.

4.2.1. Curva para 8 sectores

Se puede observar en la figura 45 que para la mayoría del ciclo cuando $N = 8$ la misma se comporta de forma estable casi lineal. Al incio del ciclo tiene un comportamiento logarítmico y al final del ciclo, caótico.

Figura 45. **Curva de impedancia para** $N = 8$

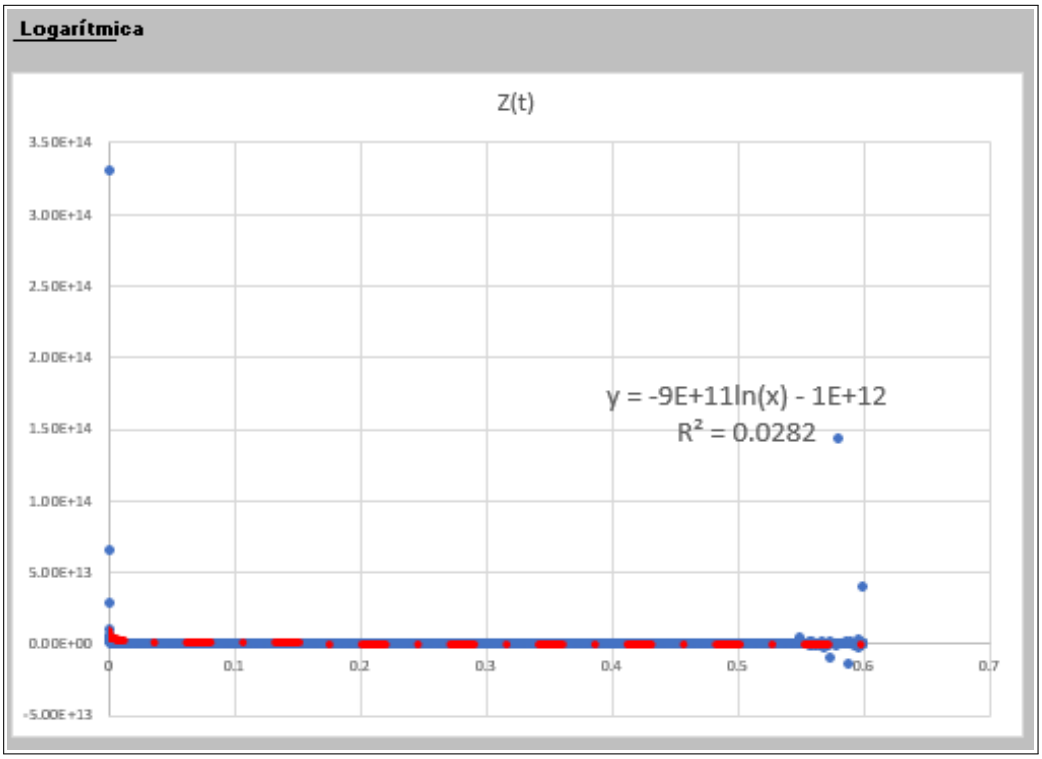


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.2.2. Curva para doce sectores

Al incrementar los sectores a $N = 12$ la figura 46 nos muestra que se mantiene el mismo comportamiento de cuando $N = 8$, pero su constante de proporcionalidad se incrementa en por lo menos un orden de magnitud, es decir, que la impedancia se incrementa.

Figura 46. **Curva de impedancia para** $N = 12$

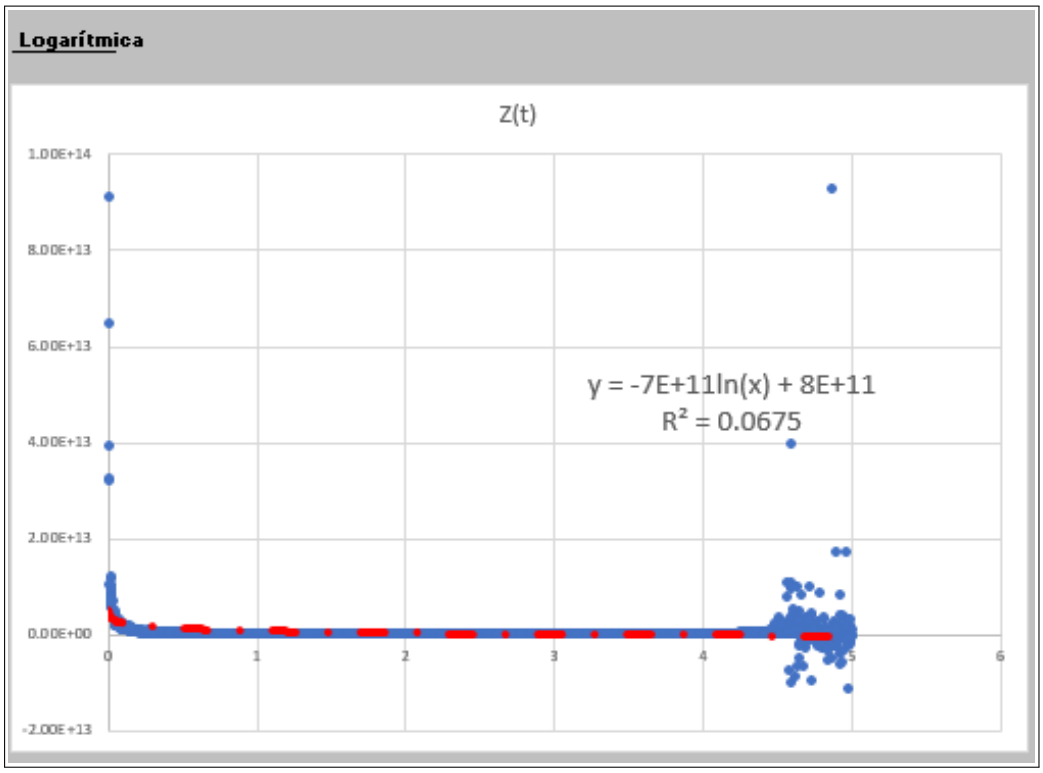


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.2.3. Curva para cien sectores

Se observa que cuando la cantidad de sectores se incrementa considerablemente, como en este caso a $N = 100$, la figura 47 permite observar que se mantiene el mismo comportamiento de cuando $N = 8$ y $N = 12$ pero su constante de proporcionalidad regresa a valores similares en orden de magnitud a los de la primera medición.

Figura 47. **Curva de impedancia para** $N = 100$



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.2.4. Análisis de resultados

De las figuras 45, 46 y 47 podemos inferir que el comportamiento de la impedancia tiene el mismo patrón independientemente de la cantidad de sectores. También se infiere que su constante de proporcionalidad (o magnitud) fluctúa en uno o dos órdenes de magnitud, pero se mantiene dentro de rangos estables.

Es muy interesante también notar que al inicio del ciclo la impedancia es muy alta pero luego disminuye muy rápidamente a los valores estables y luego, al final del ciclo, la misma adquiere un comportamiento no lineal de valores no tan elevados pero sí cambiantes rápidamente, posiblemente atribuibles a las reconexiones de líneas de campo eléctrico entre los sectores que se mueven o a las capacitancias parásitas o pérdidas con el ambiente por ionización del medio.

4.3. Curvas de operación para la tensión

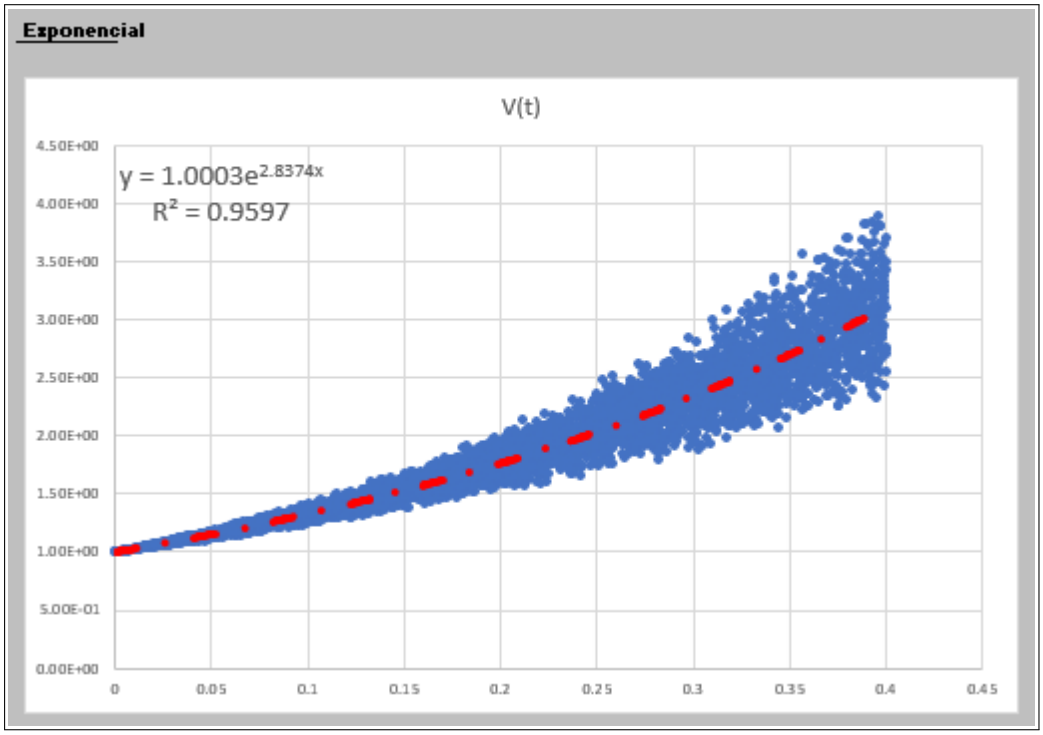
A partir del desarrollo teórico sabemos que la tensión se incrementa de forma exponencial al convertirse la energía mecánica en potencial eléctrica en cada ciclo. $V(t)$ es una función en general estable pero susceptible a factores externos, tal como se menciona en la literatura.

En esta simulación se podría asumir que el comportamiento exponencial es solo la envolvente de una familia de curvas que varían en el tiempo, probablemente con un comportamiento similar a una curva senoidal y que crece conforme pasa el tiempo. Dada la naturaleza del sistema se descarta este supuesto, porque la tensión se comporta como un proceso acumulativo y no alterno.

4.3.1. Curva para 8 sectores

En la figura 48 se puede apreciar el comportamiento exponencial de la tensión para $N = 8$. Vemos que este es un modelo muy fuerte en términos estadísticos, ya que su modelo de regresión tiene un valor de arriba del 95 %.

Figura 48. **Curva de tensión para $N = 8$**

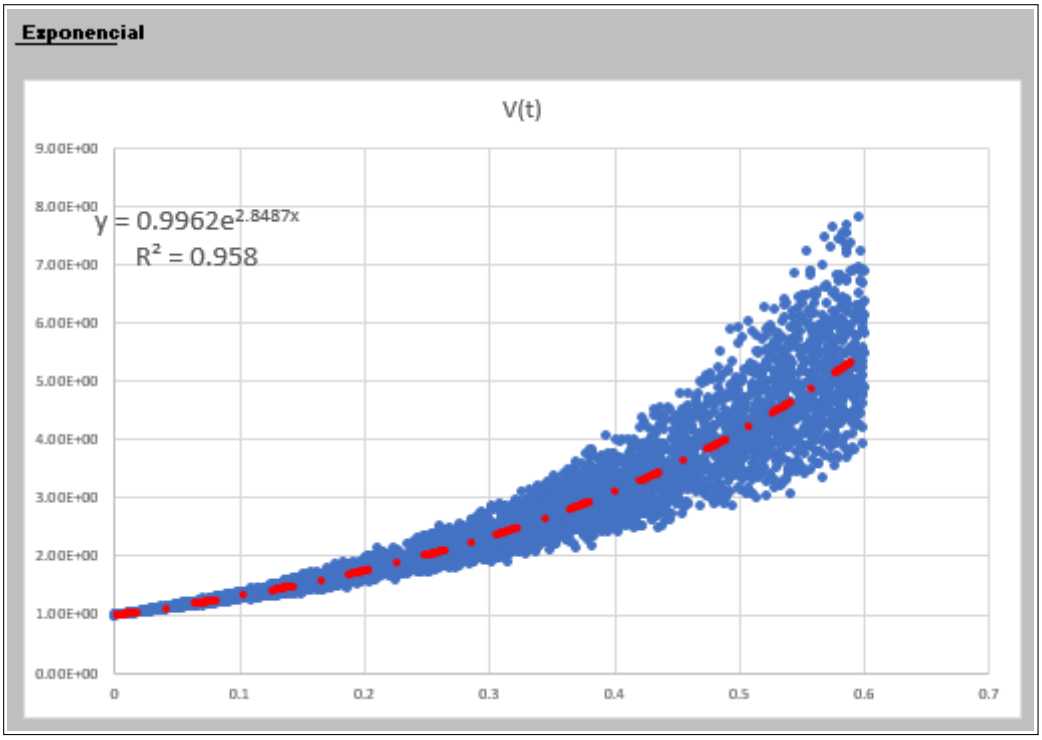


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.3.2. Curva para doce sectores

Utilizando la figura 49 donde se observa que al incrementarse la cantidad de sectores a $N = 12$ el comportamiento se mantiene igual que en el caso anterior.

Figura 49. **Curva de tensión para $N = 12$**

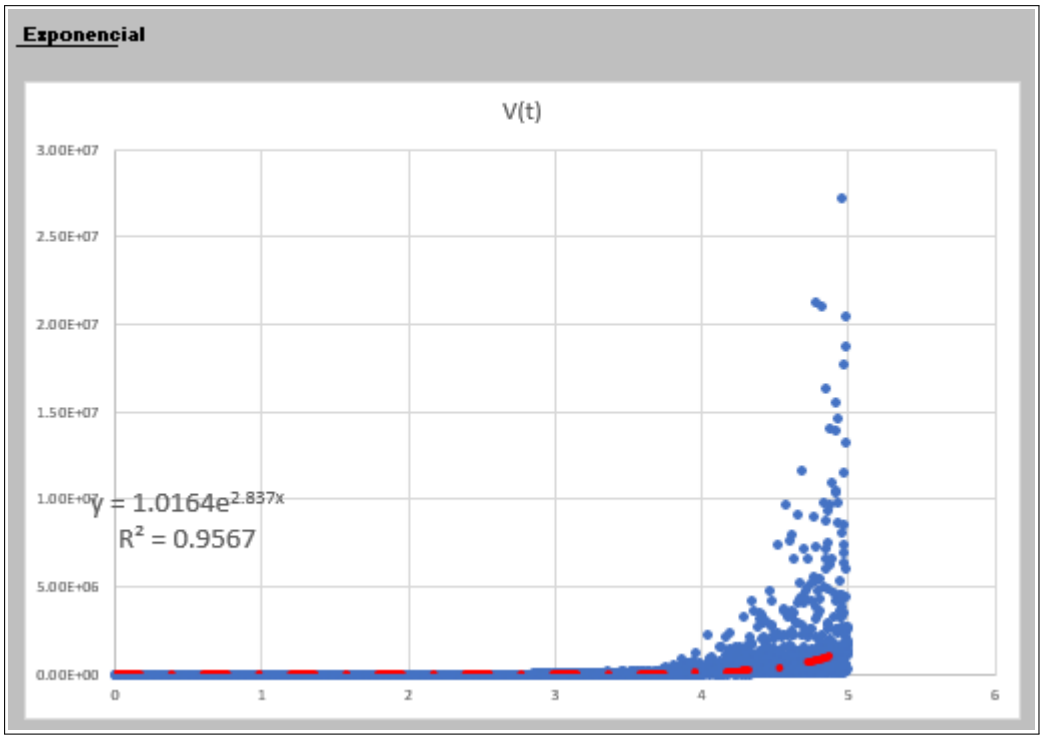


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.3.3. Curva para cien sectores

En la figura 50, cuando la cantidad de sectores es muy grande, tal como en esta iteración con $N = 100$, se evidencia que si bien el modelo exponencial se mantiene, el principal cambio es la velocidad en la que se incrementa la tensión, la cual es menor a las anteriores.

Figura 50. **Curva de tensión para** $N = 100$



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.3.4. Análisis de resultados

Es evidente que conforme la tensión se incrementa hay más variaciones, las cuales se deben principalmente a los efectos corona, a las pérdidas al ambiente y a las capacitancias parásitas. Una característica de este sistema es que se puede apreciar su estabilidad antes de llegar al final del ciclo por lo que en general es una máquina bastante eficiente en la generación de altas tensiones.

El otro aspecto clave a resaltar en los resultados es que a pesar de que al incrementarse la cantidad de sectores, si no se cambia la velocidad angular la tensión final es aproximadamente la misma (lo que se puede inferir al ver las curvas de ajuste de cada caso), pero toma más tiempo en generarse; es decir, la rapidez de entrega de tensión del sistema es directamente proporcional a la velocidad angular mecánica de la máquina de Wimshurst.

En resumen, para que dos máquinas de Wimshurst de igual composición pero distinta cantidad de sectores puedan rendir igual se deben de incrementar la velocidad en función de la cantidad de sectores que se agreguen.

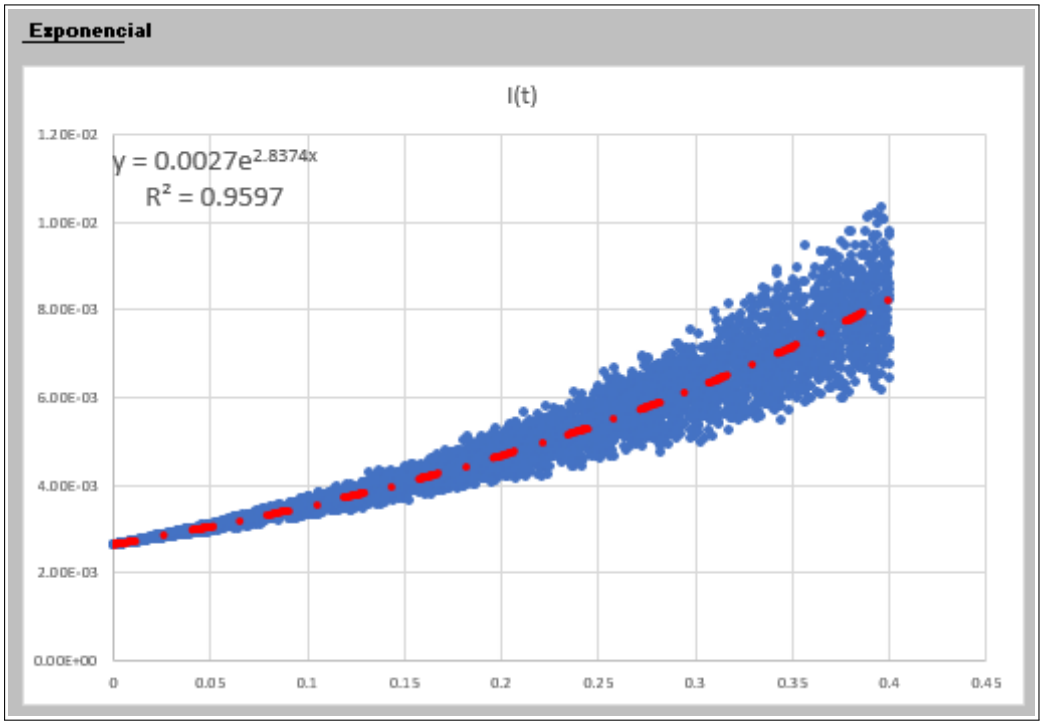
4.4. Curvas de operación para la corriente

En esta variable electromagnética solo se considera la magnitud de la corriente cuando hay una descarga entre las terminales de la máquina de Wimshurts en circuito abierto pero la tensión ha llegado al límite de ruptura dieléctrica del aire. $I(t) = \frac{V(t)}{Z_0}$ nos dice que esta corriente es directamente proporcional a la tensión por un valor constante de $\frac{1}{Z_0}$.

4.4.1. Curva para 8 sectores

En la figura 51 se observa que la corriente mantiene el mismo comportamiento que la tensión en el caso de $N = 8$. La resistencia del aire solamente atenúa la amplitud de la corriente.

Figura 51. **Curva de corriente para** $N = 8$

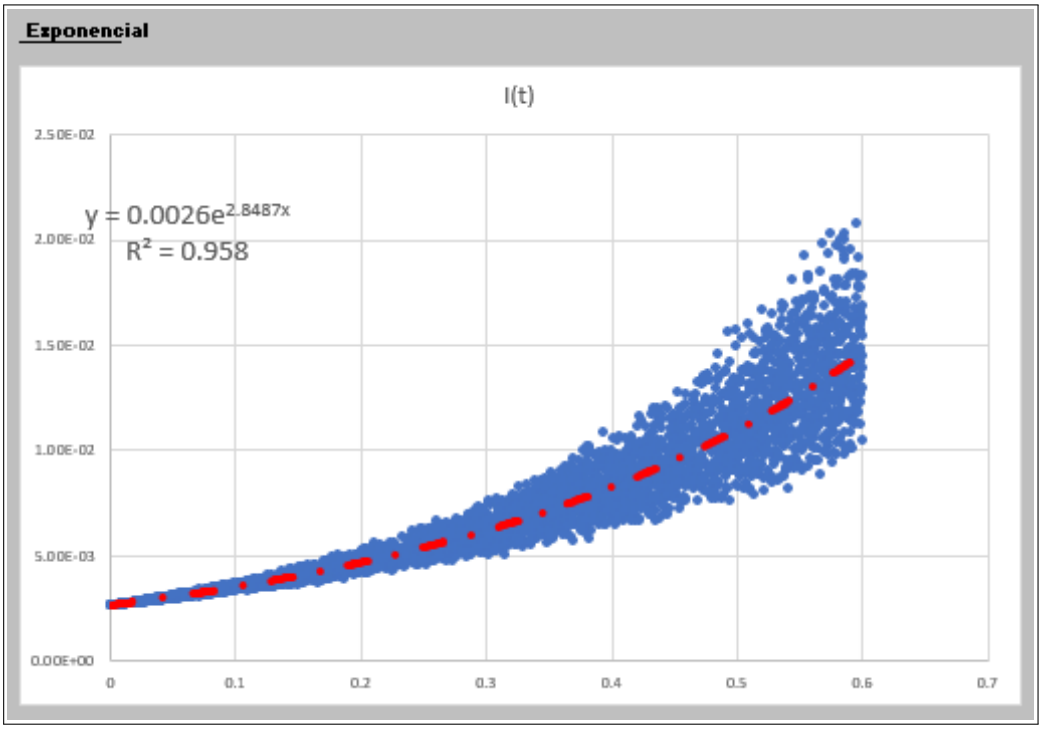


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.4.2. Curva para doce sectores

Al observar la figura 52 se puede observar el efecto de disminución en tres órdenes de magnitud de la corriente con respecto a la tensión, lo que se sigue manteniendo para el caso de $N = 12$.

Figura 52. **Curva de corriente para** $N = 12$

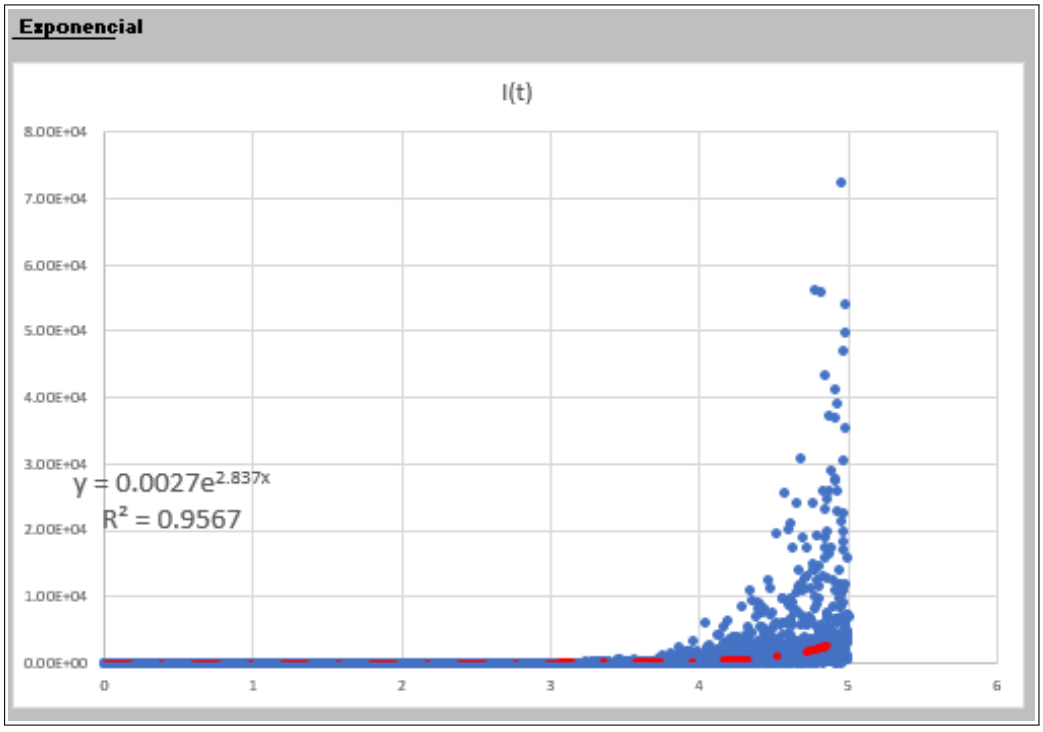


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.4.3. Curva para cien sectores

Finalmente, en la figura 53 es posible identificar que la corriente crece en conjunto con la tensión y es independiente de la cantidad de sectores, salvo por el tiempo necesario para llegar a su amplitud máxima.

Figura 53. **Curva de corriente para** $N = 100$

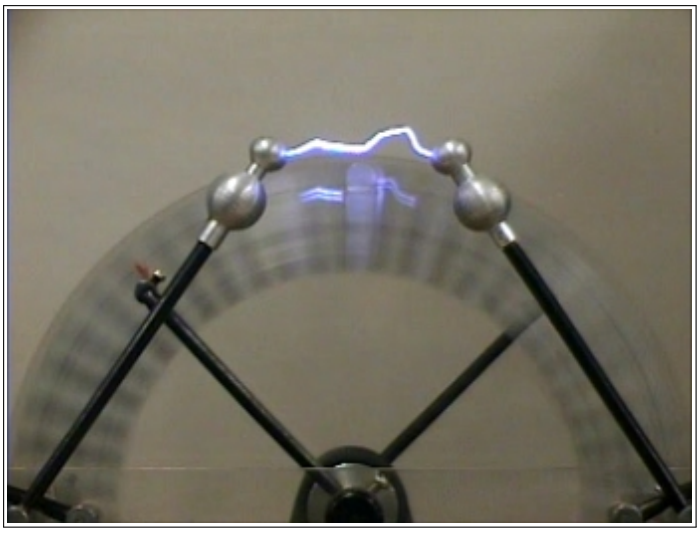


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.4.4. Análisis de resultados

Es posible inferir, entonces, que las descargas continuas al operar una máquina de Wimshusrt son posibles debido a la eficiencia de la misma en generar tensión y que, a su vez, son periódicas con cada ciclo de la máquina. Si bien la ionización del aire en los alrededores de las terminales de descarga puede afectar un poco la salida, en los diagramas de dispersión es fácil observar esto al final del ciclo, cuando la magnitud de la corriente parece ampliarse. Podría asemejarse, en algún caso, a una señal senoidal que es amplificada exponencialmente por el efecto de retroalimentación positiva del sistema al ir acumulando más energía potencial eléctrica, hasta llegar a una chispa o descarga, como se puede apreciar en la figura 54.

Figura 54. **Descarga en circuito abierto**



Fuente: PHYSICS UCSB. *Wimshurst Machine*. http://web.physics.ucsb.edu/~lecturedemonstrations/Composer/Pages/56.32.html. Consulta: agosto de 2020.

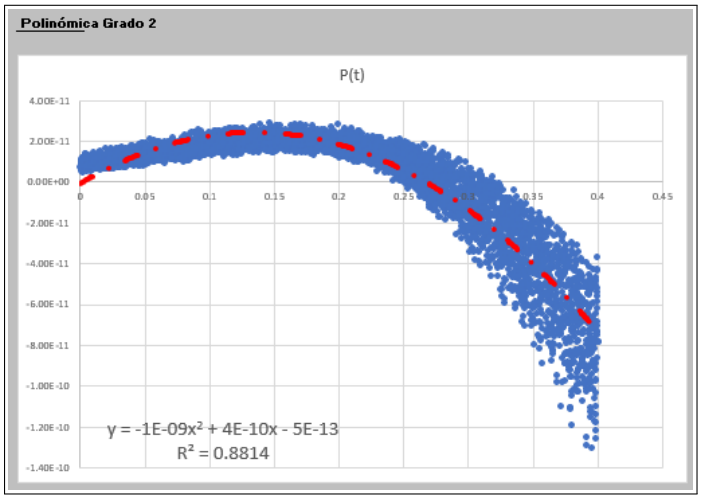
4.5. Curvas de operación para la potencia

Como se pudo determinar en el capítulo 2, la naturaleza de la potencia $P(t)$ de la máquina de Wimshurst se asemeja mucho a la de sus contrapartes electromagnéticas porque posee dos componentes: una que es la que entrega como salida y otra necesaria para mantener la máquina en funcionamiento.

4.5.1. Curva para 8 sectores

A través de la figura 55 se identifica que cuando la cantidad de sectores es $N = 8$ posee un comportamiento cuadrático o de orden polinomial superior (siempre de grado par). Es interesante notar que alrededor de los $\frac{3}{4}$ del ciclo su valor se vuelve negativo y presenta mayor dispersión.

Figura 55. **Curva de potencia para** $N = 8$



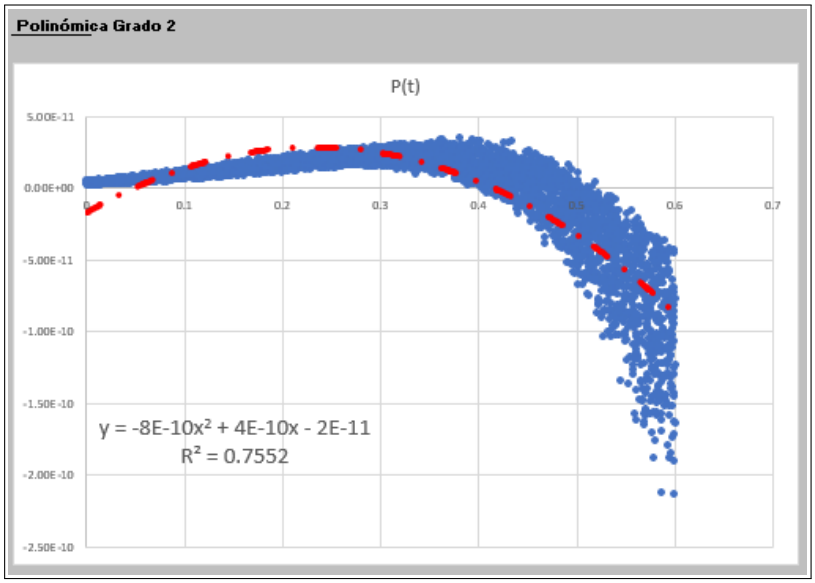
Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.5.2. Curva para doce sectores

Cuando la cantidad de sectores se incrementa a $N = 12$ se presenta un cambio de forma, si bien la aproximación polinomial de grado 2 (o superior siempre de grado par) tiene todavía una fuerza considerable como se aprecia en la figura 56 se puede también inferir que el comportamiento se linealiza en la primera mital del ciclo.

Al observar el comportamiento de la curva al acercarse al final de su ciclo podría interpretarse un comportamiento oscilatorio, probablemente un transitorio eléctrico que representa un cambio de modalidad y que se correlaciona con el incremento exponencial de la tensión.

Figura 56. **Curva de potencia para** $N = 12$

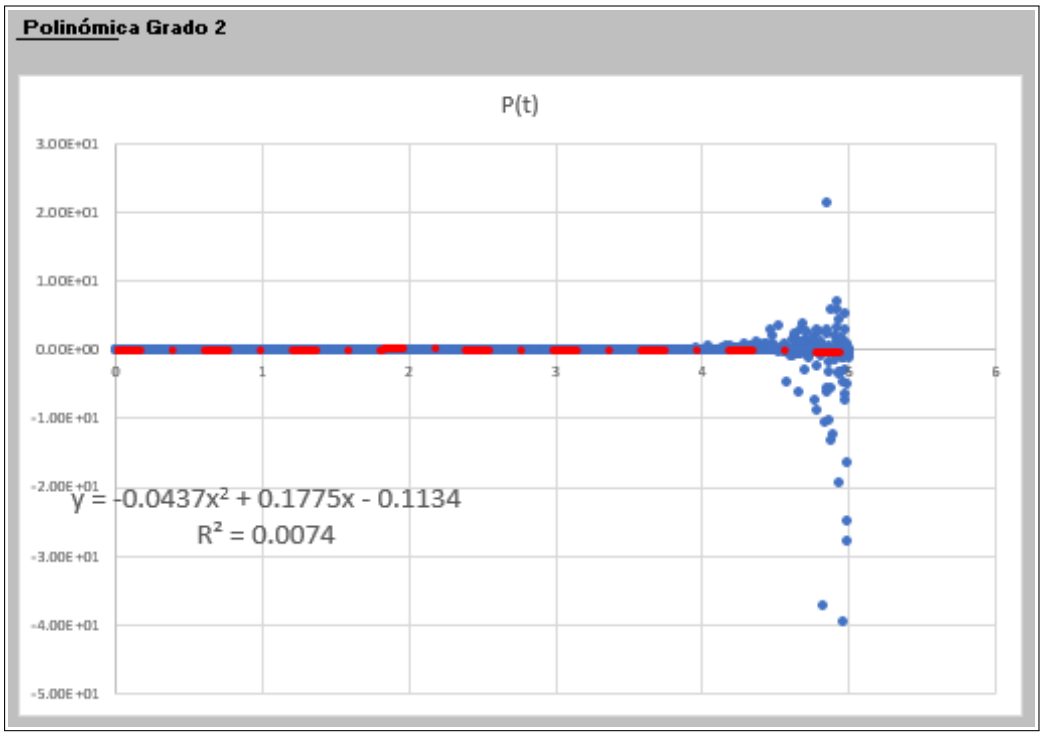


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.5.3. Curva para cien sectores

Cuando finalmente la cantidad de sectores es muy grande como en este caso de $N = 100$ se observa que en alrededor del 90 % del ciclo el comportamiento es lineal y tal como se muestra en la figura 57 se pierde la forma polinomial de la curva de ajuste. El comportamiento al final del ciclo es muy disperso pero con una tendencia muy pronunciada hacia valores negativos.

Figura 57. **Curva de potencia para** $N = 100$



Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.5.4. Análisis de resultados

Se observa que en todos los casos la potencia entregada es baja. Esto nos dice que la máquina es bastante eficiente, ya que es capaz de generar altas tensiones sin altas potencias.

Otro factor relevante es que cerca del final de cada ciclo la potencia cambia de signo, lo cual significa que la energía mecánica transformada en energía potencial eléctrica y almacenada en el campo eléctrico de la máquina es después utilizada para mantener la tensión eléctrica del sistema para crear el nuevo campo eléctrico con el siguiente sector.

Esto indica que la máquina de Wimshurst es un transductor eficiente de la energía. El hecho de que esta curva no sea simétrica es una clara referencia al efecto magnificador del sistema, ya que este desfase permite el incremento exponencial de la tensión a su salida.

4.6. Resultados estadísticos de sensibilidad

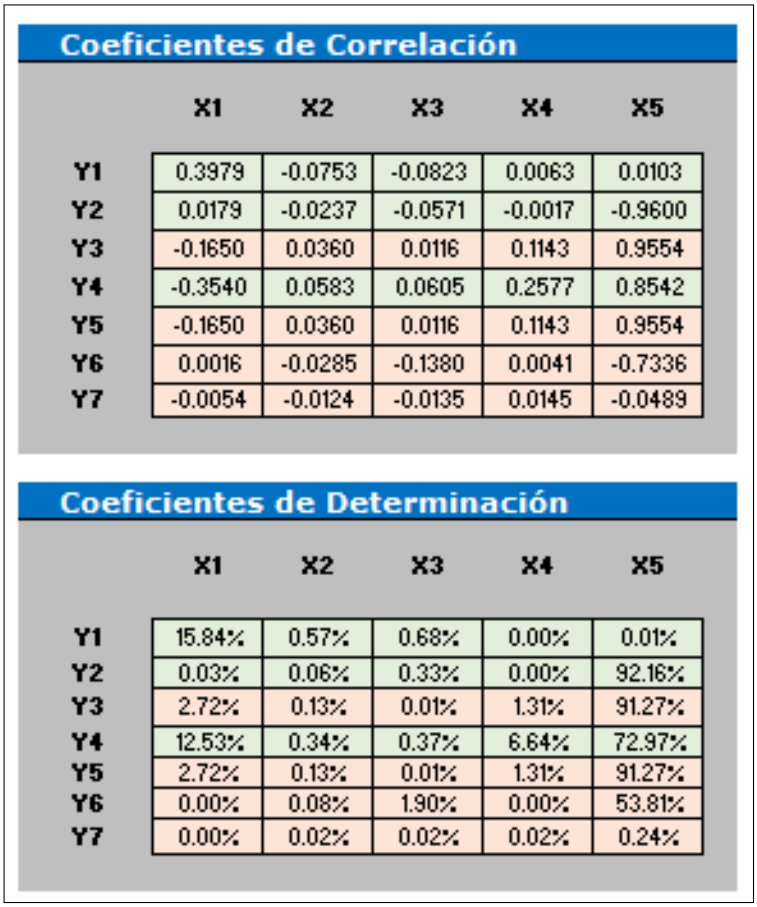
Ya se han establecido y analizado las curvas de operación de las variables electromagnéticas que definen el comportamiento de la máquina de Wimshurst.

Es necesario ahora analizar la sensibilidad de dichas variables respecto a sus variables independientes, para inferir dependencias entre otros comportamientos relevantes desde el punto de vista eléctrico.

4.6.1. Coeficientes para 8 sectores

En la figura 58 se puede observar los valores para el coeficiente de correlación entre las variables de salida y las variables independientes. Son de mayor interés los valores para las salidas Y_3, Y_5, Y_6 y Y_7, ya que corresponden a las variables que este trabajo buscaba determinar.

Figura 58. **Coeficientes para $N = 8$**



Coeficientes de Correlación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	0.3979	-0.0753	-0.0823	0.0063	0.0103
Y2	0.0179	-0.0237	-0.0571	-0.0017	-0.9600
Y3	-0.1650	0.0360	0.0116	0.1143	0.9554
Y4	-0.3540	0.0583	0.0605	0.2577	0.8542
Y5	-0.1650	0.0360	0.0116	0.1143	0.9554
Y6	0.0016	-0.0285	-0.1380	0.0041	-0.7336
Y7	-0.0054	-0.0124	-0.0135	0.0145	-0.0489

Coeficientes de Determinación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	15.84%	0.57%	0.68%	0.00%	0.01%
Y2	0.03%	0.06%	0.33%	0.00%	92.16%
Y3	2.72%	0.13%	0.01%	1.31%	91.27%
Y4	12.53%	0.34%	0.37%	6.64%	72.97%
Y5	2.72%	0.13%	0.01%	1.31%	91.27%
Y6	0.00%	0.08%	1.90%	0.00%	53.81%
Y7	0.00%	0.02%	0.02%	0.02%	0.24%

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

Es relevante que para cuando hay $N = 8$ sectores, tanto Y_3 y Y_5 se comportan positivamente respecto al tiempo pero Y_6 en menor medida. Y_7 es, al parecer, independiente del comportamiento general de las otras variables.

Por otro lado, vemos en la tabla de coeficientes de determinación que los modelos de regresión que la variable X_5 es la que más contribuye para Y_3 y Y_5 pero que en el caso de Y_6 solo contribuye la mitad de su fuerza, lo que nos indica que esta salida es dependiente de otros factores no identificados en este trabajo.

Y_7, al no tener contibución significativa de estas variables, nos permite inferir que es casi constante la mayor parte del tiempo, lo que a su vez le da estabilidad al sistema porque esta salida corresponde a su impedancia.

4.6.2. Coeficientes para doce sectores

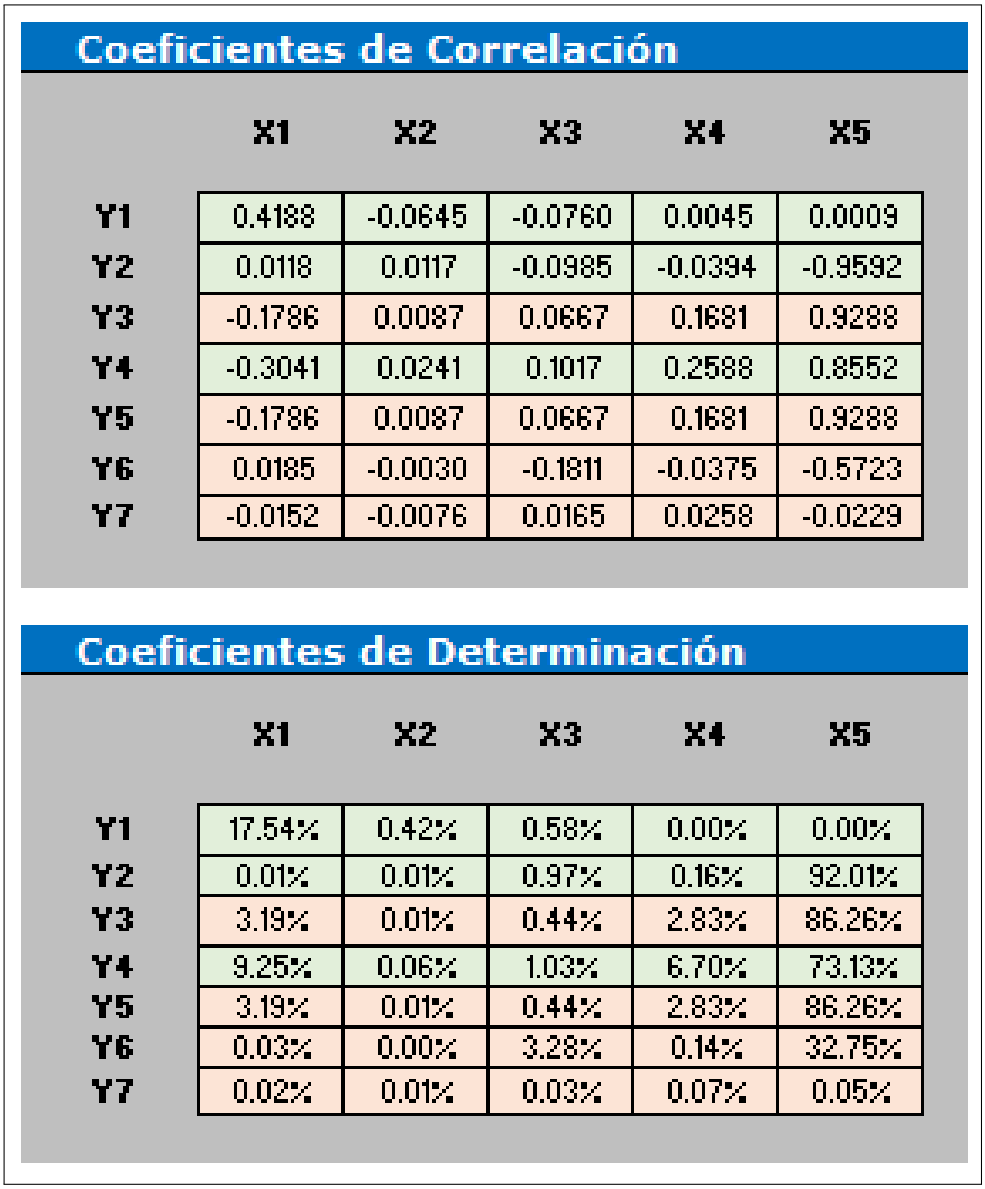
Para la figura 59 se nota que, si bien en general las relaciones de los valores para el coeficiente de correlación entre las variables de salida y las variables independientes para las salidas Y_3, Y_5, Y_6, Y_7 se mantienen similares al caso de la cantidad de sectores $N = 8$, ahora que se incrementan a $N = 12$ se observa que Y_6 ahora es opuesto al anterior. Y_7 se mantiene como en el caso anterior.

Para los coeficientes de determinación, donde los modelos de regresión indican la contribución de la variable X_5 para Y_3 y Y_5 se observa que son ahora menores, lo cual indica que al incrementarse la cantidad de sectores hay nuevos factores no identificados en este trabajo que contribuyen al proceso. En el caso de Y_6 la contribución se hace mucho menor, lo que puede interpretarse, mas no es certero, que al incrementarse la cantidad de sectores esta variable tiende a volverse constante.

Y_7 sigue sin tener una contibución significativa a estas variables, incluso con el cambio de cantidad de los sectores.

Es claro que la dependencia de las variables de entrada de esta simulación no son los únicos que aportan, y que al incrementarse la cantidad de sectores no solo el tiempo de generación de tensión cambia sino que hay otras dependencias no identificadas que afectan el desempeño del sistema.

Figura 59. **Coeficientes para** $N = 12$



Coeficientes de Correlación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	0.4188	-0.0645	-0.0760	0.0045	0.0009
Y2	0.0118	0.0117	-0.0985	-0.0394	-0.9592
Y3	-0.1786	0.0087	0.0667	0.1681	0.9288
Y4	-0.3041	0.0241	0.1017	0.2588	0.8552
Y5	-0.1786	0.0087	0.0667	0.1681	0.9288
Y6	0.0185	-0.0030	-0.1811	-0.0375	-0.5723
Y7	-0.0152	-0.0076	0.0165	0.0258	-0.0229

Coeficientes de Determinación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	17.54%	0.42%	0.58%	0.00%	0.00%
Y2	0.01%	0.01%	0.97%	0.16%	92.01%
Y3	3.19%	0.01%	0.44%	2.83%	86.26%
Y4	9.25%	0.06%	1.03%	6.70%	73.13%
Y5	3.19%	0.01%	0.44%	2.83%	86.26%
Y6	0.03%	0.00%	3.28%	0.14%	32.75%
Y7	0.02%	0.01%	0.03%	0.07%	0.05%

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

No es el objetivo de este trabajo identificar estos otros factores pero sí lo es determinar que existen. Este es el beneficio de este análisis de sensibilidad de las variables electromagnéticas de la máquina de Wimshurst.

4.6.3. Coeficientes para cien sectores

En la figura 60 se observa el caso degenerado donde la cantidad de sectores es tan grande que, en principio, el sistema o se vuelve constante o simplemente ya no depende del timepo sino de otros factores no determinados.

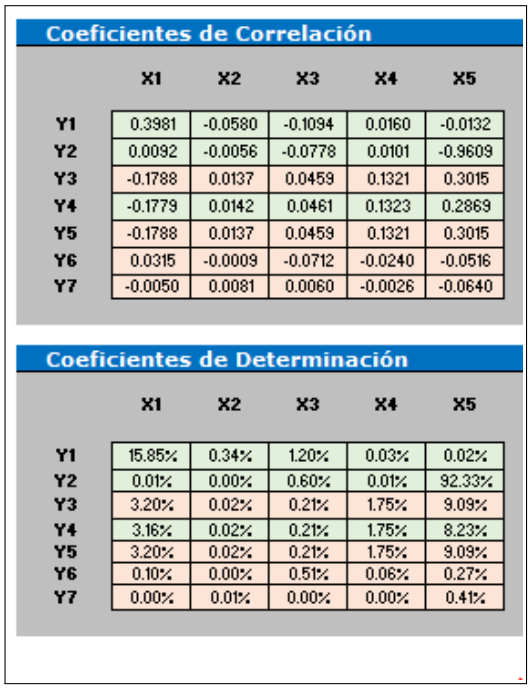
Puede que uno de los factores claves sea el de la velocidad angular, la cual si bien no muestra correlación directa como X_3, sabemos que impacta el tiempo efectivo de cada ciclo.

En general, las relaciones de los valores para el coeficiente de correlación entre las variables de salida y las variables independientes para las salidas Y_3, Y_5, Y_6, Y_7 son ahora totalmente distintas a las de los casos de la cantidad de sectores $N = 8$, $N = 12$.

Es claro que las direcciones a las que contribuyen son tan pequeñas que las direcciones indicadas por los signos son irrelevantes. Incluso en el caso de X_5, donde el valor en algunos casos es más grande que las otras variables, ya es muy cercano al cero para ser considerada de peso.

Al examinar los coeficientes de determinación se evidencia que la contribución de las variable X_i para las salidas Y_i despreciables indican que al incrementarse la cantidad de sectores hasta cantidades muy altas, se podría decir que el sistema ya no existe en función de las variables de funcionamiento nominales. Si bien puede ser un poco exagerado, al ser solo una simulación y estar bien fundamentada en los principios de las teorías electromagnéticas, nos indica que la máquina, en efecto, posee límites operativos que hay que definir (lo que no es parte de este trabajo) y que en el sentido práctico permitirían conocer las limitaciones físicas de la máquina de Wimshurst y abrir el camino al diseño de máquinas más eficientes.

Figura 60. **Coeficientes para** $N = 100$



Coeficientes de Correlación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	0.3981	-0.0580	-0.1094	0.0160	-0.0132
Y2	0.0092	-0.0056	-0.0778	0.0101	-0.9609
Y3	-0.1788	0.0137	0.0459	0.1321	0.3015
Y4	-0.1779	0.0142	0.0461	0.1323	0.2869
Y5	-0.1788	0.0137	0.0459	0.1321	0.3015
Y6	0.0315	-0.0009	-0.0712	-0.0240	-0.0516
Y7	-0.0050	0.0081	0.0060	-0.0026	-0.0640

Coeficientes de Determinación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y1	15.85%	0.34%	1.20%	0.03%	0.02%
Y2	0.01%	0.00%	0.60%	0.01%	92.33%
Y3	3.20%	0.02%	0.21%	1.75%	9.09%
Y4	3.16%	0.02%	0.21%	1.75%	8.23%
Y5	3.20%	0.02%	0.21%	1.75%	9.09%
Y6	0.10%	0.00%	0.51%	0.06%	0.27%
Y7	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.41%

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7. Otras variables interesantes

Como parte de este trabajo es necesario identificar puntos de interés para el investigador. Desde el punto de vista electrotécnico hay variables que si bien no son las que definen intrínsecamente al sistema, sí son clave para realizar otros análisis sobre el circuito equivalente. En esta sección exploramos estas variables, tal cual se muestran en las tablas V y VI.

Tabla V. **Relación de variables (Monte Carlo) extendida**

Referencias para la simulación		
Salidas	**Entradas**	**Constantes**
$Y_1 = C(t)$	$X_1 = r$	$K_1 = 8$
$Y_2 = \frac{dC(t)}{dt}$	$X_2 = d$	$K_2 = \pi$
$Y_3 = V(t)$	$X_3 = \omega$	$K_3 = \epsilon$
$Y_4 = \frac{dV(t)}{dt}$	$X_4 = Q$	$K_4 = \frac{7}{50}$
$Y_5 = I(t)$	$X_5 = t$	$K_5 = Z_0$
$Y_6 = P(t)$		$K_6 = 2,46 \times 10^{11}$
$Y_7 = Z(t)$		$K_7 = \frac{1}{2}$
$Y_8 = I_C(t) = \omega V(t) C(t) = \frac{V(t)}{Z(t)}$		$K_8 = 1 \times 10^{-9}$
$Y_9 = Z_+(t) = \frac{1}{\omega(C(t) + C_L)}$		
$Y_{10} = I_+(t) = \frac{V(t)}{Z_+(t)}$		
$Y_{11} = Z_P(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{dC(t)}{dt}}$		

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

En la literatura se puede encontrar que una jarra de Leyden de una pinta de capacidad tiene una capacitancia aproximada de $1 \times 10^{-9} F$, tal como se indica en la página 350 del libro de Magnetismo y electricidad de McKenzie. Tomando esto en cuenta con fines ilustrativos se agrega en la tabla VI, ya que fue utilizado en la simulación de las nuevas variables.

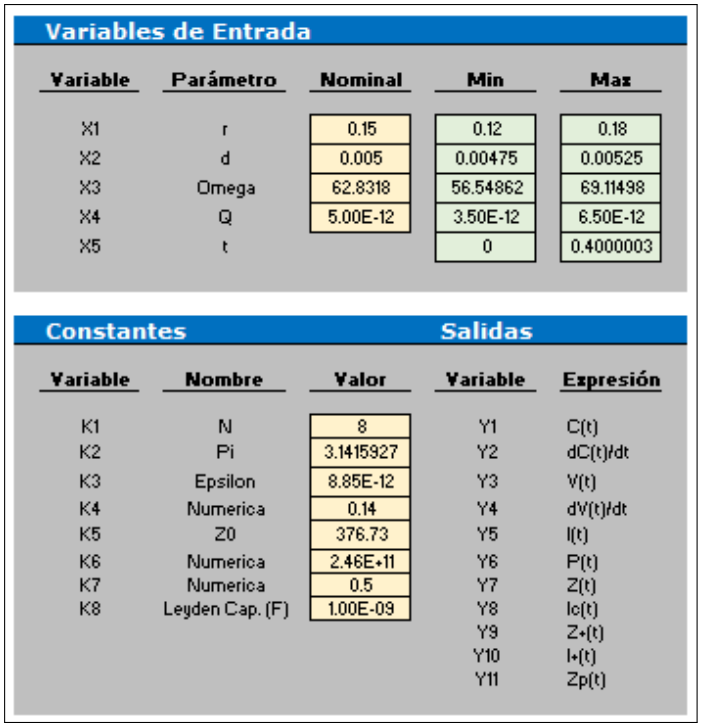
Tabla VI. **Valores experimentales extendidos**

Valores experimentales de constantes y variables		
Parámetro	**Valor(es)**	**Dimensional**
N	8, 12, 100	$-$
Z_0	376,73	Ω (Ohms)
π	3,141592654	$-$
ϵ	$8,85 \times 10^{-12}$	$\frac{F}{m}$ (Farad sobre Metro)
r	0,150	Metros
d	0,005	Metros
ω	62,8318 (~ 10 RPS)	$\frac{rad}{s}$
Q	$5,00 \times 10^{-12}$	Coloumbs
t	$0 \leq t \leq \frac{N\pi}{\omega}$	Segundos
C_L	1×10^{-9}	F

Fuente: elaboración propia, usando LaTeX.

En la figura 61 se muestran las variables utilizadas para la simulación en donde por temas de practicidad se ha decidido realizar el ejercicio solo para la cantidad de sectores de $N = 8$.

Figura 61. **Variables interesantes con $N = 8$**



Variables de Entrada

Variable	Parámetro	Nominal	Min	Max
X1	r	0.15	0.12	0.18
X2	d	0.005	0.00475	0.00525
X3	Omega	62.8318	56.54862	69.11498
X4	Q	5.00E-12	3.50E-12	6.50E-12
X5	t		0	0.4000003

Constantes

Variable	Nombre	Valor
K1	N	8
K2	Pi	3.1415927
K3	Epsilon	8.85E-12
K4	Numerica	0.14
K5	Z0	376.73
K6	Numerica	2.46E+11
K7	Numerica	0.5
K8	Leyden Cap. (F)	1.00E-09

Salidas

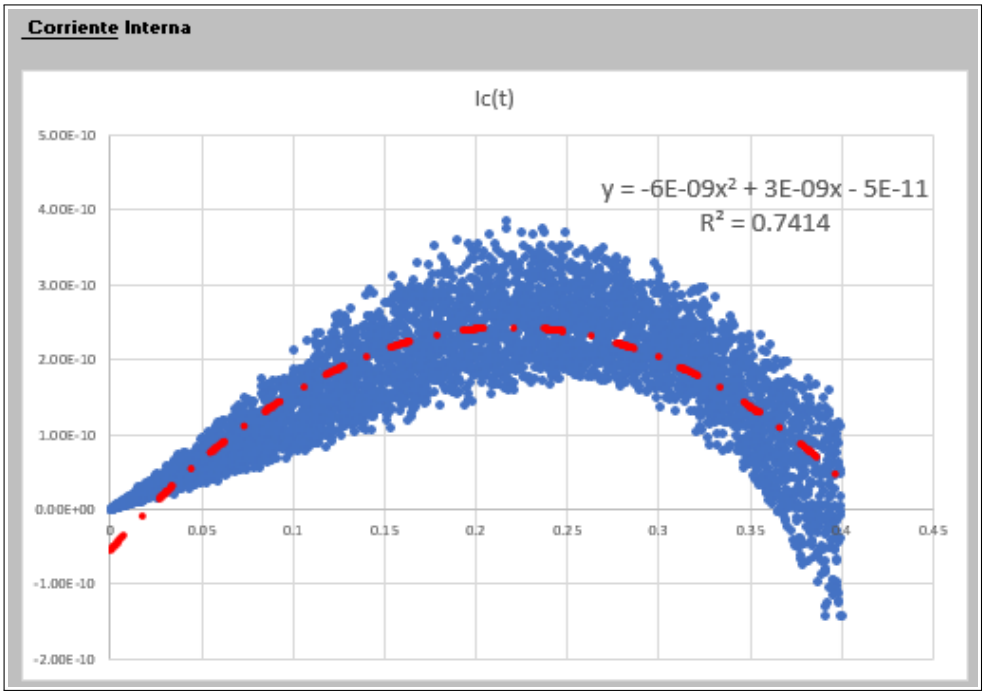
Variable	Expresión
Y1	C(t)
Y2	dC(t)/dt
Y3	V(t)
Y4	dV(t)/dt
Y5	I(t)
Y6	P(t)
Y7	Z(t)
Y8	Ic(t)
Y9	Z+(t)
Y10	I+(t)
Y11	Zp(t)

Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.1. Corriente de desplazamiento

Anteriormente se explicó que no existen corrientes dentro de la máquina de Wimshurst, sí se puede calcular el cociente de la tensión con la impedancia, que en este caso sería interpretado como la corriente de desplazamiento dentro del capacitor variable. En la figura 62 se puede apreciar su comportamiento. Se observa un comportamiento similar al de la potencia por lo que es posible inferir que la primera mitad del ciclo se podría linealizar pero luego la segunda mitad que llega de forma no lineal a valores negativos a partir del 90 % de ciclo, de donde se podría interpretar como que en una parte extrae energía y en otra la inyecta para generar los campos.

Figura 62. **Corriente de desplazamiento con $N = 8$**

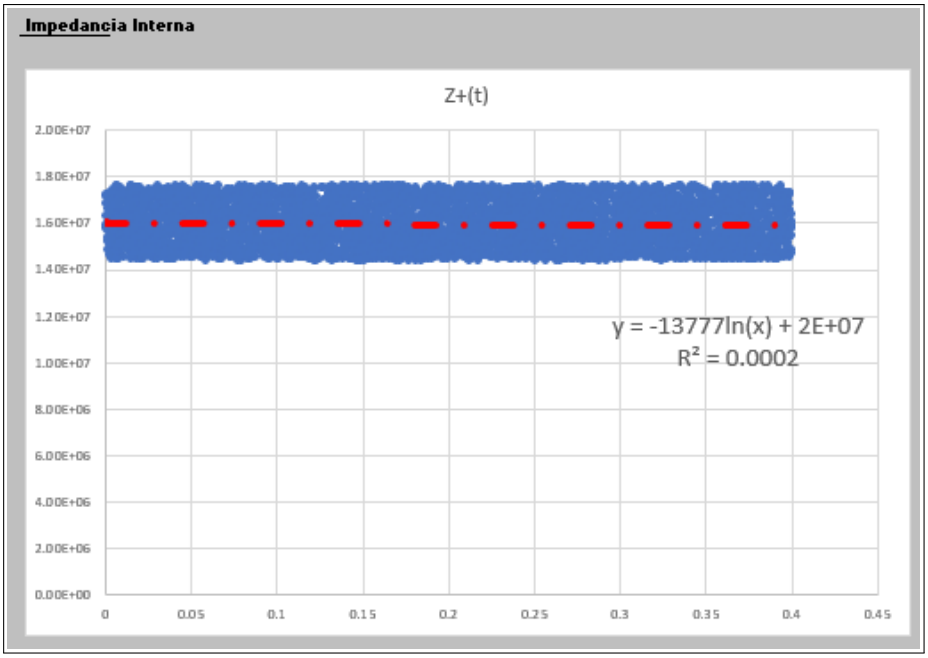


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.2. Impedancia con jarras de Leyden

A partir de la figura 63 se puede inferir que al agregar la jarra de Leyden que tiene una capacidad mucho mayor que la de los sectores, la impedancia se mantiene prácticamente constante con un valor muchísimo más grande que sin estas. Esto se puede traducir como una mayor capacidad para almacenar energía (que coincide con los comentarios de la literatura) implica que la franja que se ve puede ser resultado de alguna pequeña modulación por parte de la capacitancia variable de los discos, que está contenida entre límites bien establecidos por la configuración del sistema.

Figura 63. **Impedancia incluyendo jarras de Leyden con $N = 8$**

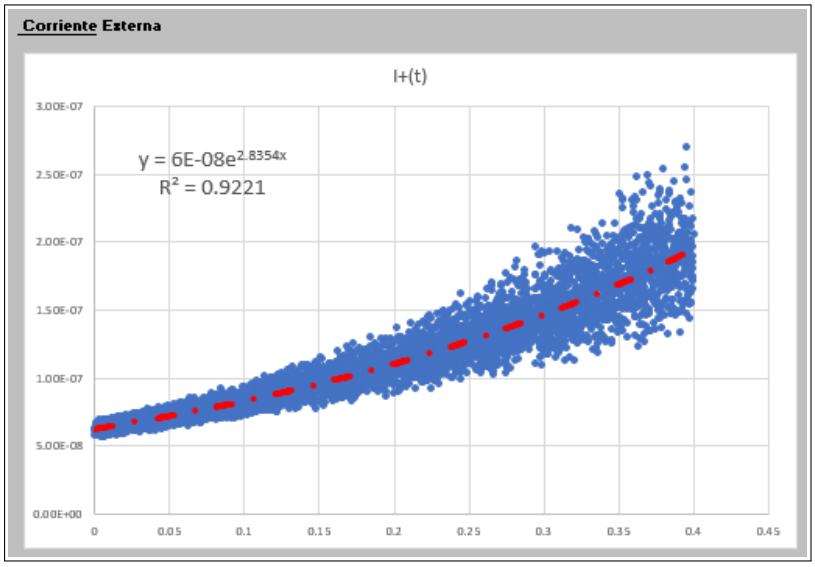


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.3. Corriente con jarras de Leyden

Directamente del resultado anterior es posible inferir utilizando la figura 64, de que la naturaleza exponencial no se ve afectada significativamente por esta impedancia incrementada; sin embargo, vemos que la magnitud de la corriente sí se reduce considerablemente por lo menos en tres órdenes de magnitud. Esto se puede traducir en que al agregar las jarras de Leyden y, por ende, al incrementarse la capacidad de almacenamiento de energía, la tensión tendrá que crecer mucho más en cada ciclo antes de alcanzar un nivel que permita la ruptura dieléctrica del aire. Si lo que se conecta a la salida es una carga el comportamiento cambia totalmente, pero esta expresión permite calcular su corriente de entrada sin problemas.

Figura 64. **Corriente al incluir las jarras de Leyden con $N = 8$**

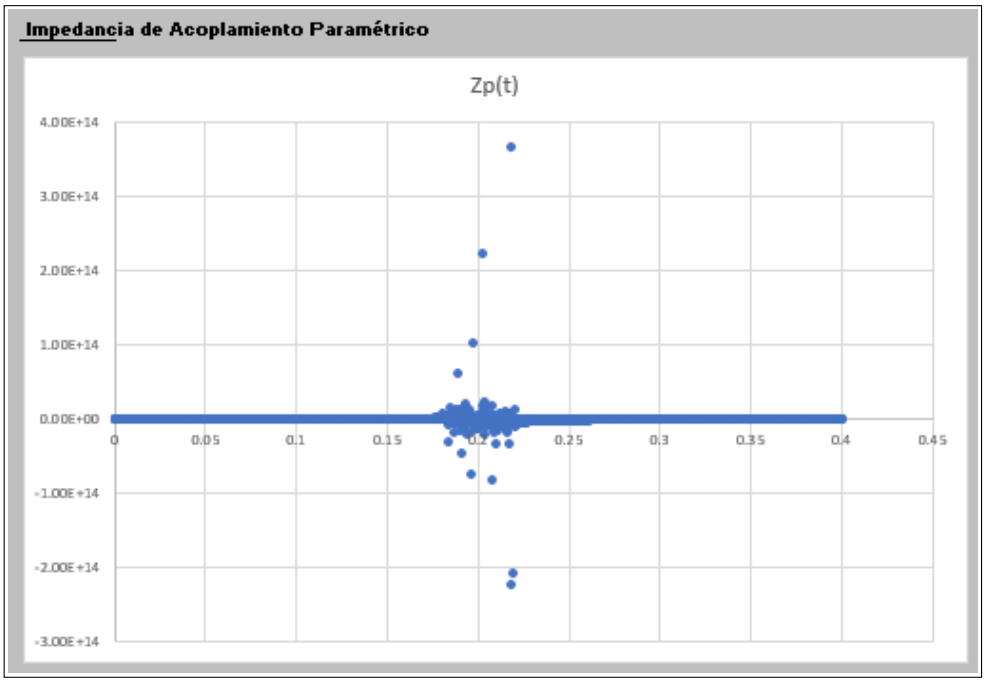


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.4. Impedancia de acoplamiento paramétrico

Cuando se determinó la expresión para la potencia de la máquina de Wimshurst se detectó un término equivalente a una impedancia para la potencia de acoplamiento paramétrico, que es equivalente al inverso de un medio de la derivada de la capacitancia respecto al tiempo. En la figura 65 se puede apreciar su comportamiento, el cual al ser no lineal, la hoja de cálculo no permitió generar una curva de ajuste. Su peculiar comportamiento coincide con el de la función secante; sin embargo, a la mitad del ciclo se observa un comportamiento transitorio. Se podría interpretar, sin certeza alguna, ya que es necesaria más investigación al respecto, que esta impedancia oscila muy cercana a cero (es decir, con un valor despreciable), pero que a la mitad del ciclo que coincide con la reconexión de líneas del campo eléctrico de dos sectores tiene un punto de inflexión y puede tener trascientes considerables.

Figura 65. **Impedancia de acoplamiento paramétrico con $N = 8$**

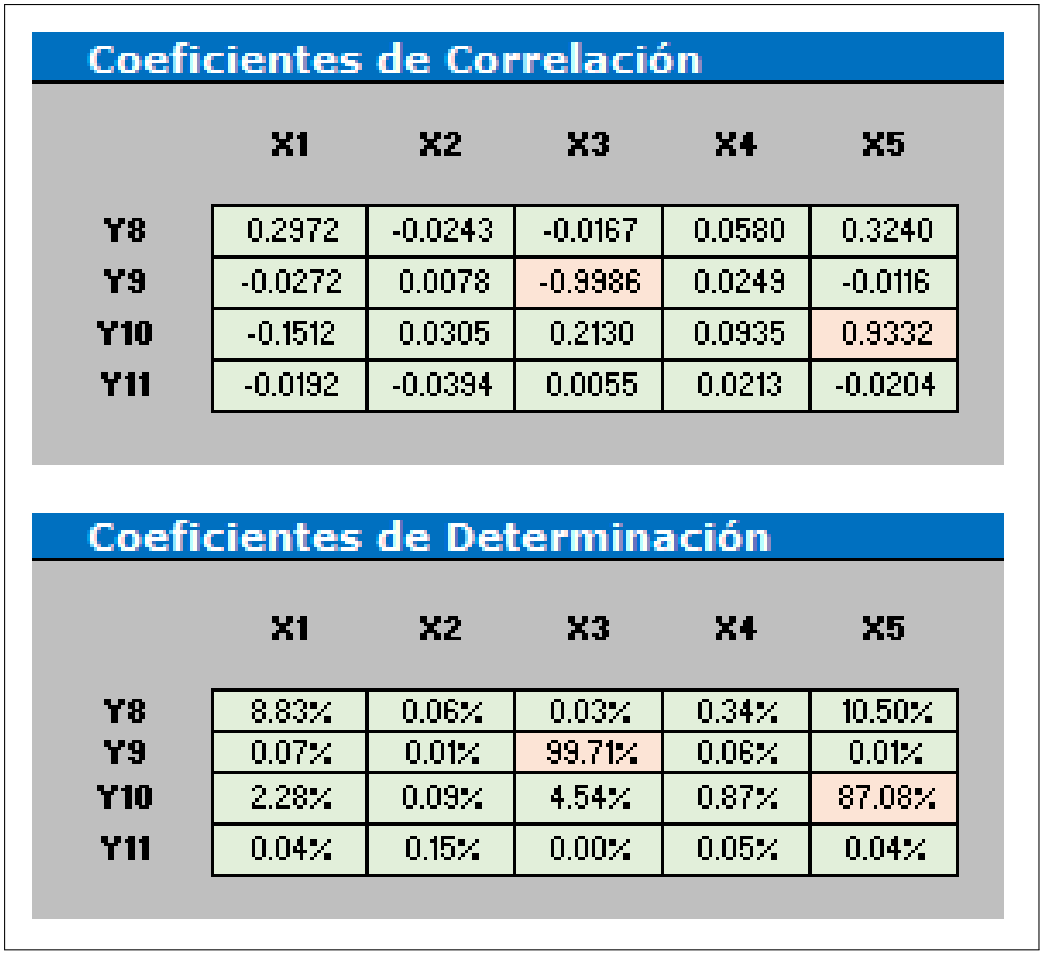


Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.5. Análisis de sensibilidad

Al comparar estas nuevas variables electromagnéticas no primarias con las variables aleatorias de entrada, podemos observar en la figura 66 sus niveles de sensibilidad y que casi todas no contribuyen, ni en los coeficientes de correlación, ni de determinación; pero en el caso de la impedancia extendida Y_9 se aprecia que tiene una relación negativa (es decir, decreciente) fuerte con la velocidad angular X_3, puesto que la corriente de salida extendida Y_{10} crece de forma similar con el tiempo, el cual es su mayor contribuidor independiente. Esto coincide con los resultados generales lo que era de esperarse acorde a las observaciones de la literatura que se expusieron en el capítulo 1.

Figura 66. **Variables interesantes y su sensibilidad con $N = 8$**



Coeficientes de Correlación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y8	0.2972	-0.0243	-0.0167	0.0580	0.3240
Y9	-0.0272	0.0078	-0.9986	0.0249	-0.0116
Y10	-0.1512	0.0305	0.2130	0.0935	0.9332
Y11	-0.0192	-0.0394	0.0055	0.0213	-0.0204

Coeficientes de Determinación

	X1	X2	X3	X4	X5
Y8	8.83%	0.06%	0.03%	0.34%	10.50%
Y9	0.07%	0.01%	99.71%	0.06%	0.01%
Y10	2.28%	0.09%	4.54%	0.87%	87.08%
Y11	0.04%	0.15%	0.00%	0.05%	0.04%

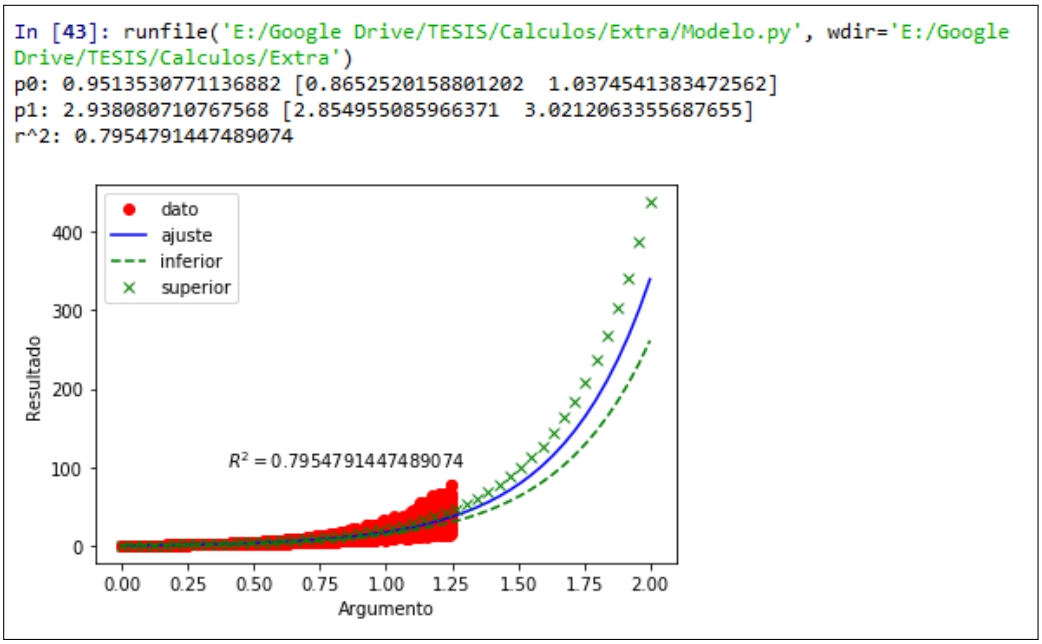
Fuente: elaboración propia, usando Microsoft Excel.

4.7.6. Uso de herramientas más robustas

Este trabajo se ha realizado ejecutando las simulaciones con un programa de cómputo de uso tradicional para la oficina. Los cálculos no se ven afectados por el uso normal de dicho programa, pero su representación gráfica y análisis de regresión sí se limitan por los alcances embebidos dentro de la misma.

Para brindar una idea al respecto y motivar a los lectores, como se sugiere en la sección de recomendaciones, a explorar otras herramientas para continuar el estudio a mayor detalle sobre la máquina de Wimshurst, a continuación se muestran los resultados de las simulaciones al ser ejecutadas con otro programa de cómputo, el mismo con mayor capacidad gráfica. El código utilizado se encuentra en el apéndice 2.

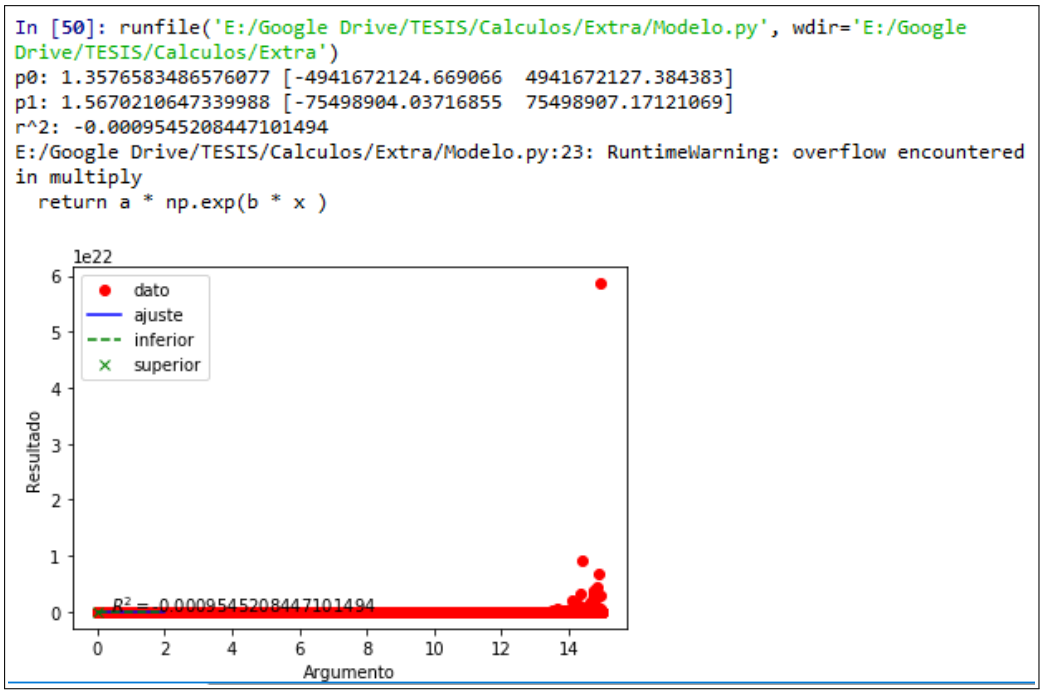
Figura 67. **Representación de la tensión con** $N = 25$



Fuente: elaboración propia, usando Python v3.2.

Hay que notar el hecho de que a mayor número de sectores, sin importar el poder de la herramienta, la visualización y curvas de ajuste se complican para fines prácticos.

Figura 68. **Representación de la tensión con $N = 300$**



Fuente: elaboración propia, usando Python v3.2.

CONCLUSIONES

1. La expresión para la potencia reveló una similutud con las máquinas de inducción electromagnéticas, dejando ver las simetrías de las ecuaciones de Maxwell. Así como existe una corriente de magnetización en las segundas, en la primera existe una tensión de electrificación, como se observa en la sección 2.3.3 del capítulo 2.

2. Al simular el circuito equivalente de la máquina de Wimshurst se pudo comprobar que para cantidades pequeñas de sectores el sistema se comporta de forma estable, pero conforme la cantidad de sectores se incrementa el funcionamiento cambia drásticamente. Esto se encuentra en las secciones 4.1 a la 4.5 del capítulo 4.

3. Se determinó que existen otros factores y variables escondidas que contribuyen con la sensibilidad de las variables electromagnéticas del sistema, en especial cuando el número de sectores se incrementa. Esto se encuentra en la sección 4.7 del capítulo 4.

4. La máquina de Wimshurst es un sistema dinámico y si bien sus componentes están bien definidas, las mismas están interrelacionadas, lo cual indica que el funcionamiento del sistema está intimamente relacionado con su configuración física. Esto se puede ubicar en la sección 4.6 del capítulo 4.

RECOMENDACIONES

1. Cuando se desee realizar un estudio similar a este se sugiere implementar los modelos de regresión con herramientas que permitan calcular modelos no lineales y utilizar muestras significativamente mayores a 5 000 variables aleatorias para minimizar el error en los resultados simulados.

2. Dado que los dispositivos electrostáticos dependen fuertemente de su geometría, antes de tratar de buscar una expresión general para sus variables electromagnéticas es necesario estudiar los efectos de las variaciones de las geometrías de sus componentes.

3. De las conclusiones se sabe que hay factores aún no identificados que afectan la sensibilidad de la máquina de Wimshurst, por lo que es necesario realizar estudios sobre el tema para enriquecer la literatura actual sobre estas máquinas.

4. Posteriores estudios sobre esta máquina debiesen enfocarse en las configuraciones trifásica y con cilindros en vez de discos, porque pueden generar nuevas aplicaciones o mejoras sustanciales al desempeño de estas. Incluso es recomendado estudiar su uso combinado con otras máquinas, tales como el amplificador electrostático de Yablotchkov o el generador de Van Der Graaf.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALJADIRI, Rita; TAHA, Luay; IVEY, Paul. *Simulation and experimental modeling of a multipoles variable capacitor for an electrostatic wind energy harvester*. Artículo. Turquía: Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, 2015. 12 p.

2. BEATY, William J. *Capacitor Complaints*. [en línea]. < http://amasci.com/emotor/cap1.html > [Consulta: 14 de marzo de 2020].

3. BRIGHT, William. *Modern Electrostatic Generators*. Contemp. Phys., 1969, Vol. 10, No. 4, 22 p.

4. FORD, Richard A. *Homemade Lightning: Creative Experiments in Electricity*. 3a Ed. USA: McGraw-Hill, 2001. 272 p.

5. FRANCIS, William. *Electrostatic Experiments*. 1a Ed. USA: Electret Scientific Company, 2005. 273 p.

6. GRAY, Tony. *Self-Capacitance*. [en línea]. < https://doi.org/10.1007/978-3-319-98392-9 _ 3 > [Consulta: 22 de marzo de 2020].

7. GURU, Bhag; HIZIROGLU Huseyin. *Electromagnetic Field Theory Fundamentals*. 2a Ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2004. 681 p.

8. HONG, Alice. *Dielectric Strength of Air*. [en línea]. < https://hypertextbook.com/facts/2000/AliceHong.shtml > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

9. JEFIMENKO, Oleg. *Electrostatic Motors*. 1a Ed. USA: Electret Scientific Company, 2011. 159 p.

10. JOHANSSON, Robert. *Introduction to Scientific Computing in Python*. [en línea]. < http://jrjohansson.github.io > [Consulta: 03 de marzo de 2018].

11. JOHNSON, Valen E. *Modern High-Speed Influence Machines*. 1a Ed. Reino Unido: E. & F. N. Spon ltd., 1922. 278 p.

12. LAGUNA, Clara. *Correlación y Regresión Lineal*. [en línea]. < http://www.ics-aragon.com/cursos/salud-publica/2014/pdf/M2T04.pdf > [Consulta: 19 de abril de 2020].

13. MCKENZIE, Arthur. *Magnetism and Electricity*. 1a Ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 1961. 381 p.

14. MUNGUIA AGUILAR, Horacio. *The Wimshurst machine as an electric circuit*. Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol 8, No. 1, Marzo 2014, México: 3 p.

15. NAUDIN, Jean. *The Parametric Power Conversion*. [en línea]. < http://jnaudin.free.fr/html/paraintr.htm > [Consulta: 14 de marzo de 2020].

16. NIST. *Characteristic impedance of vacuum*. [en línea]. < https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?z0 > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

17. PROCABLES. *Conductores de Aluminio*. [en línea]. < http://www.procables.com.co/downloads/catalogo-conductores _ de _ aluminio _ aislado.pdf > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

18. QUEIROZ, Carlos. *Operation of the Wimshurst machine*. [en línea]. < https://www.coe.ufrj.br/ ~acmq/whyhow.html > [Consulta: 28 de marzo de 2020].

19. QUERELLE Y CIA LTDA. *Calculo de resistencia*. [en línea]. < https://www.profesorenlinea.cl/fisica/Electricidad _ resistencia _ calcular.html > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

20. SCHIEBER, David. *Some Remarks on the Analysis of Electrical Machinery in Rotating Frames of Reference*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik 63, Israel: 1981, 4 p.

21. SEIFERT, Michael. *Capacitance of a single-charged plate?* [en línea]. < https://physics.stackexchange.com/questions/187139/capacitance-of-a-single-charged-plate > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

22. SERAN, Elena; et Al. *Effects of humidity and pressure in air conductivity*. [en línea]. < agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2016EA000241 > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

23. SILVA BIJIT, Leopoldo. *Redes Eléctricas*. 1a Ed. España: Pearson Prentice Hall, 2006. 452 p.

24. SIMON, Alfred W. *On the Quantitative Theory of the Wimshurst Static Machine. I*. Contributed Articles, R.S.I. Volume 4, USA: 1933, 8 p.

25. SIMON, Alfred W. *The Theory of Wimshurst's Alternating Static Machine*. Physical Review, Volume 28, USA: 1926, 9 p.

26. THOUGHTCO. *Table of electrical resistivity and conductivity*. [en línea]. < https://www.thoughtco.com/table-of-electrical-resistivity-conductivity-608499 > [Consulta: 29 de marzo de 2020].

27. WITTWER, Jon. *Monte Carlo Simulation Template*. [en línea]. < https://www.vertex42.com/ExcelTemplates/monte-carlo-simulation.html > [Consulta: 19 de abril de 2020].

28. ZAHN, Markus; GOSLIN, Richard L.; WICKS, Larry F. *Self-Excited, Alternating, High-Voltage Generation Using a Modified Electrostatic Influence Machine*. AJP Volume 42, University of Florida, USA: 1973, 5 p.

APÉNDICES

Apéndice 1. **Código de Visual Basic**

A continuación se detalla el código desarrollado para propósitos de optimización de la hoja de cálculos utilizada para la simulación de Monte Carlo y al que se le hizo referencia al final del Capítulo 3.

```
Sub CalculateMonteCarlo()
    Dim sht As Worksheet
    Set sht = Sheets("Simulacion") 'store the sheet

    sht.Activate 'activate it!
    Range("Q12:AC5011").ClearContents ' Clear previous values
    Range("Q10:AC10").Copy ' Copy formulas
    Range("Q12:AC5011").PasteSpecial xlPasteFormulas 'Paste the formulas
    Application.Calculation = xlManual ' Stop Auto Calculations
    Range("Q12:AC5011").Copy 'then copy again
    Range("Q12:AC5011").PasteSpecial xlPasteValues 'Paste the values

    Application.Calculation = xlAutomatic ' Activate autocalculations
    Application.CutCopyMode = False ' Stop CutCopyMode
End Sub
```

Fuente: elaboración propia, usando Visual Basic 2018.

Apéndice 2. **Código de Python**

A continuación se detalla el código desarrollado para propósitos de mostrar la capacidad gráfica de otras herramientas a lo que se le hizo referencia al final del Capítulo 4.

```
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
from scipy.stats.distributions import  t
import matplotlib.pyplot as plt

df = pd.read_excel('sample.xlsx', sheet_name='sample', usecols=['time','voltage'])

x = np.array(df['time'])
y = np.array(df['voltage'])

def func(x, a, b):
    return a * np.exp(b * x )

initial_guess = [0.6, 0.8]

pars, pcov = curve_fit(func, x, y, p0=initial_guess)

n = len(y)
p = len(pars)
dof = max(0, n - p)
```

Continuación Apéndice 2

```
alpha = 0.005
tval = t.ppf(1.0-alpha/2., dof)

for i, p,var in zip(range(n), pars, np.diag(pcov)):
    sigma = var**0.5
    print ('p{0}: {1} [{2}
{3}]'.format(i, p, p - sigma*tval, p + sigma*tval))

lower = []
upper = []

for p,var in zip(pars, np.diag(pcov)):
    sigma = var**0.5
    lower.append(p - sigma*tval)
    upper.append(p + sigma*tval)

xfit = np.linspace(0,2)
yfit = func(xfit, pars[0], pars[1])

ylfit = func(xfit, *lower)
yufit = func(xfit, *upper)

residuals = y - func(x,pars[0], pars[1])
ss_res = np.sum(residuals**2)
ss_tot = np.sum((y-np.mean(y))**2)
r_squared = 1 - (ss_res / ss_tot)
```

Continuación Apéndice 2

```
print ('{0}: {1}'.format('r^2', r_squared))

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
ax.text(0.4, 1.0,'$R^2 = $' + str(r_squared), fontsize=10)

plt.plot(x,y,'bo ', color='r')
plt.plot(xfit ,yfit ,'b-')
plt.plot(xfit ,ylfit ,'--', color='g')
plt.plot(xfit ,yufit ,'rx', color='g')
plt.xlabel('Argumento')
plt.ylabel('Resultado')
plt.legend(['dato','ajuste','inferior','superior'],loc='best')
plt.show()
```

Fuente: elaboración propia, usando Python v3.2.