

081 (377)2  
MEN: 1147  
PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERIA

**"ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE  
NUDOS ARTICULADOS"**

Tesis

Presentada a la Junta Directiva

de la

Facultad de Ingeniería

de la

Universidad de San Carlos de Guatemala

Por:

**CARLOS ROMEO RECINOS FLORES**

Al conferírsele el título de

**INGENIERO CIVIL**

Guatemala, Mayo de 1975.

**TESIS DE REFERENCIA**  
**NO**  
SE PUEDE SACAR DE LA BIBLIOTECA  
BIBLIOTECA CENTRAL - USAC.

**JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

Decano:	Ing. Hugo Quan Má
Vocal Primero:	Ing. Julio Campos Bonilla
Vocal Segundo:	Ing. Roberto Barrios Morataya
Vocal Tercero:	Ing. Leonel Aguilar Girón
Vocal Cuarto:	Br. Jaime Klussmann F.
Vocal Quinto:	Br. Edgar Daniel de León M.
Secretario:	Ing. José Luis Terrón.

**TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN  
GENERAL PRIVADO**

Decano:	Ing. Hugo Quan Má
Examinador:	Ing. Eduardo Molina Mejía
Examinador:	Ing. Edgar Díaz
Examinador:	Ing. Leonel Aguilar
Secretario:	Ing. José Luis Terrón.

**HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala establece, presento a vuestra consideración mi trabajo de tesis titulado:

**“ANALISIS DE ESTRUCTURAS  
DE NUDOS ARTICULADOS”**

Tema que me fue asignado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.

## DEDICATORIA:

A mis padres:

José Romeo Recinos Sandoval  
Sara Consuelo Flores de Recinos

A mis hermanos:

José Leonidas  
Brenda Consuelo

A mi novia:

Elva Gladys Escobar García

A mis familiares.

A mis inolvidables amigos de infancia:

Jorge, Hugo, Alex, Samuel, Neto y Gil.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala y en especial a la Facultad de Ingeniería.

## RECONOCIMIENTO:

A los Ingenieros:

Gerardo Soler Ortíz y

Ernesto Rosales Flores, por su aporte a mi formación profesional.

A mis catedráticos y en especial a los Ingenieros:

Jacinto Quán Chú y

Joaquín Lottman, por su guía durante mis estudios.

A mis compañeros de estudio y en especial a:

Ing. Inf. Ernesto Rosales Arenales

Ing. Eduardo Ramírez Saravia

Ing. Antonio Vizcaíno Marcucci

Ing. Octavio Salguero Duarte

Ing. Carlos Hilario Polo

A mis compañeros de trabajo en Montes, Rosales y Porras e Ingenieros S.A.

A mis amigos en general y en especial a los integrantes del Equipo "Asociación Jalapaneca".

A mi tierra natal Jalapa.

## CONTENIDO:

### Introducción:

Motivación y Objetivo.

### Capítulo I:

Generalidades.

### Capítulo II:

Conceptos Básicos.

### Capítulo III:

Análisis de Estructuras de Nudos Articulados Estáticamente Determinadas:

#### i. Determinación de esfuerzos en los miembros:

Métodos Algebráicos:

Nudos

Secciones

Momentos y Cortantes

Métodos Gráficos:

Diagrama de Maxwell

### Capítulo IV:

Determinación de Deformaciones en Estructuras Articuladas Estáticamente Determinadas:

#### i. Métodos Tradicionales o de Energía:

Trabajo Real

Primer Teorema de Castigliano

Trabajo Virtual

#### ii. Métodos Gráficos:

Diagrama de Williot

Diagrama de Rotación de Mohr (Williot Mohr)

#### iii. Métodos Matriciales: Flexibilidad y Rigidez

#### iv. Métodos Programados

### Capítulo V:

Análisis de Estructuras de Nudos Articulados Estáticamente Indeterminadas:

#### i. Método General

#### ii. Trabajo Mínimo (Segundo Teorema de Castigliano)

#### iii. Método de Flexibilidad

Conclusiones y Recomendaciones

Bibliografía.

## INTRODUCCION

### Motivación y Objetivo:

Estoy seguro que el deseo de todo estudiante que está por culminar su carrera universitaria está centrado en desarrollar un trabajo de tesis relacionado con el área que él más domina ya sea por asuntos de trabajo o por la preparación adquirida en una determinada rama de estudios.

Sin duda alguna, el campo tan amplio del conocimiento humano en cualquiera de sus ramas es motivo principal de que en un momento determinado el estudiante se encuentre con un sinnúmero de posibles temas a desarrollar, lo cual crea en él indecisiones en cuanto a la selección de dicho tema, por motivos de grado de dificultad, tiempo de desarrollo, tiempo disponible, bibliografía, etc.

En mi caso, después de haber solventado las dificultades iniciales, me decidí por desarrollar el tema titulado "Análisis de Estructuras de Nudos Articulados". En parte, mi inclinación por desarrollar dicho tema se debe a que este tipo de estructuras ha tenido y sigue teniendo gran aceptación para usarse en obras de ingeniería tales como puentes, armaduras, cerchas, etc.

A lo largo de este trabajo trataré de ser lo más explícito y concreto posible, de tal manera que mi investigación pueda servir tanto al alumno que empieza con sus cursos de Análisis Estructural como al catedrático que siempre desea poseer un libro de referencia y al profesional que desea ver los métodos con los que cuenta para llevar a cabo su análisis.

Para poder llenar el cometido propuesto, he dividido mi trabajo en la siguiente forma:

- a) En los capítulos 1 y 2 doy generalidades, centrándome especialmente en lo que se refiere a la estabilidad y determinación de estructuras.
- b) En el capítulo 3 planteo los métodos conocidos para analizar las estructuras estáticamente determinadas especialmente en lo que se refiere a la determinación de esfuerzos en los miembros de dichas estructuras.
- c) En el capítulo 4 desarrollo los métodos estudiados hasta la fecha para la determinación de las deflexiones en los miembros de estructuras estáticamente determinadas, abarcando desde los métodos tradicionales hasta los modernos métodos matriciales.
- d) En el capítulo 5 trato exclusivamente todo el análisis de las estructuras de nudos articulados estáticamente indeterminados.

Ya expuesto todo lo anterior puede sintetizarse el objetivo de mi tesis en tres aspectos muy importantes, los cuales se enumeran a continuación.

- a) Sistematizar el análisis de las estructuras articuladas, reuniendo para el efecto todos los métodos utilizados hasta la fecha para el análisis de dichas estructuras.
- b) Dar las bases para seleccionar el método más adecuado en un determinado caso de análisis estructural tomando en cuenta los recursos con que se cuenta para dicho análisis.
- c) Servir de orientación a los cursantes de las materias de Análisis Estructural, ofreciéndoles en forma resumida la metodología aplicable a un caso concreto.

Espero que este trabajo de tesis no sea tomado como un tratado o manual sobre las estructuras de nudos articulados, sino que únicamente sea usado como una guía para poder analizar este tipo de estructuras.

Aprovecho la oportunidad para agradecer al Ingeniero Ernesto Rosales Flores que es el asesor del presente trabajo y quién se ha preocupado por el buen desarrollo del mismo.

## CAPITULO I

### GENERALIDADES

#### **Historia:**

Resulta aparente que la ingeniería estructural, que comenzó en las edades prehistóricas, existió solamente como arte durante los períodos antiguo y medieval. Es interesante encontrar que aquellos que practicaron la ingeniería estructural no eran conocidos como ingenieros estructurales y ni siquiera como ingenieros civiles. De hecho, hasta esta época no existía distinción profesional entre el ingeniero civil y el arquitecto. Ahora, en retrospectiva, es posible clasificar un constructor en los siglos anteriores al diez y ocho, como ingeniero o como arquitecto solamente sobre la base de sus inclinaciones y las metas que principalmente lograra.

EL surgir de las dos profesiones separadas de ingeniero estructural y de arquitecto fue un proceso lento. El período de este ajuste puede considerarse como inaugurado a principios del siglo diez y siete con los intentos de Galileo para analizar la viga en voladizo. Sus trabajos señalaron el camino; y hacia la mitad del siglo dieciocho se habían formulado algunos principios de estática así como las propiedades físicas de varios materiales de construcción. Lógicamente, por lo tanto, se iniciaba ya el análisis y diseño estructural científico. Aquellos constructores que aplicaron primero la nueva ciencia fueron los primeros ingenieros estructurales.

Hoy en día, los ingenieros han de proyectar estructuras para puentes, edificios, barcos, partes de máquinas y para diversos tipos de medios auxiliares e instalaciones. Para realizar un proyecto, el ingeniero tiene que determinar en primer lugar la disposición, forma y partes de que se compondrá la estructura. Después tiene que adoptar o bien calcular las cargas que habrá de soportar dicha estructura. La teoría de estructuras se ocupa de establecer los fundamentos y dar los métodos para calcular los esfuerzos longitudinales, cortantes y momentos de flexión, así como las deformaciones en una sección cualquiera de cada uno de los distintos elementos que componen la estructura. En la fase siguiente de un proyecto hay que estudiar las dimensiones que han de darse a los elementos de acuerdo con las tensiones de trabajo admisibles para los materiales y con los demás requisitos necesarios para el funcionamiento correcto de la estructura. Conviene decir que esta fase de estudio es específica por lo que en este trabajo de tesis no nos ocuparemos de ella.

#### **Estructuras Articuladas:**

Supongamos que se desea proyectar una estructura de nudos articulados como la mostrada en la Fig. 1. El desarrollo del proyecto comprende las fases siguientes: a) Se adopta un trazado de la estructura; b) Se considera un sistema de cargas estimado tomando en cuenta tanto las verticales como las horizontales; c) Se hallan los esfuerzos longitudinales en los miembros de la estructura; y d) Se determinan las dimensiones de dichas barras de acuerdo a las especificaciones del proyecto. Cabe hacer notar que en este trabajo de tesis se tratará principalmente sobre los problemas que se presentan en la fase c) así como también se tratará sobre determinación de deformaciones en los miembros.

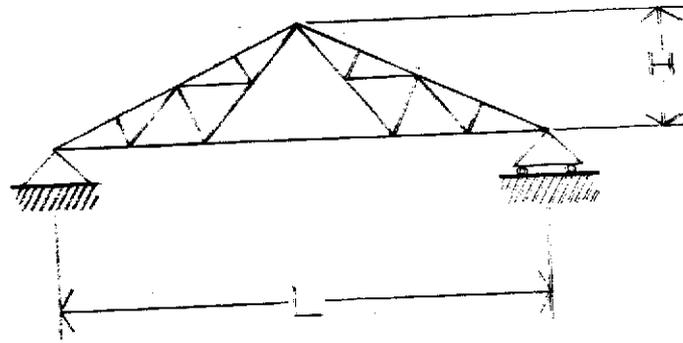


Figura 1.

Para que se pueda tener una idea clara de la importancia de las estructuras de nudos articulados basta con que se recuerde que la mayor parte de estructuras pueden clasificarse en vigas, estructuras de nudos rígidos, estructuras de nudos articulados o bien son combinaciones de estos elementos. El análisis de una viga queda terminado al determinar los esfuerzos cortantes y los momentos de flexión. El análisis de una estructura de nudos rígidos queda concluido una vez halladas las variaciones de los esfuerzos longitudinales, esfuerzos cortantes y momentos de flexión a lo largo de todos sus elementos o barras. En cuanto a una estructura de nudos articulados podemos decir que sus elementos o barras están unidos por medio de articulaciones sin rozamiento y su análisis queda completo una vez hallados todos los esfuerzos de sus elementos o barras.

Vale la pena mencionar que como las fuerzas que actúan sobre un elemento de la estructura pueden considerarse en general como un sistema de fuerzas situadas en el mismo plano en equilibrio, la base del análisis de estructuras está en el uso de las tres ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

Estas tres ecuaciones, junto con un buen conocimiento de las operaciones de aritmética elemental, álgebra, geometría y un poco de cálculo, son los únicos requisitos que se necesitan para estudiar la teoría elemental de las estructuras en general.

#### Fuerzas Internas. Tercera Ley de Newton:

Al considerar los problemas que se refieren al equilibrio de estructuras de nudos articulados debemos de tomar en cuenta que estas están formadas por varios elementos de donde se tiene que no sólo deben determinarse las fuerzas externas que actúan sobre ella sino también las fuerzas que mantienen unidas entre sí sus diversas partes. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, estas son las FUERZAS INTERNAS.

Para formarnos una idea clara de esto consideremos la grúa de la Figura 2:

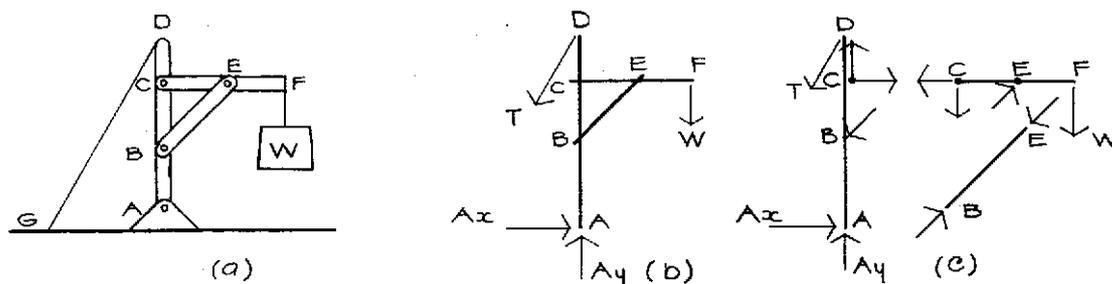


Figura 2.

En la Figura 2a. se muestra la grúa en equilibrio, la cual está formada por 3 elementos AD, BE y CF, además actúan sobre ella el peso  $W$  aplicado en el punto F y la fuerza aplicada por el cable en el punto D.

En la Figura 2b. se representa el diagrama de sólido libre de la grúa, sobre el cual actúan el peso  $W$ , las componentes de la reacción en el apoyo A que son  $A_x$  y  $A_y$  y la fuerza  $T$  aplicada por el cable. Como se ve estas fuerzas son solo exteriores.

En la Figura 2c. se muestran las fuerzas internas que actúan sobre la grúa; para poder observar dichas fuerzas se han desmontado de esta cada una de sus partes, representando las fuerzas que las mantienen unidas entre sí. Se observará que la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el AD se representó igual y opuesta a la ejercida en el mismo punto por el elemento AD sobre el BE; igualmente sucede en los demás puntos de unión entre 2 elementos. Esto se hace de acuerdo con la Tercera Ley de Newton, la cual afirma que "Las fuerzas de acción y reacción entre sólidos en contacto tienen el mismo módulo, la misma recta de acción y sentido opuesto". Esta ley constituye uno de los principios fundamentales de la mecánica: su aplicación es esencial en la solución de problemas referidos a elementos en conexión como lo son las estructuras de nudos articulados.

## CAPITULO II

### CONCEPTOS BASICOS:

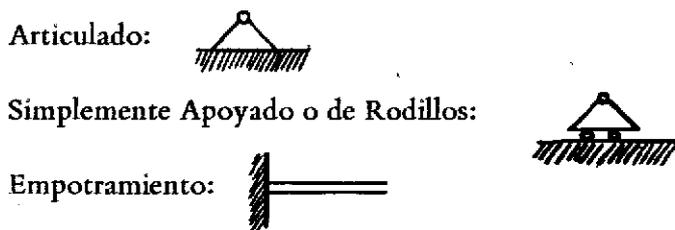
Antes de entrar de lleno al análisis de esfuerzos en los miembros de una estructura de nudos articulados, lo cual se estudiará en el siguiente capítulo, es importante mencionar, aunque muy rápidamente, algunos conceptos que sirven de base para cualquier tipo de análisis estructural.

#### 1) Estructura Plana:

Son las que puede considerarse que están en un plano que a su vez contiene las líneas de acción de todas las fuerzas que actúan en las mismas estructuras. Estas estructuras son las más comunes. Vale mencionar que el análisis de las tridimensionales o espaciales no contiene ningún principio fundamental nuevo a los mencionados para las estructuras planas; la única variante que hay es que los cálculos numéricos resultan mucho más complicados debido a los cálculos geométricos introducidos por la tercera dimensión. En esta tesis nos limitaremos únicamente a las estructuras planas para las cuales los sistemas de fuerzas son llamadas coplanarias (concurrentes, paralelas o pares)

#### 2) Apoyos:

La mayoría de estructuras están obligadas, parcial o totalmente, a no poderse mover en el espacio. Tales restricciones al movimiento se llaman sujeciones y son proporcionadas por los apoyos que unen la estructura a algún cuerpo estacionario. Las resistencias que oponen los apoyos, se llaman "reacciones". De lo anterior se tiene que el efecto de los apoyos se puede sustituir por las reacciones que transmiten a la estructura. A continuación se muestran algunos tipos de apoyos y su representación:



#### 3) Equilibrio Estático:

Un cuerpo que está inicialmente en reposo, y permanece en este estado cuando actúa sobre él un sistema de fuerzas, se dice que está en un estado de equilibrio estático. Para que exista tal estado es necesario que el efecto resultante combinado de fuerzas no sea ni una fuerza ni un par, ya que si sucede lo contrario habrá tendencia al movimiento del cuerpo. Para que en una estructura suceda lo anterior deben cumplirse las tres condiciones siguientes:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

Una estructura es estable si soporta cualquier sistema de cargas aplicadas, resistiéndolas elástica e inmediatamente a su aplicación.

#### 4) Estructuras Estáticamente Determinadas e Indeterminadas:

Si en una estructura sustituimos los apoyos por las reacciones que éstos aplican a la estructura tendremos entonces un sistema de fuerzas constituido por cargas conocidas y reacciones desconocidas. Luego, si la estructura está en equilibrio estático bajo estas fuerzas, pueden escribirse las tres ecuaciones del equilibrio estático en función de las cargas conocidas y de las reacciones desconocidas. La resolución del sistema de tres ecuaciones determinará en ciertos casos la magnitud de los elementos de reacción desconocidos. Como se puede ver, estas tres ecuaciones forman una base parcial para obtener las reacciones de cualquier estructura en estado de equilibrio estático, no importando que el número de ecuaciones no sea suficiente para la determinación de todas las reacciones.

Tenemos que si hay menos de tres reacciones independientes desconocidas se dice que la estructura es estáticamente inestable.

Si una estructura plana es estable con exactamente tres elementos de reacción, las cuales pueden ser determinadas con la resolución del sistema de las tres ecuaciones del equilibrio estático, se dice que las reacciones de la estructura son estáticamente determinadas.

Si no se pueden determinar los elementos de reacción desconocidos solamente por las ecuaciones del equilibrio estático, se dice que las reacciones de la estructura son estáticamente indeterminadas. Entonces se dice que la estructura es indeterminada con un grado de indeterminación igual al número en el cual las incógnitas exceden de las ecuaciones de la estática disponibles.

#### 5) Principio de Superposición:

Este es uno de los conceptos más importantes en el análisis estructural y se puede utilizar siempre que existan relaciones lineales entre las cargas y deformaciones. En general, el principio dice que los efectos producidos por varias cargas pueden obtenerse combinando los efectos debidos a las cargas individuales. Como un ejemplo tenemos la Figura 3:

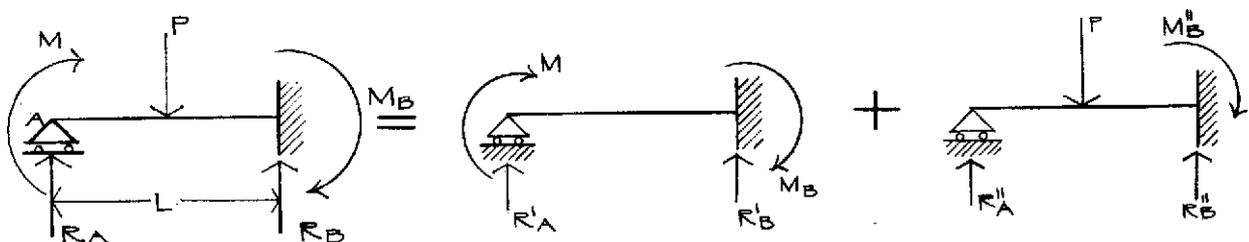


Figura 3.

## 6) Estructuras Articuladas:

Una estructura articulada está compuesta por eslabones o barras, que se suponen conectadas por pasadores carentes de fricción en las juntas, y dispuestas de tal manera que el área que se encuentra encerrada dentro de los contornos de la estructura se subdivide, por las barras, en figuras geométricas que generalmente son triángulos. De lo anterior se deduce que las barras de una estructura articulada se consideran sujetas únicamente a cargas axiales, por lo que su análisis se concreta a determinar los esfuerzos longitudinales de sus elementos.

## 7) Estabilidad Externa y Determinación:

Tenemos que se necesitan tres componentes de reacción, pero no siempre son suficientes, para la estabilidad externa de estructuras en dos dimensiones.

Si el número de componentes de reacción es menor que el número de ecuaciones de equilibrio estático se tiene una estructura externamente inestable. En el caso de que el número de componentes exceda al número de ecuaciones, se tiene una estructura externamente indeterminada hasta el grado para el cual el número de componentes de reacción externa exceda al número de ecuaciones. Es conveniente recordar que cada pasador, colocado en una estructura en una posición tal que haga posible la rotación relativa de las partes de la estructura, suministrará una ecuación adicional para la evaluación de las componentes de reacción, la cual es llamada Ecuación de Condición; dicha ecuación viene a sumarse a las tres ecuaciones de equilibrio estático. Como una ilustración se tienen los siguientes ejemplos:

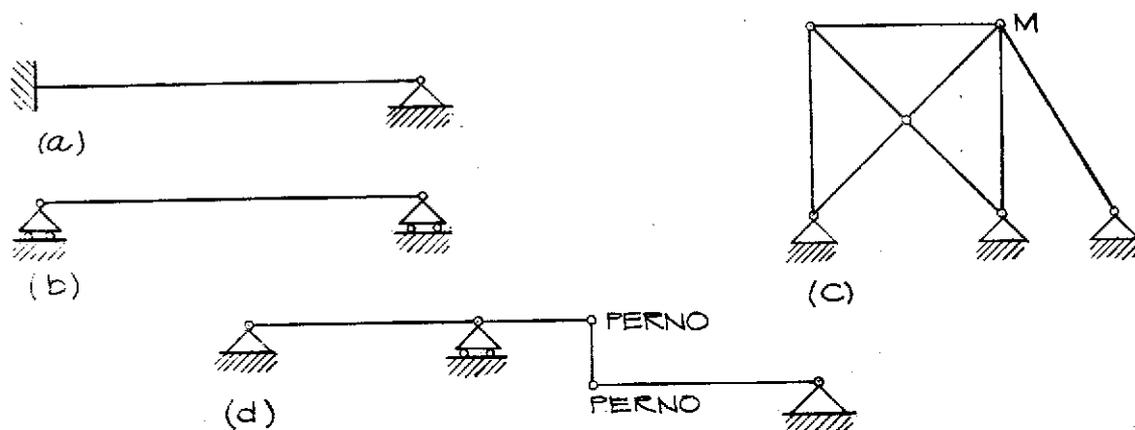


Figura 4.

Para la Figura 4a. se tienen 5 componentes y 3 ecuaciones, luego es externamente indeterminada en segundo grado. La Figura 4b. tiene 2 componentes y 3 ecuaciones, de donde es inestable. En la Figura 4c. hay 6 componentes de reacción teniéndose por otro lado además de las 3 ecuaciones de equilibrio una ecuación de condición alrededor del pasador de la junta M; en total se tienen 4 ecuaciones por lo que la estructura es indeterminada externamente al segundo grado.

Por último, para la Figura 4d. tenemos 5 componentes de reacción y por otro lado 3 ecuaciones de equilibrio mas 2 ecuaciones de condición, así;

- a) Las ecuaciones de equilibrio estático, considerando la estructura como un todo:

$$\sum F_{HOR} = 0 \quad \sum F_{VERT} = 0 \quad \sum M = 0$$

- b) Las ecuaciones de condición, suministradas por los pasadores en cada extremo del eslabón:

- i. En cualquiera de los 2 lados del eslabón debe cumplirse  $\sum M = 0$ , con lo cual se evita que alguna de las partes gire respecto a los pasadores.
- ii. En cualquiera de los 2 lados del eslabón debe cumplirse  $\sum F_{HOR} = 0$ , con lo cual se evita que una de las partes se desplace horizontalmente respecto a la otra.

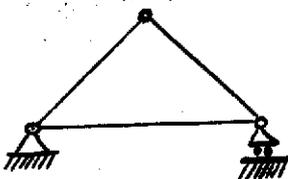
Luego, tenemos 5 reacciones desconocidas y 5 ecuaciones lo cual nos da una estructura estable y determinada externamente.

### 8) Estabilidad Interna y Determinación:

La inestabilidad o estabilidad interna, y la habilidad para determinar que condición existe en un caso dado, es de importancia considerable principalmente para las estructuras articuladas. Por otro lado no debe pasarse por alto que lo que verdaderamente interesa en el análisis es el grado de indeterminación total, es decir la suma de los grados de indeterminación externa e interna.

Principiaremos por establecer el concepto de lo que significa una estructura internamente determinada. Una estructura es determinada internamente si, con todas las componentes de reacciones necesarias para estabilidad externa conocidas y actuando sobre la estructura, es posible determinar todos los esfuerzos internos por la aplicación de las tres ecuaciones de condición para equilibrio estático.

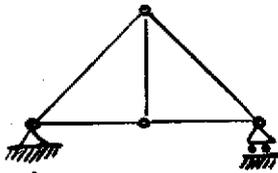
Al estudiar la disposición de las barras de una estructura de nudos articulados observamos, que para que sea rígida se utilizan tres barras para unir tres nudos entre sí en forma de triángulo; esta viene a ser la estructura articulada más simple, estable e indeformable estáticamente determinada:



$$b = \text{Número de barras mínimo} = 3$$

$$n = \text{Número de nudos mínimo} = 3$$

Ahora bien, si a la estructura anterior le aumentamos una barra y un nudo:



$$b_t = \text{Número de barras totales} = 5$$

$$n_t = \text{Número de nudos totales} = 4$$

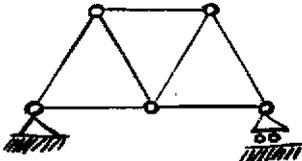
De donde,

$$b_{ex} = \text{Barras extras a las mínimas} = 5 - 3 = 2$$

$$N_{ex} = \text{Nudos extras a los mínimos} = 4 - 3 = 1$$

$$\text{Luego, } \frac{b_{ex}}{N_{ex}} = \frac{2}{1} = 2$$

Si adicionamos a la estructura otras barras y nudos, pero siempre formando armaduras estables e indeformables, tenemos:



$$b_t = 7$$

$$n_t = 5$$

$$b_{ex} = b_t - b = 7 - 3 = 4$$

$$N_{ex} = n_t - n = 5 - 3 = 2$$

$$\text{Luego, } \frac{b_{ex}}{N_{ex}} = \frac{4}{2} = 2$$

Así sucesivamente, llegaremos siempre a que:

$$\frac{b_{ex}}{N_{ex}} = 2$$

$$\frac{b_t - b}{n_t - n} = 2$$

$$\frac{b_t - 3}{n_t - 3} = 2$$

$$b_t - 3 = 2(N_t - 3)$$

$$\text{Si } b_t = b$$

$$b - 3 = 2(j - 3)$$

$$N_t = j$$

Lo anterior dá origen a una ecuación de mucha importancia para el análisis:

$$b = 3 + 2(j - 3)$$

$$b = 2j - 3$$

Donde:

b = número de barras en la estructura  
 j = número de nudos en la estructura.

Si tomamos en cuenta que en la ecuación anterior debe introducirse un término que incluya a las reacciones (no puede pensarse solo en condiciones internas separadas de las componentes de reacción), tenemos que estas deben suponerse consistentes con la estabilidad y determinación externas, ya que de esta manera cualquier indicación de inestabilidad e indeterminación se deberá claramente a las condiciones internas. El valor apropiado para "r" será el número de ecuaciones disponibles para la evaluación de las componentes de reacción necesarias para la estabilidad y determinación externas. Como sabemos, la estructura articulada más simple, estable y determinada nos dice que  $r=3$ .

Luego, la fórmula podría escribirse en una forma más general de la siguiente manera:

$$2j = b + r$$

ó

$$b = 2j - r$$

Donde:

j = número de juntas  
 b = número de barras  
 r = este valor representa el número de componentes de reacción requeridos para la estabilidad y determinación externa: de la estructura esto es independientemente del número de componentes de reacciones que se obtengan por los diferentes soportes de dicha estructura.

Llama particularmente la atención el hecho de que la satisfacción de esta ecuación es una condición necesaria para determinación interna y estabilidad de una estructura articulada, pero no es suficiente. Para entender el significado de esta afirmación considerense los siguientes ejemplos:

Si consideramos la armadura de la Fig. 5, la ecuación nos dá  $24 = 21 + 3 = 24$  ya que hay 12 juntas, 21 barras y 3 componentes de reacción. Ahora, de acuerdo con la ecuación, la estructura es estable y determinada, lo cual así es en la realidad.

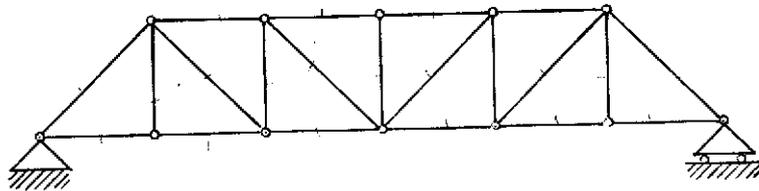


Figura 5.

Ahora analizando la Figura 6 vemos que tiene 13 juntas, 23 barras y 3 componentes de reacción por lo que llegamos a lo siguiente:  $26 = 23 + 3 = 26$ . Nuevamente la ecuación se cumple pero, sin embargo, al observar la estructura notamos que el desplome resultará de la rotación de los miembros del tablero donde no existe diagonal. Luego, la satisfacción de la ecuación anterior no es condición suficiente para la estabilidad interna de una estructura articulada.

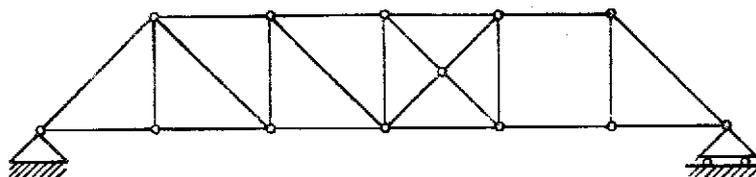


Figura 6

Además, en la Figura 6 es imposible determinar los esfuerzos en las dos diagonales por el uso de las tres ecuaciones de condición para equilibrio estático. Por lo tanto, la estructura es indeterminada internamente al primer grado, además de ser internamente inestable. Consecuentemente, la ecuación de condición dada no es suficiente para determinación interna ni para estabilidad interna.

De lo anterior podría concluirse en que la cuestión de estabilidad e indeterminación interna de una estructura indeterminada puede decidirse más fácilmente por inspección y por consideración de las trayectorias de esfuerzos, y que las ecuaciones requieren poca atención.

Si se desea usar la ecuación mencionada debe recordarse que su verificación significa que la estructura puede ser pero no necesariamente es, determinada y estable internamente; la decisión final de que lo sea o no deberá basarse sobre el sentido común y sobre consideraciones de las trayectorias de esfuerzos. Si la ecuación no se cumple, la estructura es inestable internamente, o indeterminada internamente, o, posiblemente ambas. Si  $b$  es menor que  $(2j - r)$ , la estructura es inestable internamente. Si  $b$  es mayor que  $(2j - r)$ , la estructura es indeterminada internamente de grado indicado por el exceso de  $b$  sobre  $(2j - r)$ . A continuación se dan varios ejemplos para mostrar la aplicación de la ecuación.

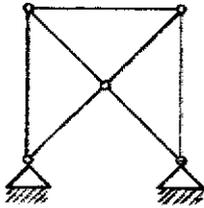


Figura 7

UN APOYO PUEDE CAMBIARSE POR UN RODILLO CONSERVANDOSE AUN LA ESTABILIDAD DE LA ESTRUCTURA.

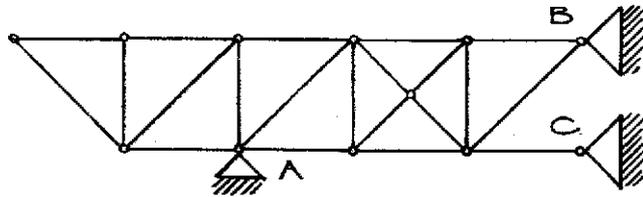


Figura 8

EL APOYO A PUEDE SUPRIMIRSE O POR OTRO LADO LOS APOYOS B Y C PUEDEN TRANSFORMARSE EN RODILLO, CONSERVANDOSE AUN LA ESTABILIDAD.

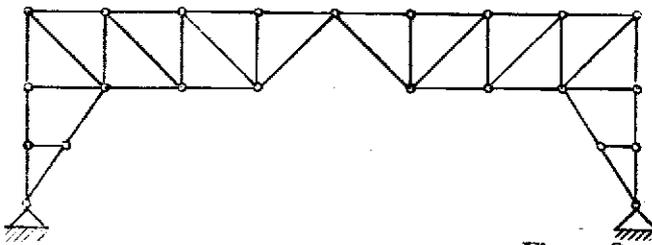


Figura 9.

AQUI LOS APOYOS NO PUEDEN CAMBIARSE POR RODILLOS YA QUE SI SE HACE LA ESTRUCTURA SERIA INESTABLE (GIRA ALREDEDOR DE M).

Considerando la estructura de la Figura 7 tenemos que es indeterminada externamente al primer grado (4 componentes de reacción y 3 ecuaciones de equilibrio estático). Aplicándole la ecuación tenemos: 7 barras, 5 nudos y 3 componentes que le dan estabilidad y determinación externa; luego  $7 = 10 - 3 = 7$ . Así que la condición necesaria para estabilidad y determinación interna se satisfacen. La inspección de la estructura muestra que es determinada internamente y estable. Luego tenemos que si las componentes de reacción ya se conocen, es posible determinar todos los esfuerzos de las barras haciendo uso para el efecto únicamente de las tres ecuaciones de equilibrio estático.

Para la Figura 8 tenemos 21 barras, 12 nudos y 4 componentes mínimas de reacción que aún mantienen a la estructura en una posición estable, luego:  $21 \neq 24 - 4 = 20$ . Tenemos pues que la estructura es internamente indeterminada al primer grado.

Por último con la Figura 9 se tiene que posee 42 barras, 23 juntas y 4 componentes de reacción, de donde:  $42 = 46 - 4 = 42$ . La ecuación nos indica que es una estructura internamente determinada y estable. La inspección así nos lo muestra.

### 9) Indeterminación Externa e Interna Combinadas:

Considerar indeterminación externa o interna de una estructura en forma separada, no tiene en realidad ninguna razón ya que las condiciones externas e internas no pueden separarse entre sí en un análisis.

Tenemos pues que, en el análisis final, es la indeterminación total de la estructura la que interesa. Con este objeto, las ecuaciones consideradas anteriormente deben revisarse en cuanto a su interpretación o a su uso. La ecuación de criterio era:

$$2j = b + r$$

Para la comprobación de la indeterminación total el único valor que cambia en cuanto a significado es "r", el cual ahora debe considerarse como el número total de componentes de reacción. Como ejemplo tenemos la estructura de la Figura 8: posee 21 barras, 12 nudos y 6 componentes de reacción; luego la ecuación de criterio nos dá  $21 - 24 + 6 = 18$  y la estructura es totalmente indeterminada en el tercer grado.

### CAPITULO III

#### **Análisis de Estructuras de Nudos Articulados Estáticamente Determinadas:**

En este capítulo se plantean los métodos existentes para determinar los esfuerzos en cada uno de los miembros de una estructura articulada estáticamente determinada.

Se procederá previamente a calcular las reacciones en los apoyos ya sea usando métodos algebraicos o gráficos. Luego, el trabajo de análisis consiste básicamente en hallar las fuerzas axiales para todas las barras de la estructura, ya que así fácilmente pueden calcularse las intensidades de los esfuerzos en los miembros considerando para el efecto las secciones de las barras.

Antes de entrar de lleno a la Determinación de Esfuerzos en los Miembros considero de suma importancia señalar el criterio de anotación a usar en el desarrollo de este trabajo, lo cual a su vez es conveniente ya que facilita y simplifica el análisis. También se determinará el criterio de signos a usar en el estudio de los esfuerzos en las armaduras.

#### **1) Notación:**

Como se ha dicho anteriormente, lo que se persigue con adoptar una notación para la solución de los problemas de estructuras de nudos articulados es establecer un método para identificar los diversos nudos, barras, cargas y fuerzas; esto se logra empleando la Notación de Bow, la cual consiste en asignar una letra a cada región entre cargas y reacciones, moviéndose en el sentido de las agujas del reloj alrededor de la armadura; igualmente se hace con cada área interior de la estructura articulada (Figura 10). Cabe mencionar aquí que no siempre es imprescindible el uso de la Notación de Bow, ya que el Ingeniero Estructural puede en cualquier momento adoptar la notación que para él sea más sencilla y más clara. Ya hecho lo anterior se tiene que los nudos, barras, cargas y fuerzas se nombran como sigue:

#### **i. Nudos:**

Estos se designan nombrando las letras correspondientes a todas las áreas adyacentes al nudo en el orden dado por el sentido horario. A veces, también se designan con números, lo cual se hace por conveniencia. En la Figura 10 tenemos que el nudo del apoyo izquierdo es el nudo aed.

#### **ii. Barras:**

Estas se especifican nombrando las letras de las dos áreas adyacentes. Por ejemplo, tenemos que la barra vertical sobre la carga P es la barra h i. Si los nudos se han identificado con números, también las barras se pueden identificar citando los números en los nudos de sus extremos.

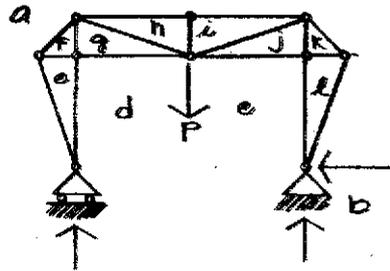


Figura 10

iii. Cargas:

Se especifica una carga leyendo en sentido horario las letras de las dos áreas adyacentes a la carga. El nombre de la carga se anota con letras mayúsculas y con una flecha encima; así en la Figura 10 se tiene que a la carga P se le nombra como CD.

iv. Fuerzas ejercidas por las barras sobre los pasadores:

La fuerza que ejerce una barra sobre un pasador se nombrará leyendo las letras de las dos áreas adyacentes a la barra en sentido horario respecto a la barra. Así se tiene que la fuerza ejercida por la barra gd sobre el nudo defg es nombrada GD.

Para lograr una mayor claridad en la identificación de los diferentes miembros de la estructura se acostumbra, como ya se dijo, designar los nudos con números (Figura 11a); además, también es de gran ayuda el designar las áreas entre reacciones y cargas con letras mayúsculas (Figura 11b) o números romanos (Figura 11c).

En resumen, considero que lo importante no es apegarse a una forma única de notación en las estructuras de nudos articulados sino que adoptar una notación que nos facilite la identificación de los diferentes miembros que intervienen en el análisis; ahora bien, dicha notación debe ser congruente a lo largo de nuestro trabajo de análisis y diseño.

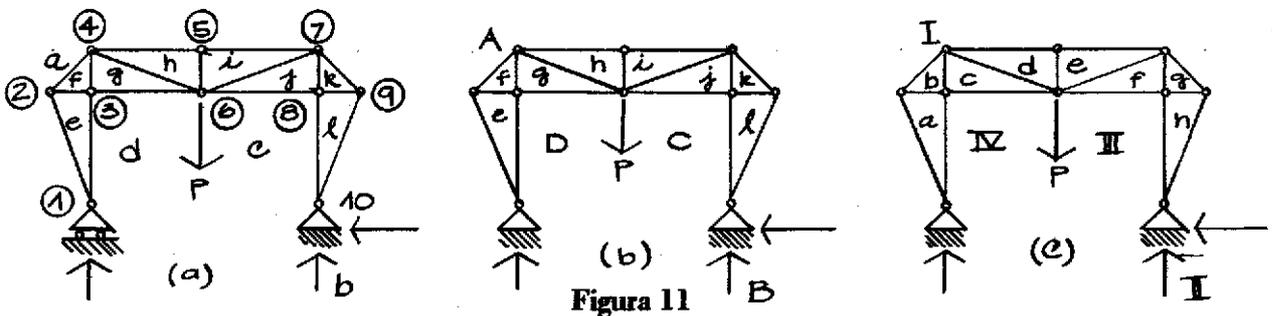


Figura 11

A lo largo del presente trabajo se usará la Notación de Bow con la única variante de que se usarán números para la identificación de los nudos lo cual a su vez nos lleva a identificar las barras con el uso de la numeración de los nudos.

## 2) Criterios de Signos a Usar:

A menudo se escriben los valores de las fuerzas de barras de una estructura articulada en forma de tabla, o bien a lo largo de las distintas barras en un diagrama de la estructura. Debido a lo anterior es conveniente adoptar un criterio definido para designar el carácter del esfuerzo en una barra, esto se hará como sigue: El criterio más conveniente es utilizar un signo más (+) para designar una tracción o tensión y un signo menos (-) para una compresión. Este criterio proviene del hecho que una tracción en la barra produce un alargamiento, o sea un aumento de longitud a la barra. Al contrario, una fuerza de barra de compresión origina una disminución en la longitud inicial de la barra.

Vale también la pena mencionar que el análisis de estructuras de nudos articulados nos lleva a veces a trabajar con las componentes rectangulares de la fuerza misma de la barra; de acuerdo con lo anterior se tienen las siguientes proposiciones:

- a) La componente horizontal (o vertical) de una fuerza de barra es igual a dicha fuerza multiplicada por la relación de la proyección horizontal (o vertical) de la correspondiente barra a la longitud de su eje.
- b) La fuerza de barra en un elemento es igual a su componente horizontal (o vertical) multiplicada por la relación de la longitud del eje del elemento a su proyección horizontal (o vertical).
- c) La componente horizontal de una fuerza de barra es igual a la componente vertical multiplicada por la relación de la proyección horizontal a la vertical de la longitud del eje, o viceversa.

## 3) Determinación de Esfuerzos en los Miembros:

Para entrar de lleno a los métodos de análisis primero tenemos que tener bien claro que una estructura de nudos articulados está compuesta de elementos independientes unidos entre sí de manera que forman una serie de triángulos; además, los nudos se comparten como verdaderas articulaciones, y por último, se supone que las cargas actúan aplicadas en los nudos. De lo anterior se deduce que los elementos de las estructuras articuladas son elementos sin flexión y que están sometidos a esfuerzos longitudinales.

A continuación se habla de los métodos conocidos para la determinación de los esfuerzos y luego, al final se agregan ejemplos para el cálculo de dichos esfuerzos por los distintos métodos.

Básicamente, se cuenta con dos tipos de métodos para la determinación de esfuerzos en los diferentes miembros de una estructura de nudos articulados:

### 3.1 Métodos Algebraicos

#### 3.2 Método Gráfico

#### Métodos Algebraicos:

En este tipo de métodos básicamente lo que se hace es aislar ciertas partes de la estructura cortándola a través de algunas de sus barras y luego considerar las fuerzas a que están sometidas dichas barras como fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo libre que se obtiene. Dicho cuerpo libre se obtiene de dividir en 2 partes la estructura de nudos articulados cortando algunas de sus barras (puede considerarse como cuerpo libre cualquiera de las dos partes en las que ha sido partida la estructura).

El método algebraico nos dá los procedimientos siguientes para determinar los esfuerzos en las barras, y son:

- 3.1.1 Método de los nudos
- 3.1.2 Método de las secciones
- 3.1.3 Método de los momentos y cortantes, el cual es una variante del de secciones.

#### Método Gráfico:

Este método es equivalente al método algebraico de los nudos, solo que por razones de tipo práctico, los polígonos de fuerzas correspondientes a los sistemas que actúan sobre cada nudo se trazan de tal manera que resulte un solo diagrama para los esfuerzos donde puedan medirse a escala todos los desconocidos; es conocido como:

#### 3.2.1 Diagrama de Maxwell.

A continuación se exponen los métodos mencionados anteriormente.

#### METODO DE LOS NUDOS:

En primer lugar habrá que determinar las componentes de las reacciones exteriores considerando toda la estructura de nudos articulados como si fuera un cuerpo libre. A continuación se van estableciendo las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los diagramas de cuerpo libre correspondientes a los distintos nudos siguiendo un orden sucesivo, de tal manera que no se encuentren más de dos fuerzas desconocidas en el nudo correspondiente. Es aconsejable principiar el análisis por el nudo de la izquierda y continuarlo nudo tras nudo hasta llegar a la mitad de la estructura; luego empezar por el nudo de la derecha y en sentido inverso llegar nuevamente al centro de la estructura. Siguiendo el análisis en la forma mencionada podemos llegar a detectar si hemos cometido algún error, ya que al llegar al reencuentro de los análisis hechos desde cada uno de los extremos, deben obtenerse los mismos valores para los nudos centrales. Esta comprobación nos asegurará que la solución está correcta. Es aconsejable que sobre el diagrama de la estructura se indiquen no solamente los esfuerzos en cada barra sino que también sus componentes horizontal y vertical, ya que de esta manera bastará con un golpe de vista para comprobar el equilibrio en cada nudo. La aplicación de este método se puede observar en el Ejemplo 1.

**EJEMPLO 1**

Determinar la magnitud y tipo de esfuerzo en cada una de las barras de la estructura de nudos articulados representada en la Figura 12. Utilizar el método de los nudos.

Primeramente recordemos que el uso del método de los nudos es muy práctico cuando necesitamos obtener los esfuerzos en todas las barras, lo cual se pide en este problema. Es recomendable también el uso de este método cuando hay en el nudo por lo menos un miembro vertical u horizontal.

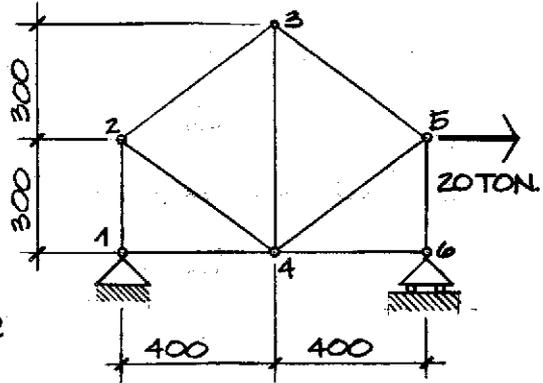
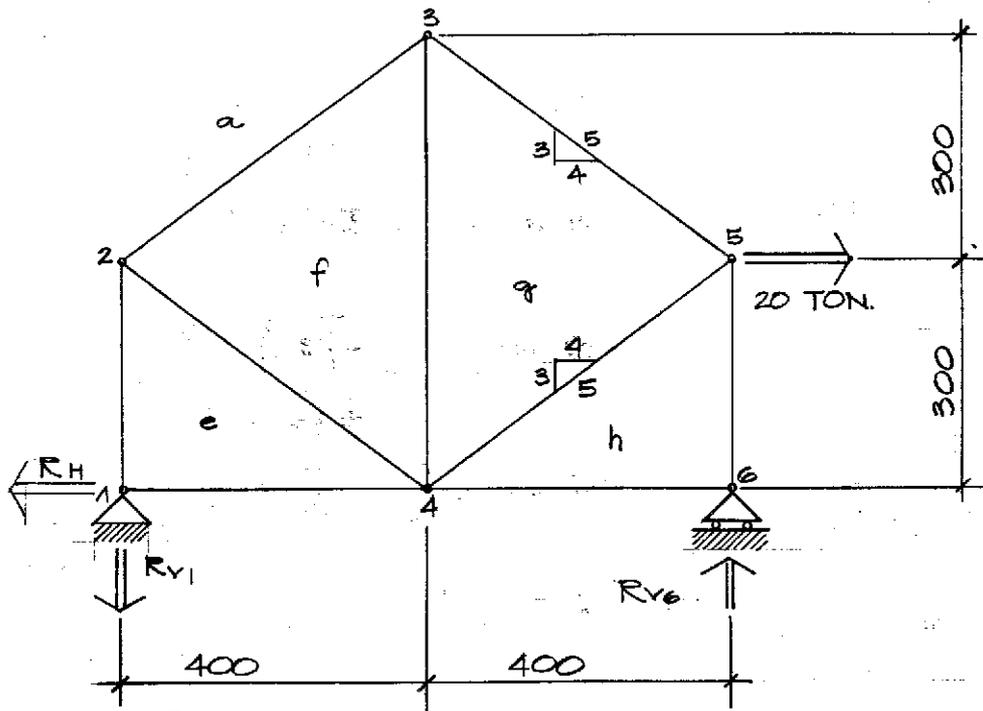


Figura 12

**SOLUCION:**



*(Faint handwritten notes at the bottom left of the solution diagram)*

a) **Determinación:**

$$2j = b + r$$

$$2 \times 6 = 9 + 3$$

$$12 = 12 \quad \text{Es una estructura estáticamente determinada (externa e internamente).}$$

b) **Reacciones:**

$$\sum F_{\text{HORIZ}} = 0 \rightarrow R_H - 20 = 0$$

$$R_H = 20 \text{ TON}$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow 20 \times 3 - R_{V_6} \times 8 = 0$$

$$\therefore R_{V_6} = \frac{20 \times 3}{8}$$

$$R_{V_6} = 7.5 \text{ TON-Mt}$$

$$\sum M_{\odot} = 0 \rightarrow 20 \times 3 - R_{V_1} \times 8 = 0$$

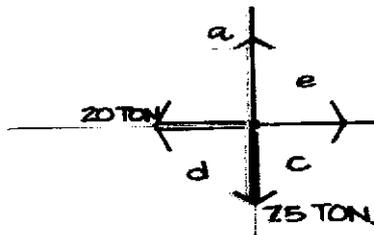
$$\therefore R_{V_1} = \frac{20 \times 3}{8}$$

$$R_{V_1} = 7.5 \text{ TON-Mt}$$

$$\therefore \text{ Sí se cumple } \sum F_{\text{VERT}} = 0$$

c) **Análisis de Nudos:**

## NUDO 1:



$$\sum F_V = 0 \rightarrow \bar{ae} - 7.5 = 0 \Rightarrow$$

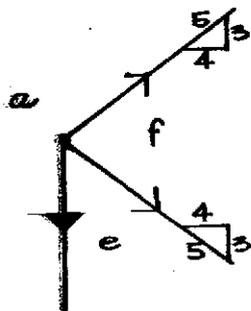
$$\bar{ae} = 7.5 \text{ Ton (tens.)}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow \bar{ec} - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{ec} = 20 \text{ Ton (tens.)}$$

$$\therefore \text{ Sí se cumple } \sum F = 0$$

## NUDO 2:



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow \bar{af} \frac{3}{5} - \bar{fe} \frac{3}{5} - 7.5 = 0$$

$$\frac{3}{5} \bar{af} - \frac{3}{5} \bar{fe} = 7.5 \quad \text{--- (I)}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow \bar{af} \frac{4}{5} + \bar{fe} \frac{4}{5} = 0$$

$$\bar{af} = -\bar{fe} \quad \text{--- (II)}$$

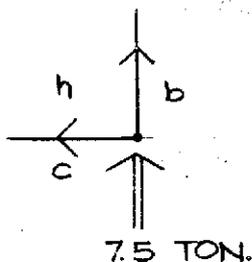
$$\text{En I: } \frac{6}{5} \bar{af} = 7.5 \Rightarrow$$

$$\bar{af} = 6.25 \text{ Ton (tens.)}$$

$$\bar{fe} = -6.25 \text{ Ton (Comp.)}$$

$$\therefore \text{ Sí se cumple } \sum F = 0$$

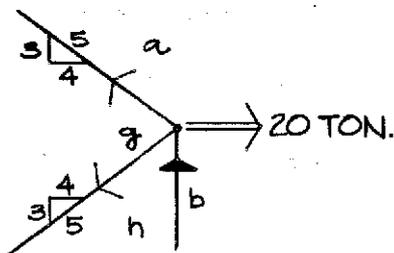
## NUDO 6:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \bar{h}b + 7.5 = 0 \Rightarrow \bar{h}b = -7.5 \text{ Ton (Comp.)}$$

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \bar{c}h = 0$$

## NUDO 5:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \bar{b}h + \frac{3}{5}\bar{g}a - \frac{3}{5}\bar{h}g = 0$$

$$\frac{3}{5}\bar{h}g - \frac{3}{5}\bar{g}a = 7.5 \quad \text{--- (I)}$$

$$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow \frac{4}{5}\bar{h}g + \frac{4}{5}\bar{g}a - 20 = 0$$

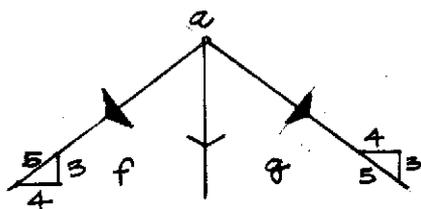
$$\frac{4}{5}\bar{h}g + \frac{4}{5}\bar{g}a = 20 \quad \text{--- (II)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\bar{h}g = 18.75 \text{ Ton (Tens.)}$$

$$\bar{g}a = 6.25 \text{ Ton (Tens.)}$$

## NUDO 3:

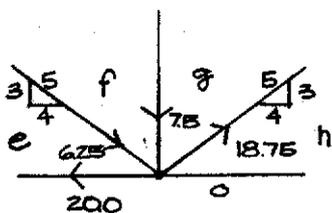


$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}\bar{f}a + \frac{3}{5}\bar{a}g + \bar{f}g = 0$$

$$\bar{f}g = -\frac{3}{5}(\bar{f}a + \bar{a}g)$$

$$\bar{f}g = -7.5 \text{ Ton (Comp.)}$$

## NUDO 4:



Este nudo únicamente se utiliza como chequeo para determinar si permanece en equilibrio con los valores obtenidos para los distintos elementos en los análisis precedentes.

$$\begin{aligned}\sum F_v = 0 &\Rightarrow \frac{3}{5}(\bar{q}h - \bar{e}f) - \bar{f}g = 0 \\ \frac{3}{5}(18.75 - 6.25) - 7.5 &= 0 \\ 7.5 - 7.5 &= 0 \quad \text{OK.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_H = 0 &\Rightarrow \frac{4}{5}(18.75 + 6.25) - 20 = 0 \\ 20 - 20 &= 0 \quad \text{OK.} \end{aligned}$$

#### Observaciones:

- a) Es más práctico asumir desde un principio que todas las cargas halan al ~~nudo~~, luego los signos en los resultados de los análisis nos indicarán lo siguiente:
  - i. Positivo nos indica que el elemento está sometido a fuerzas de ~~tensión~~.
  - ii. Negativo nos indica que el elemento está sometido a fuerzas de ~~compresión~~.
- b. Es conveniente analizar los nudos de tal manera que siempre se tengan 2 esfuerzos desconocidos en cada uno de los siguientes.
- c) Para lograr un chequeo de los valores obtenidos, es conveniente hacer el análisis empezando con los nudos colocados en los extremos para luego llegar a los nudos centrales, en los cuales debe verificarse que  $\sum F = 0$

#### METODO DE LAS SECCIONES:

El método de las secciones consiste en trazar una sección que corte tres barras de la estructura y luego aplicar las tres ecuaciones de la estática a una cualquiera de las dos partes en que queda dividida, considerada esta parte como un cuerpo libre. Se tiene que en general, el sistema de fuerzas actuantes sobre el cuerpo libre considerado no es concurrente ni paralelo, por lo que podrán ser determinados los valores de los esfuerzos desconocidos en las tres barras cortadas.

Es importante mencionar que si luego de obtener los esfuerzos en los miembros encontramos alguno con signo negativo, esto nos indica que lo asumido al iniciar el análisis en cuanto al tipo de esfuerzo actuante sobre el elemento está equivocado; así tenemos que si se asume un elemento a tensión y luego de efectuado el análisis se obtiene un valor con signo negativo, esto nos indica que dicho elemento está realmente trabajando a compresión.

Tómese en cuenta que en la Fig. 13b, cualquiera de los esfuerzos desconocidos puede determinarse independientemente, a partir de la expresión del momento respecto al punto de intersección de los otros dos esfuerzos desconocidos.

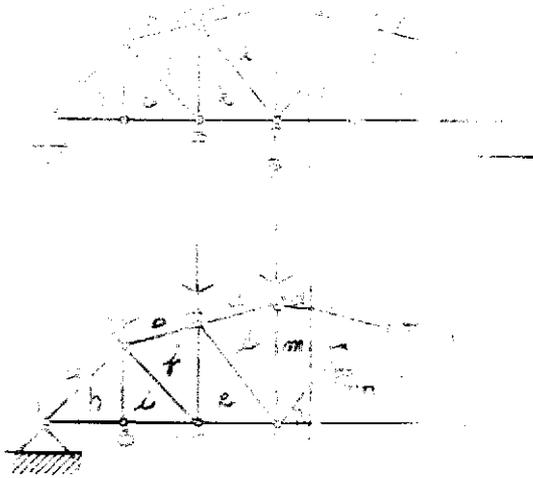


Figura 13

El método de las secciones es especialmente práctico en el caso que sólo sea necesario calcular los esfuerzos en algunas barras de la estructura de nudos articulados. En el caso de tener un nudo con por lo menos uno de los esfuerzos desconocidos en sentido vertical u horizontal, conviene aplicar el método de los nudos. El ejemplo 2 nos ilustra la aplicación de este método.

### EJEMPLO 2

Determinar la magnitud y el tipo de esfuerzo en cada una de las barras de la estructura de nudos articulados representada en la Figura 14. Usar el método de las secciones.

Antes de principiar con la solución del problema debemos tomar muy en cuenta que el método de secciones es utilizado con mucha práctica en problemas en los cuales únicamente necesitamos averiguar las cargas en ciertos miembros de la estructura; apesar de lo anterior en nuestro ejemplo hallaremos todas las cargas en los diferentes miembros de la estructura planteada con lo cual se logrará una mejor interpretación del método en mención.

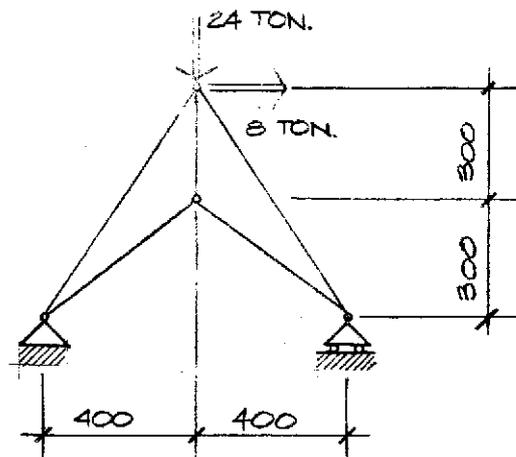
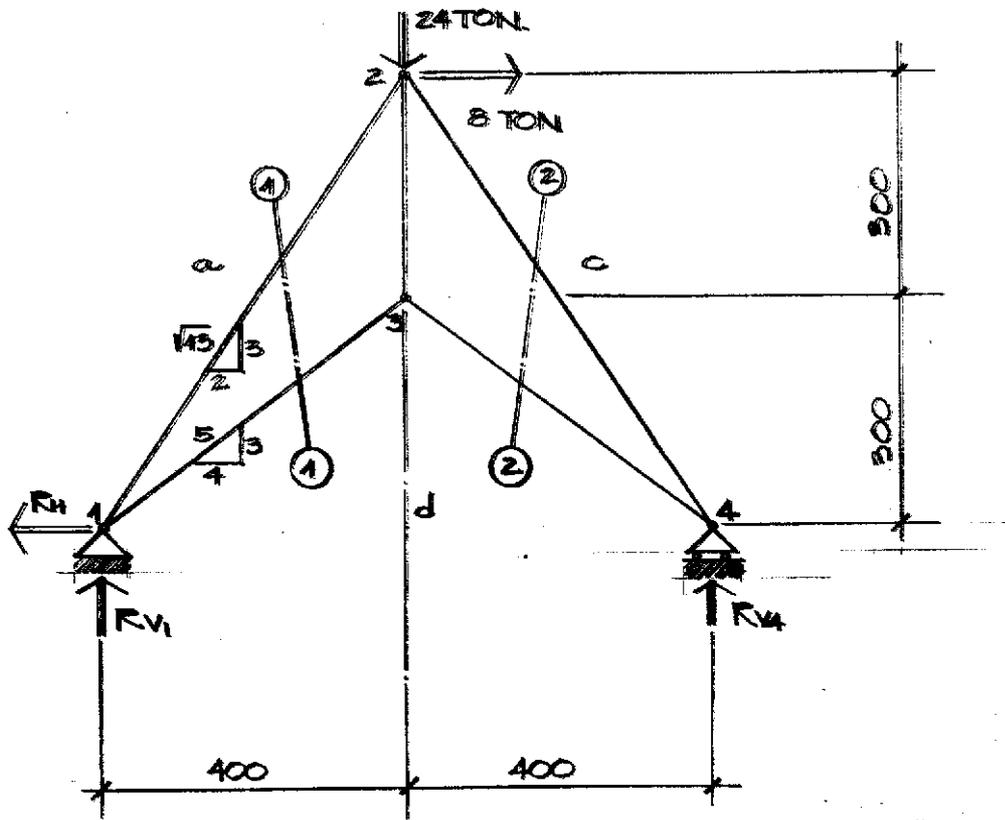


Figura 14

SOLUCION:



a) Determinación:

$$2j = b + r$$

$$2 \times 4 = 5 + 3$$

8 = 8 Es una estructura estáticamente determinada (externa e internamente).

b) Reacciones:

$$\sum F_{\text{HOR}} = 0 \Rightarrow R_H - 8 = 0 \Rightarrow R_H = 8 \text{ TON.}$$

$$\sum M_{\odot} = 0 \Rightarrow 8 R_{V4} = (8 \times 6) + (24 \times 4) \therefore R_{V4} = \frac{48 + 96}{8}$$

$$\Rightarrow R_{V4} = 18 \text{ TON.}$$

$$\sum M_{\odot} = 0 \Rightarrow 8 R_{V1} + (8 \times 6) = (24 \times 4) \therefore R_{V1} = \frac{96 - 48}{8}$$

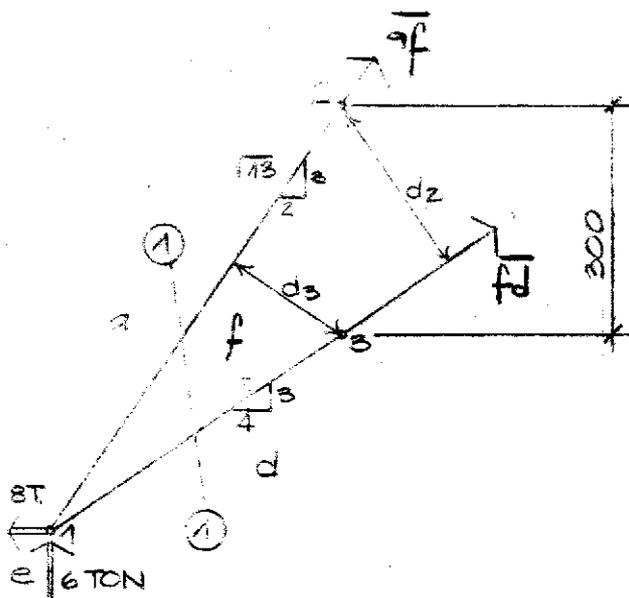
$$\Rightarrow R_{V1} = 6 \text{ TON.}$$

\(\therefore\) Sí se cumple

$$\sum F = 0$$

## e) Análisis de Secciones:

## Sección 1-1:



$$d_2 = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$d_3 = 3 \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$\sum M_{\odot} = 0:$$

$$\overline{f_d} \left( \frac{12}{5} \right) = (8 \times 6) + (6 \times 4)$$

$$\overline{f_d} = 30 \text{ Ton. (tens.)}$$

$$\sum M_{\ominus} = 0:$$

$$a_f \left( \frac{6}{\sqrt{13}} \right) = (-6 \times 4) + (-8 \times 3)$$

$$a_f = -28.8 \text{ Ton. (Compr.)}$$

Nota: En el caso de miembros inclinados es conveniente descomponer las fuerzas en sus componentes vertical y horizontal (ver análisis sección 2-2).

## Sección 2-2:

$$\sum M_{\odot} = 0:$$

$$3 \overline{d g}_H = 18 \times 4 \Rightarrow \overline{d g}_H = 24 \text{ Ton.}$$

$$\overline{d g}_V = 24 \times \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{d g}_V = 18 \text{ Ton.}$$

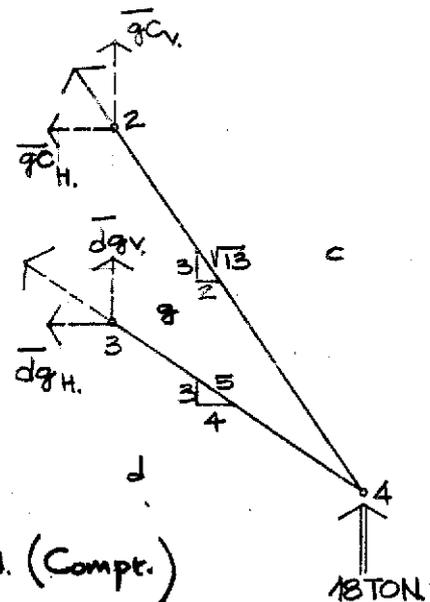
$$\overline{d g} = 24 / \left( \frac{4}{5} \right) \Rightarrow \overline{d g} = 30 \text{ Ton. (tens.)}$$

$$\sum M_{\ominus} = 0:$$

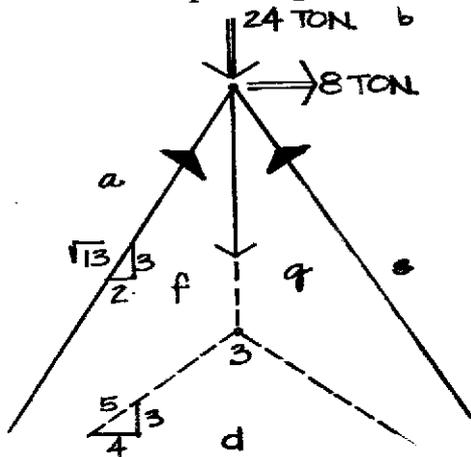
$$3 \overline{g c}_H = -18 \times 4 \Rightarrow \overline{g c}_H = -24 \text{ Ton.}$$

$$\overline{g c}_V = -24 \left( \frac{3}{4} \right) \Rightarrow \overline{g c}_V = -36 \text{ Ton.}$$

$$\overline{g c} = -24 / \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \Rightarrow \overline{g c} = -43.2 \text{ Ton. (Compr.)}$$



Ahora, para la determinación de la magnitud y tipo de esfuerzo en el miembro 2-3 bastará con un cuerpo libre para el nudo 2; así tenemos:



$$\Sigma F_v = 0$$

$$\bar{F}_f = F_a \left( \frac{3}{\sqrt{13}} \right) + C_g \left( \frac{3}{\sqrt{13}} \right) - 24$$

Substituyendo los valores ya conocidos:

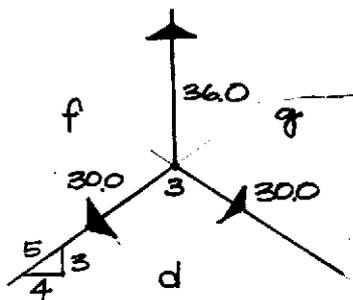
$$\bar{F}_f = 36 \text{ Ton (tens.)}$$

Como comprobación tomemos el nudo 3 y verifiquemos si se encuentra en equilibrio:

$$\Sigma F_v = 0:$$

$$30 \left( \frac{3}{5} \right) + 30 \left( \frac{3}{5} \right) - 36 = 0$$

$$36 - 36 = 0 \quad \text{OK.}$$



$$\Sigma F_H = 0:$$

$$30 \left( \frac{4}{5} \right) - 30 \left( \frac{4}{5} \right) = 0$$

$$24 - 24 = 0 \quad \text{OK.}$$

#### Observaciones:

- a) Como se ve en el ejemplo desarrollado, es posible hacer el análisis de secciones considerando las fuerzas sobre los miembros inclinados con dicha inclinación lo cual nos dá cierto grado de dificultad (sección 1-1). Ahora bien, es mucho más sencillo considerar las fuerzas inclinadas como descompuestas en sus componentes vertical y horizontal (sección 2-2).

- b) Deberá chequearse siempre, como una comprobación, el equilibrio de fuerzas en cada nudo.
- c) Es conveniente hacer notar que en algunas estructuras se nos facilitara el análisis si se usa el método de los nudos y el de secciones combinados convenientemente. Como ilustración véase la estructura mostrada en el ejemplo 3, la cual unicamente será discutida.

### EJEMPLO 3

Plantear la forma de análisis para determinar las fuerzas de todas las barras de la armadura representada en la figura 15.

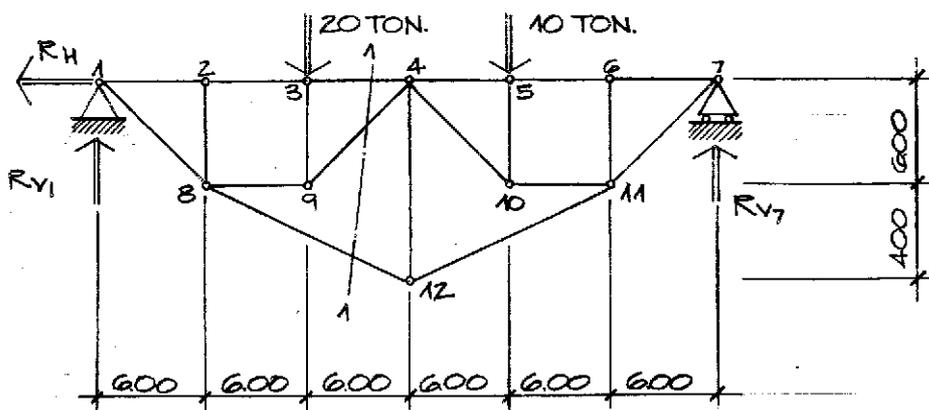


Figura 15

#### Planteo de Solución:

Como paso inicial debe chequearse la determinación total de la estructura; luego determinar las distintas reacciones a las que está sometida dicha estructura.

El análisis propiamente dicho puede plantearse de la siguiente manera:

- i) Aplicar el método de los nudos sucesivamente a los nudos 1, 2, 6 y 7. (Si se quiere aplicar este método a los restantes, se ve que es imposible pues hay más de dos fuerzas de barra desconocidas en cada uno de ellos).
- ii) Usar el método de secciones (sección 1-1) para determinar la fuerza de la barra 8-12 considerando la parte izquierda de la sección 1-1.
- iii) Aplicar el método de los nudos al nudo 8 y, sucesivamente, a cada uno de los restantes.

**Observaciones:**

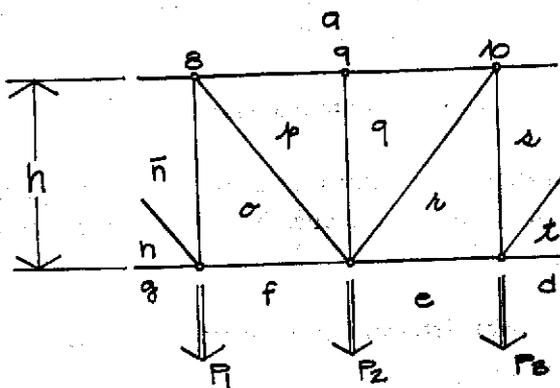
- a) Vemos que tanto en el método de los nudos como en el de las secciones, para el estudio de los esfuerzos en una estructura, hay que aislar partes de la misma.
- b) Podemos deducir que la experiencia enseña a combinar estos dos métodos para obtener una mayor eficiencia.
- c) Al aplicar el método de los nudos o el de las secciones, es importante constatar que no importa cuántas barras con fuerzas conocidas se cortan, sino que solo tiene importancia el número de fuerzas de barra desconocidas.

**METODO DE LOS MOMENTOS Y CORTANTES:**

Como ya se dijo anteriormente, este método es una variante del Método de las Secciones. Se tiene que el comportamiento de una estructura de nudos articulados sometida a la acción de cargas verticales es semejante al de una viga. El cordón superior está sometido a un esfuerzo de compresión mientras el inferior lo está a uno de tensión; en cuanto a las barras transversales son las que han de resistir los esfuerzos cortantes.

Para la obtención de los diferentes esfuerzos en la estructura articulada puede procederse de la siguiente manera:

1. Si se quieren determinar los esfuerzos en los cordones superior e inferior de una estructura de nudos articulados, debe primero escogerse, en una forma adecuada, cada uno de los nudos y encontrar el momento que hay en ellos. Luego basta con hacer un adecuado uso de las ecuaciones de la estática, así: (ver Figura 16).



BARRA 9-10: (y 8-9)

$$P_{9-10} = \frac{M_{10}}{h} (= P_{8-9})$$

BARRA 15-16

$$P_{15-16} = \frac{M_{10}}{h}$$

Figura 16

- (1) El momento respecto a cualquier nudo puede obtenerse considerando como cuerpo libre cualquiera de las 2 partes en que la sección divide a la estructura.

- (2) Es fácil notar por simple inspección que el cordón superior está comprimido y que el inferior está tensionado.
2. En cuanto a los esfuerzos en las diagonales se tiene que son iguales al esfuerzo cortante en la sección (este valor representa a la componente vertical del esfuerzo en la diagonal) multiplicado por el valor de la secante del ángulo que la diagonal forma con la vertical. En cuanto a signos y tipo de esfuerzo tenemos:
- (1) Si el esfuerzo cortante en la sección es positivo, implica que la diagonal está a compresión.
  - (2) Si el esfuerzo cortante en la sección es negativo, implica que la diagonal está a tensión.
  - (3) Muchas veces es mucho más sencillo determinar el tipo de esfuerzo por simple inspección.
3. Para los elementos verticales se tiene que el esfuerzo es igual en valor absoluto al esfuerzo cortante en la sección mientras que el tipo de esfuerzo ha de determinarse por inspección.

Es de mucha importancia el aclarar que si el cordón superior o el inferior (o a veces los dos) cortados por la sección son inclinados, la componente vertical del esfuerzo en una barra transversal es igual al esfuerzo cortante en la sección modificado por la componente vertical del esfuerzo en la barra del cordón inclinado.

Basándonos en que los cordones han de resistir el momento de flexión y las barras transversales el esfuerzo cortante en una sección cualquiera, podemos hallar los esfuerzos en todas las barras de una estructura de nudos articulados. Ya obtenidos los valores por los procedimientos enumerados con anterioridad, se pueden comprobar los resultados verificando el equilibrio en cada nudo ( $\sum F = 0$ ).

El ejemplo 4 nos clarifica la aplicación de este método.

#### **EJEMPLO 4**

Determinar la magnitud y el tipo de esfuerzo en cada una de las barras del entramado que se representa en la Figura 17 usando el Método de los Momentos y Cortantes.

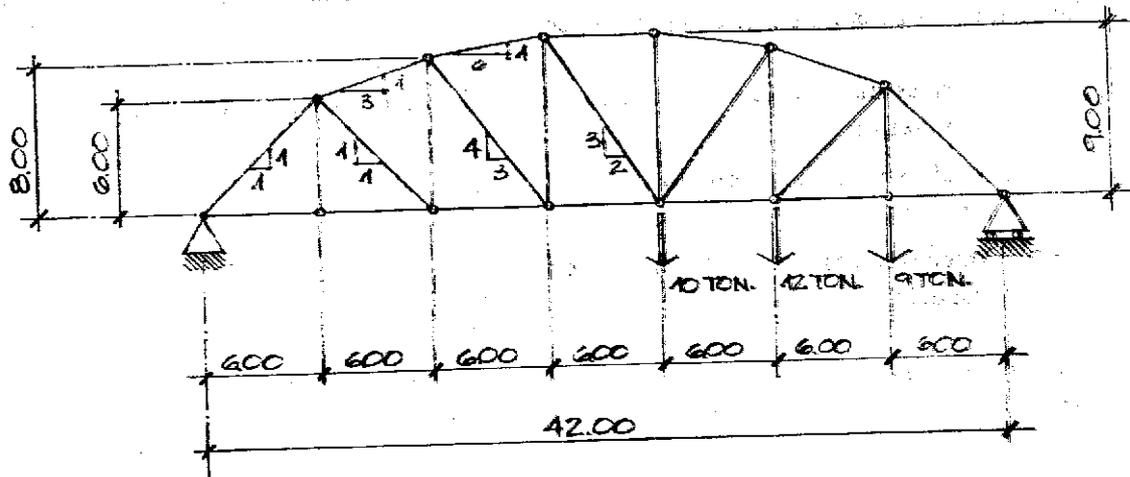


Figura 17

**SOLUCION:**

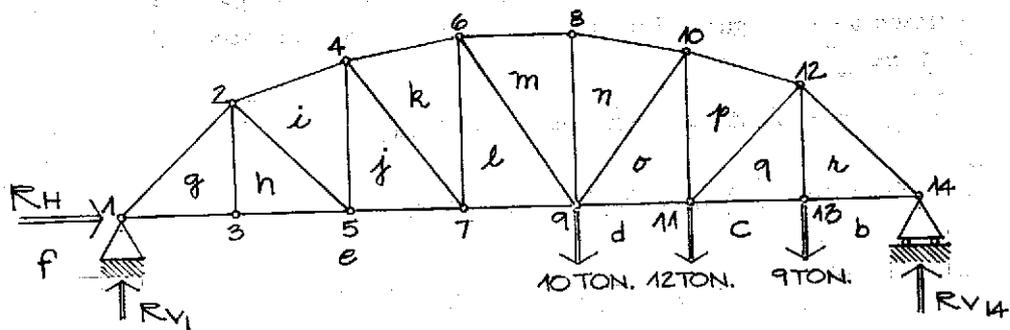
**a) Determinación:**

$$2j = b + r$$

$$2 \times 14 = 25 + 3$$

28 = 28 Es una estructura estáticamente determinada (externa o internamente).

**b) Reacciones:**



$$\Sigma F_{HOR} = 0 \Rightarrow R_H = 0.$$

$$\Sigma M_{\textcircled{1}} = 0 \Rightarrow 42 R_{V_1} = (10 \times 24) + (12 \times 30) + (9 \times 36)$$

$$R_{V_1} = 22 \text{ Ton.}$$

$$\Sigma M_{\textcircled{2}} = 0 \Rightarrow 42 R_{V_2} = (10 \times 18) + (12 \times 12) + (9 \times 6)$$

$$R_{V_2} = 9 \text{ Ton.}$$

De lo anterior tenemos que sí se cumple:

$$\Sigma F_{HOR} = 0$$

$$\Sigma F_{VER} = 0$$

c) Análisis de los Momentos y Cortantes:

1. Cordón superior e inferior:

En vista que en este problema el cordón superior es casi en su totalidad de elementos inclinados, es mucho más sencillo determinar primero las componentes horizontales de los esfuerzos en las barras; lo cual se hace también tomando suma de momentos en los nudos. Así tenemos para cada tramo los siguientes valores:

$$\bar{a}_{g_{HOR}} = \frac{M_{\textcircled{3}}}{h} = \frac{9 \times 6}{6} = 9 \text{ Ton} \Rightarrow \bar{a}_g = 12.7 \text{ Ton. (Comp.)}$$

$$\bar{g}_e = \bar{h}_e = \frac{M_{\textcircled{2}}}{h} = \frac{9 \times 6}{6} = 9 \text{ Ton} \Rightarrow \bar{g}_e = \bar{h}_e = 9 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\bar{j}_e = \frac{M_{\textcircled{4}}}{h} = \frac{9 \times 12}{8} = 13.5 \text{ Ton} \Rightarrow \bar{j}_e = 13.5 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\bar{a}_{i_{HOR}} = \frac{M_{\textcircled{5}}}{h} = \frac{9 \times 12}{8} = 13.5 \text{ Ton} \Rightarrow \bar{a}_i = 14.2 \text{ Ton. (Comp.)}$$

$$\bar{l}_e = \frac{M_{\textcircled{6}}}{h} = \frac{9 \times 18}{9} = 18 \text{ Ton} \Rightarrow \bar{l}_e = 18 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\overline{aK}_{\text{HOR}} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{9 \times 18}{9} = 18 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aK} = 18.3 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\overline{aM} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{9 \times 24}{9} = 24 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aM} = 24 \text{ Ton. (Compt.)}$$

$$\overline{aN}_{\text{HOR}} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = 24 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aN} = 24.3 \text{ Ton. (Compt.)}$$

$$\overline{aD} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{(9 \times 30) - (10 \times 6)}{8} = 26.3 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aD} = 26.3 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\overline{aP}_{\text{HOR}} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{(9 \times 30) - (10 \times 6)}{8} = 26.3 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aP} = 27.7 \text{ Ton. (Compt.)}$$

$$\overline{cQ} = \overline{bR} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{22 \times 6}{6} = 22 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{cQ} = \overline{bR} = 22 \text{ Ton. (Tens.)}$$

$$\overline{aR}_{\text{HOR}} = \frac{M_{\text{O}}}{h} = \frac{22 \times 6}{6} = 22 \text{ Ton} \Rightarrow \overline{aR} = 31.1 \text{ Ton. (Compt.)}$$

## 2. Elementos verticales:

Para determinar los esfuerzos en estos elementos primero deben obtenerse los que sean posibles a partir de la condición  $\sum F_y = 0$ , de donde tenemos:

NUDO 3:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \overline{gh} = 0$$

NUDO 8:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \overline{mN} = \overline{aN}_{\text{VERT}}$$

$$\overline{mN} = 24.3 \left( \frac{1}{6.1} \right)$$

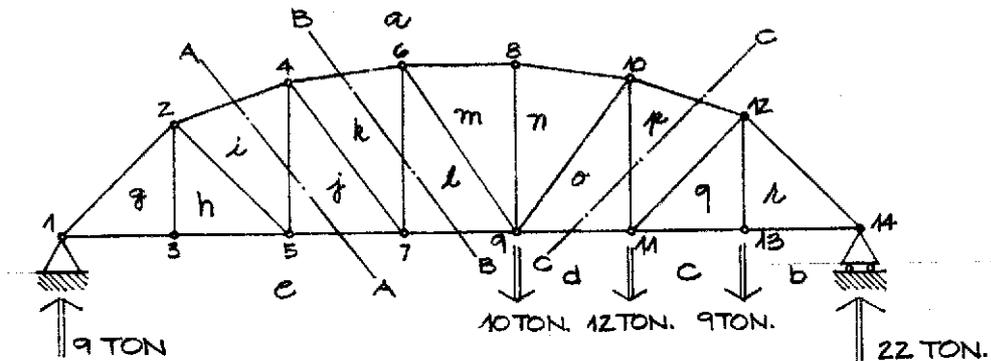
$$\overline{mN} = 4 \text{ Ton (Tens.)}$$

NUDO 13:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \overline{qR} = 9 \text{ Ton (Tens.)}$$

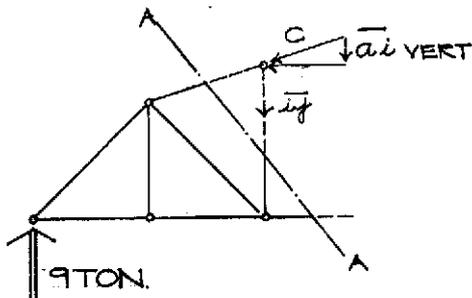
Para los otros miembros verticales basta con hallar el cortante en la sección que corta 3 elementos de la estructura (uno de ellos es el miembro vertical), para lo cual debe considerarse la

componente vertical del esfuerzo en los cordones superior e inferior, las reacciones y las cargas externas. Puede tomarse cualquiera de los 2 lados en que la sección divide a la estructura. Así:



#### 2.4 Sección A-A:

Tomando la parte izquierda,



$$\bar{i}_j + \bar{a}_i \text{ VERT} = 9$$

$$\bar{i}_j = 9 - 14.2 \left( \frac{2}{6.3} \right)$$

$$\bar{i}_j = 4.5 \text{ Ton. (Comp.)}$$

#### 2.5 Sección B-B:

Tomando la parte izquierda,

$$\bar{k}_l + \bar{a}_k \text{ VERT} = 9$$

$$\bar{k}_l = 9 - 18.3 \left( \frac{1}{6.1} \right)$$

$$\bar{k}_l = 6 \text{ Ton (Comp.)}$$

## 2.6 Sección C-C:

Tomando parte derecha,

$$\overline{OP} + \overline{OP}_{VER} + 12 + 9 = 22$$

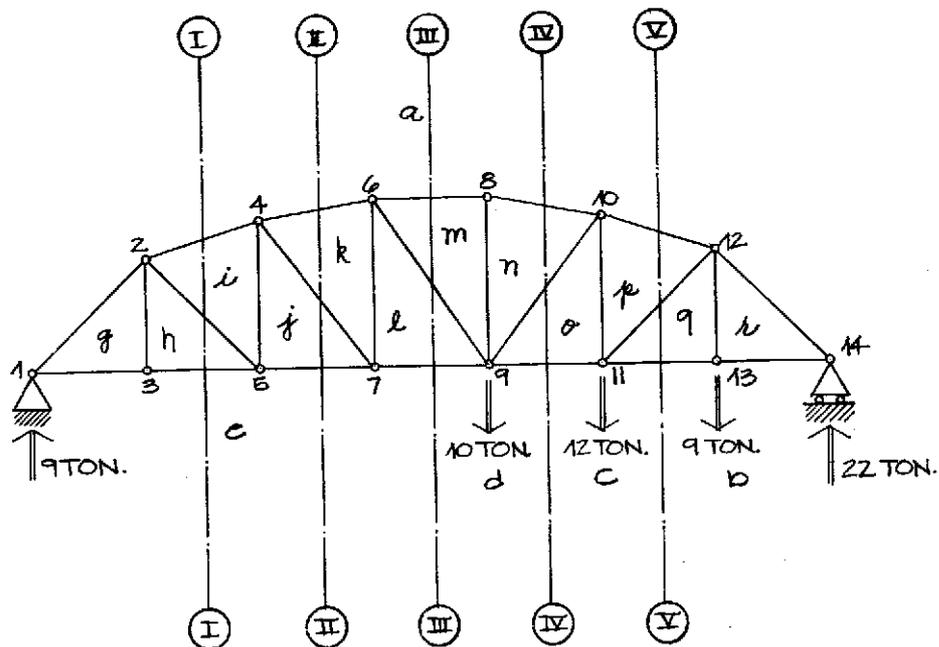
$$\overline{OP} = 22 - 12 - 9 - 27.7 \left( \frac{2}{6.3} \right)$$

$$\overline{OP} = 7.8 \text{ Ton. (Tens.)}$$

## 3. Elementos Transversales (inclinados):

Para los esfuerzos en estos elementos podemos proceder así:

- Trazar una sección que corte 3 elementos de la estructura, siendo uno de ellos un elemento diagonal.
- Aplicar  $\sum F_y = 0$  y obtener el esfuerzo cortante en la sección, para lo cual puede tomarse cualquiera de las 2 partes en que la estructura queda dividida debido a la sección.
- No debe olvidarse el considerar la componente vertical del cordón inclinado (superior, inferior o ambos). Así se tiene:



## 3.1 Sección I-I:

Tomando la parte izquierda,

$$\overline{a_i}_{VER} + \overline{h_i}_{VER} = 9$$

$$\overline{h_i}_{VER} = 9 - 14.2 \left( \frac{2}{6.3} \right)$$

$$\overline{h_i}_{VER} = 4.5 \text{ Ton}$$

$$\therefore \overline{h_i} = 6.4 \text{ Ton. (Tens.)}$$

## 3.2 Sección II-II:

Tomando la parte izquierda,

$$\overline{a_k}_{VER} + \overline{k_j}_{VER} = 9$$

$$\overline{k_j}_{VER} = 9 - 18.3 \left( \frac{1}{6.1} \right)$$

$$\overline{k_j}_{VER} = 6 \text{ Ton.}$$

$$\therefore \overline{k_j} = 7.5 \text{ Ton. (Tens.)}$$

## 3.3 Sección III-III:

Tomando la parte izquierda,

$$\overline{m_l}_{VER} = 9 \text{ Ton.}$$

$$\therefore \overline{m_l} = 10.8 \text{ Ton (Tens.)}$$

## 3.4 Sección IV-IV:

Tomando la parte izquierda,

$$\overline{a_n}_{VER} + \overline{n_o}_{VER} + 9 = 10$$

$$\overline{n_o}_{VER} = 10 - 9 - 24.3 \left( \frac{1}{6.1} \right)$$

$$\overline{n_o}_{VER} = -3 \text{ Ton.}$$

$$\therefore \overline{n_o} = 3.8 \text{ Ton. (Compr.)}$$

## 3.5 Sección V-V:

Tomando la parte derecha,

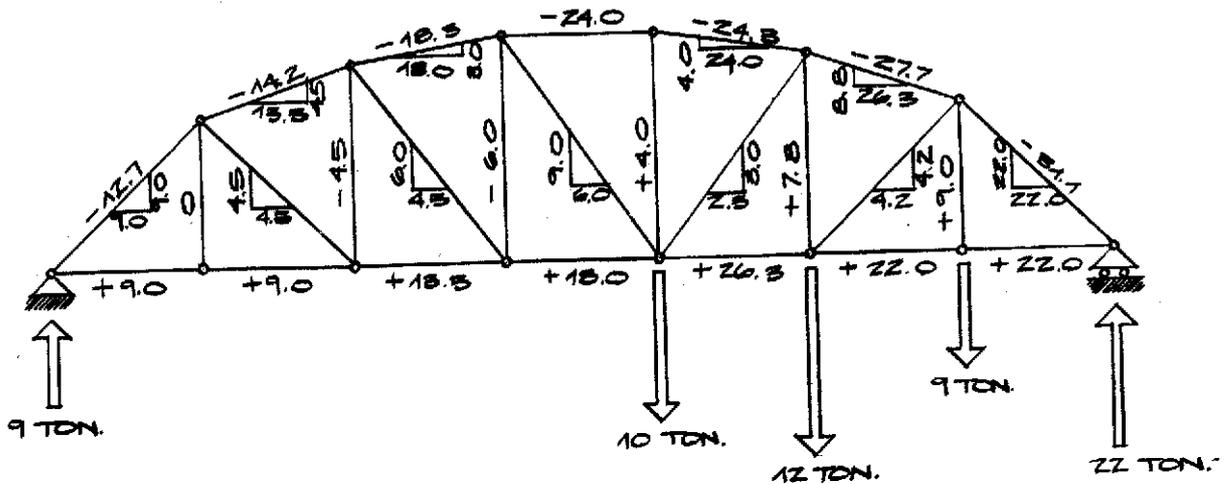
$$\overline{aP}_{VER} + \overline{Pq}_{VER} + q = 22$$

$$\overline{Pq}_{VER} = 22 - 9 - 27.7 \left(\frac{2}{6.3}\right)$$

$$\overline{Pq}_{VER} = 4.2 \text{ Ton}$$

$$\therefore \overline{Pq} = 6 \text{ Ton (Tens.)}$$

Ya encontradas todas las cargas en los miembros de la estructura debe chequearse para c/nudo  $\sum F = 0$ . Este chequeo se facilita enormemente con solo ir anotando en un esquema de la estructura articulada, los valores de las componentes de las fuerzas en dichos miembros; esto puede irse haciendo a lo largo del desarrollo del problema, para el final poder obtener lo siguiente:



## Observaciones:

- a) Al aplicar el Método de los Momentos y Cortantes es conveniente analizar los miembros en el orden siguiente:
  - i. Cordon superior e inferior, mediante suma de momentos respecto a uno de los nudos.
  - ii. Cordones verticales y diagonales, mediante suma de cortantes en la seccion o mediante suma de fuerzas.

- iii. Verificar el equilibrio de cada nudo.
- b) Es conveniente ir preparando en el transcurso del análisis, una estructura en la cual se indiquen las componentes (vertical y horizontal) de los esfuerzos de los distintos elementos; de esta manera será mucho más sencillo verificar al final el equilibrio de fuerzas para cada nudo.

### DIAGRAMA DE MAXWELL:

Como base para un análisis gráfico de estructuras articuladas puede emplearse el Método de los Nudos, ya que este es el que nos dá un diagrama resultante conocido como Diagrama de Maxwell.

Para poder dibujar directamente el Diagrama de Maxwell de una estructura de nudos articulados se enumera la siguiente serie de pasos a seguir:

- 1) Adoptar una nomenclatura determinada; identificando tanto las regiones interiores como las exteriores, los nudos de la estructura, etc.
- 2) DEterminar las reacciones de la estructura, valiéndose de cualquier método conocido.
- 3) Dibujar a escala el polígono de fuerzas externas para la armadura completa; aquí es conveniente seleccionar las fuerzas externas en sentido horario.
- 4) Dibujar un polígono de fuerzas para cada nudo, lo cual se hace sobre el polígono de fuerzas externas estudiando sucesivamente aquellos sobre los que actúen solo dos fuerzas desconocidas. Para este polígono de fuerzas de cada nudo se trazan, sobre los puntos ya determinados con las fuerzas externas, líneas paralelas a los elementos considerados hasta que estas se intersecten en un nuevo punto.
- 5) Se puede medir ahora, en el Diagrama de Maxwell, el módulo de las fuerzas en cada barra. Para determinar si una barra trabaja a tensión o a compresión, determinamos si está tirando o empujando a cualquiera de los dos nudos que une; para esto hay que identificar al elemento de la estructura con una "lectura" de las regiones adyacentes a él (en sentido horario), luego vamos al polígono de fuerzas y localizamos la "lectura" comparando si en el polígono está empujando (compresión) o tirando (tensión) del nudo.

El ejemplo 5 nos ilustra la aplicación del Método Gráfico de Maxwell.

### EJEMPLO 5:

Determinar magnitud y tipo de esfuerzo en los elementos de la estructura mostrada en la Figura 18. Usar para el desarrollo del problema el Método Gráfico de Maxwell.

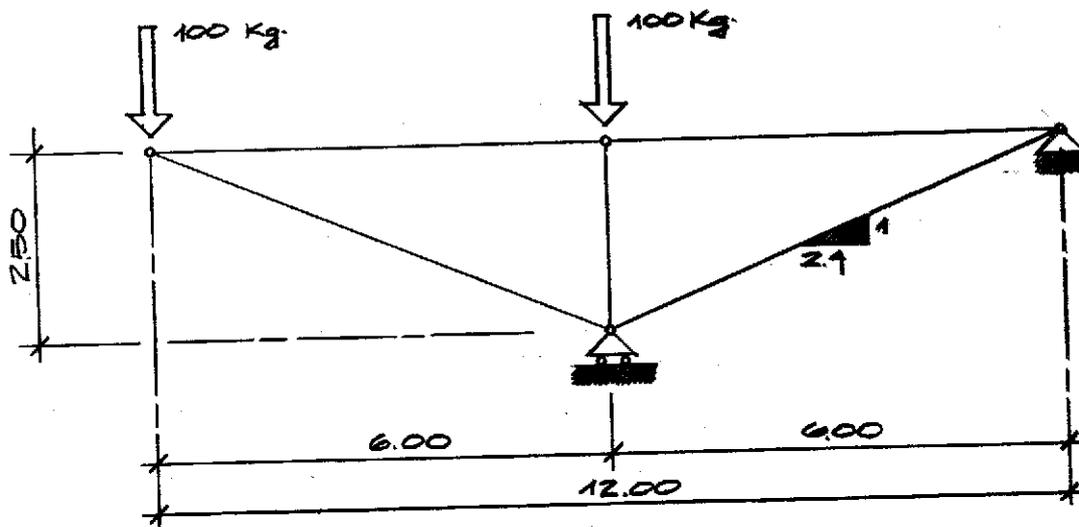


Figura 18

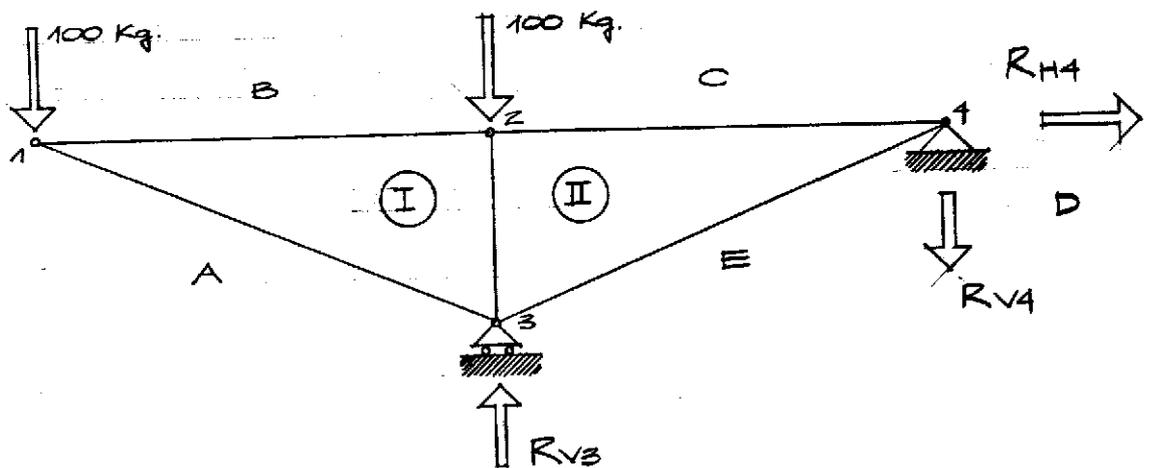
## SOLUCION:

## a) Determinación:

$$2j = b + r$$

$$2 \times 4 = 5 + 3$$

$$8 = 8 \quad \text{Es una estructura estáticamente determinada (externa e internamente).}$$



b) Reacciones:

$$\sum F_{HOR} = 0 \Rightarrow R_{H4} = 0$$

$$\sum M_{\textcircled{2}} = 0 \Rightarrow 6 R_{V4} = 100 \times 6 \text{ Kg} \therefore R_{V4} = 100 \text{ Kg.}$$

$$\sum M_{\textcircled{4}} = 0 \Rightarrow 6 R_{V3} = (100 \times 6) + (100 \times 12)$$

$$\therefore R_{V3} = 300 \text{ Kg.}$$

$\therefore$  Sí se cumple con  $\sum F = 0$ .

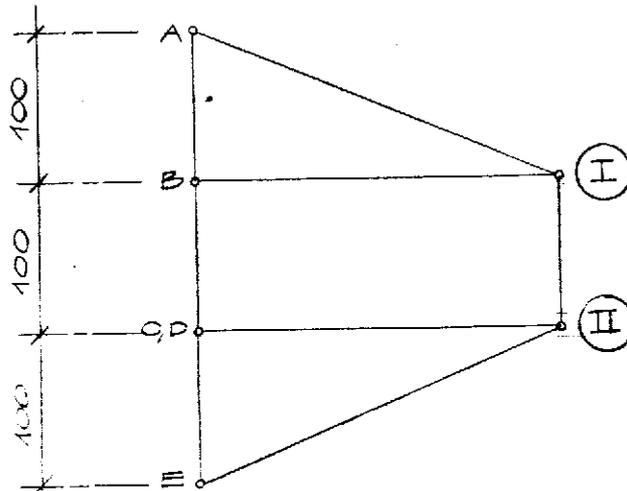
c) Diagrama de Maxwell:

Este consiste básicamente en dibujar el polígono de fuerzas de la estructura articulada conservando una escala determinada. Ya con los valores obtenidos anteriormente podemos continuar de la siguiente manera:

- i) Dibujar el polígono de fuerzas externas, para lo cual debe usarse la notación dada a las regiones. Por ejemplo; de la región A a la B hay una fuerza externa de 100 Kg. hacia abajo, luego el punto B deberá localizarse 100 unidades abajo de A, y así sucesivamente se continúa de región en región.
- ii) Ya localizadas las regiones exteriores se procede a la localización de las interiores, para lo cual se toman de base las ya localizadas. Es importante hacer notar que la región ha localizar, debe tener por lo menos 2 regiones adyacentes ya localizadas con anterioridad; luego, con base en ellas se trazan líneas paralelas a los miembros que las dividen de la región desconocida. Como ejemplo; para localizar la región I tenemos que ya han sido localizadas sus 2 regiones adyacentes A & B, así, primero trazamos una línea que pase por A y que sea paralela al elemento que divide las regiones A & I y luego trazamos una que pase por B y que sea paralela al elemento que divide a B & I. La intersección de estas 2 líneas define el punto de la región I. Así se procede para localizar todas las regiones interiores.
- iii) Ya localizados los puntos de todas las regiones bastará con medir a escala la distancia entre 2 puntos, para tener la magnitud de la carga en el elemento de la estructura que está ubicado entre las 2 regiones identificadas en el Diagrama de Maxwell. Por ejemplo, en el elemento 1-3 hay 240 Kg. ya que entre B & I hay 240 unidades.
- iv) Para determinar el tipo de esfuerzo de cada elemento se procede así:
  - \* Se toma un nudo de la estructura (Nudo 2)
  - \* Se lee en sentido de las agujas del reloj las 2 regiones adyacentes al elemento considerado. (C - II)
  - \* Nos trasladamos al Diagrama de Maxwell y suponemos que la región leída primero representa al nudo. (C)
  - \* Localizamos la lectura y comparamos si está empujando al nudo (elemento a compresión) ó si lo está halando (elemento a tracción). (Halando;  $\Rightarrow$  2-4 está a tensión)

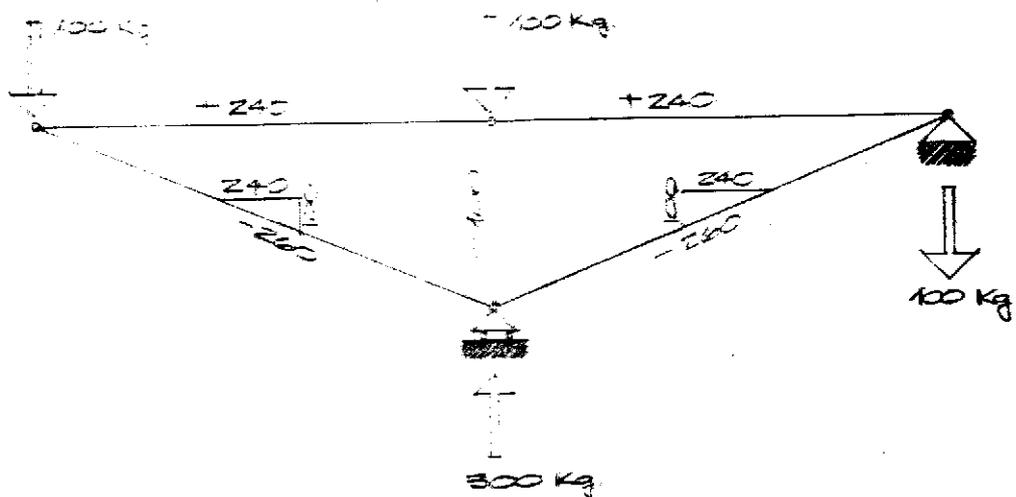
En el siguiente esquema está el Diagrama de Maxwell; basándonos en la estructura de la Figura 18 y tomando en cuenta la notación que le fue impuesta, se llega a obtener el Diagrama mostrado a continuación, basándonos para el efecto en los pasos descritos en la página anterior.

### DIAGRAMA DE MAXWELL:



MIEMBRO	MAGNITUD DE ESFUERZO	NUDO	LECTURA	TIRA O EMPUJA	TIPO DE ESFUERZO
A-I	260 Kg	1	I-A	Empuja	Compresión
B-I	240	1	I-B	Tira	Tensión
C-II	240	2	II-C	Tira	Tensión
E-II	260	4	II-E	Empuja	Compresión
I-II	100	3	I-II	Empuja	Compresión

### RESUMEN:



**Observaciones:**

Después de haber planteado los métodos para determinar las cargas a las que están sometidos los elementos de una estructura articulada, y luego de haber resuelto algunos ejemplos, se pueden sacar como recomendaciones de importancia, las siguientes:

1. Es de gran importancia y utilidad el adoptar una nomenclatura cualquiera, pero que sea consistente a lo largo del problema, ya que esto nos facilitará su solución y además evitará en gran parte el incurrir en errores de identificación de nudos, miembros o reacciones.
2. Al final del análisis debe siempre dejarse un esquema de la estructura, en el cual se muestre en forma clara y ordenada la magnitud y tipo de esfuerzo en cada miembro, así como las componentes de los esfuerzos en los miembros inclinados. Este esquema nos será de gran utilidad para chequear el equilibrio estático de cada uno de los nudos de la estructura, lo cual se hará sin necesidad de invertir una gran cantidad de tiempo ya que se tendrán a la mano y en una forma ordenada, tanto las fuerzas verticales como las horizontales que están actuando sobre cada nudo.
3. Como una comprobación de nuestro análisis, debemos siempre chequear el equilibrio estático mencionado en el inciso anterior para cada uno de los nudos de nuestra estructura articulada.

## CAPITULO IV:

### **Determinación de Deformaciones en Estructuras Articuladas Estáticamente Determinadas:**

Para principiar, podemos decir que el cálculo de deformaciones en estructuras es usado como una arma muy efectiva en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Esta aplicación particular implica ya un planteamiento de los métodos más usados para calcular deformaciones en las estructuras de nudos articulados. Cabe mencionar que existen otras aplicaciones en las cuales pueden ser utilizados estos cálculos (son de gran importancia en el análisis, diseño y montaje de estructuras). Las deformaciones resultantes de acciones diferentes, sobre diferentes tipos de estructuras deben ser determinadas; y, ya que no hay un método de computación que sea el mejor para todos los problemas, se discutirán varios métodos diferentes entre los cuales se pueda ya escoger el que nos facilite la solución del problema que se nos presenta.

Los métodos a plantear podemos clasificarlos de la siguiente manera:

1. Métodos Tradicionales o de Energía
2. Métodos Gráficos
3. Métodos Matriciales
4. Métodos Programados

#### **1. Métodos Tradicionales o de Energía:**

Estos métodos están basados en la igualdad existente entre el trabajo externo efectuado por las cargas que actúan sobre la estructura y la energía de deformación interna de sus miembros.

Lo dicho anteriormente es natural si consideramos que durante se aplican las cargas externas a la estructura estas desarrollarán trabajo conforme se desplazan sus puntos de aplicación. Es esto lo que nos lleva a poder plantear la ecuación base para todos los métodos de energía, lo cual a su vez nos facilita el cálculo de deformaciones en los miembros de las estructuras articuladas:

$$\text{Trabajo Externo} = \text{Trabajo Interno}$$

En una estructura de nudos articulados tenemos que de la igualdad anterior el Trabajo Externo puede determinarse fácilmente si se toma el razonamiento adecuado. Así:

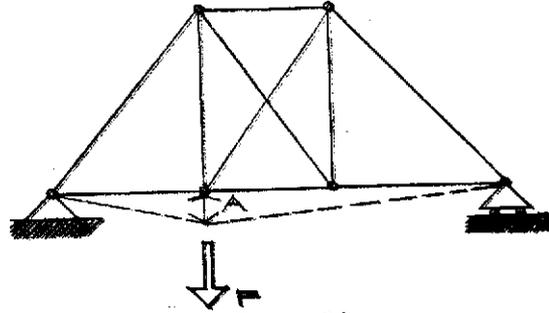


Figura 19

Al aplicar la carga  $F$  (Figura 19) puede notarse que su punto de aplicación sufre una deflexión total  $\Delta$ . Considerando una relación lineal entre carga y deflexión se tiene que el valor promedio de la carga durante la deflexión es  $\frac{0 + F}{2} = F/2$ , luego:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo Externo} &= \text{Carga Prom.} \times \text{Desplazamiento} \\ &= (F/2) \times \Delta \end{aligned}$$

Cabe mencionar que el trabajo externo debido a la aplicación de un momento es:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo Externo} &= \text{Momento Promedio} \times \text{Giro} \\ &= (M/2) \times \phi \end{aligned}$$

Con el resultado anterior concluimos que si encontramos una expresión para el trabajo interno (energía de deformación) en función de  $F$  y de las propiedades de los miembros, podría encontrarse después la deflexión del punto de aplicación de  $F$ , ya que:

$$\text{Trabajo Externo} = \text{Trabajo Interno}$$

$$(F/2) \times \Delta = \text{función}(F, L, A, E) \quad \text{Despejamos } \Delta.$$

Sobre Trabajo Interno puede decirse que para las estructuras de nudos articulados la energía de deformación interna es resultado de esfuerzos axiales y deformaciones elásticas axiales (no ha sido excedido el límite elástico).

A continuación se plantea la expresión para la energía de deformación interna debida a cargas axiales, que es precisamente lo que tenemos en una estructura de nudos articulados;

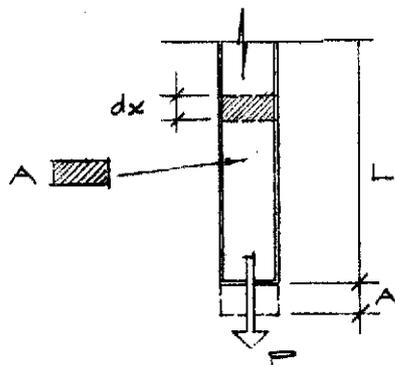


Figura 20

Al aplicar gradualmente la carga  $P$  (Figura 20) el miembro sufrirá una deflexión total  $\Delta$ . Ahora bien, el trabajo interno en una longitud  $dx$  será;

Trabajo Interno  $dx =$  Carga Media  $\times$  Deformación en  $dx$

$$\begin{aligned} dW_i &= \left(\frac{P}{2}\right) \times \left(\frac{\Delta}{L}\right) dx \\ &= \left(\frac{P}{2}\right) \times (\Delta) \times \left(\frac{dx}{L}\right) \\ &= \left(\frac{P}{2}\right) \times \left(\frac{PL}{AE}\right) \times \left(\frac{dx}{L}\right) \\ &= \left(\frac{P^2}{2AE}\right) dx \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Trabajo Interno total en el miembro} = W_i = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

Si en la estructura articulada mostrada en la Figura 19 se tiene que  $P$  es la carga en cada miembro debida a la aplicación de  $F$ , entonces el trabajo interno en cada barra es,

$$W_i = \frac{P^2 L}{2AE}$$

(El valor de  $P$  puede ser diferente para cada miembro de la estructura articulada).

De lo anterior se deduce que el trabajo interno total en la estructura articulada es,

$$W_i = \sum \frac{P^2 L}{2AE}$$

Esta es la expresión requerida para la energía de deformación interna resultante de la deformación axial elástica en los miembros de una estructura articulada.

También hay expresiones para energía de deformación interna debida a flexión, corte, torsión, etc.

Los métodos de energía más conocidos y más usados, para el cálculo de deformaciones en estructuras articuladas, se encuentran planteados a continuación en la forma más sencilla posible.

### Cálculo de Deflexiones por el Método del Trabajo Real:

Este método es muy limitado en cuanto a su aplicación ya que solo podrá determinarse en cualquier caso una de las incógnitas  $\Delta$  o  $\theta$  (deflexión lineal o rotacional). Esto nos indica que la expresión válida en este método es:

$$(F/2) \times \Delta = \text{Trabajo Interno}$$

ó

$$(M/2) \times \theta = \text{Trabajo Interno}$$

Este método puede solamente usarse para encontrar la deformación lineal del punto de aplicación de una fuerza en la dirección de esa fuerza o rotación en la dirección de un par, ya que si tratamos de determinar las deflexiones debidas a diferentes cargas, aparecerá más de una incógnita en el miembro de la izquierda y es imposible su solución.

Como ya se había determinado con anterioridad el valor de la energía de deformación interna, nos encontramos con la ecuación siguiente:

$$(F/2) \times \Delta = \sum \frac{P_i^2 L}{2AE}$$

Donde,

- F = Fuerza real aplicada en el punto en que se busca la deflexión
- P = Esfuerzo en cada miembro debido a la aplicación de F a la estructura
- $\Delta$  = Deflexión lineal del punto de aplicación de F en el sentido de F.
- L, A, E = Propiedades de los miembros de la estructura y de los materiales.

Para tener una idea más clara de la forma como se calculan las deflexiones por medio del Trabajo Real, se plantea a continuación un ejemplo.

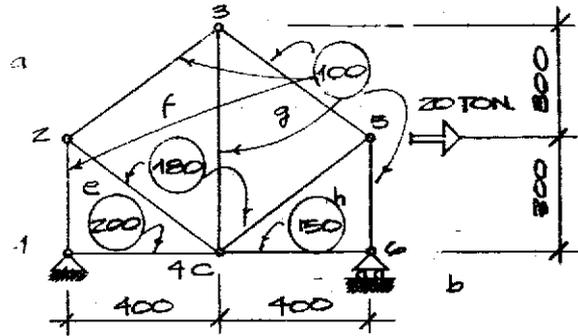
### EJEMPLO 6

Considerando la armadura mostrada en el Ejemplo 1, encontrar el desplazamiento horizontal del nudo 5 (lugar en que se está aplicando una carga de 20 Ton. en sentido horizontal). Ver la armadura en la Figura 21.

Para encontrar la deflexión contamos con la expresión:

$$(F/2) \Delta = \sum \frac{P_i^2 L}{2AE}$$

$$\Delta = \frac{\sum \frac{P_i^2 L}{AE}}{F}$$



Donde:

- $P_i$  = Esfuerzos en los miembros, (de ejemplo 1)  
 $L$  = Longitud de miembros  
 $A$  = Area de sección de los miembros: m cms.<sup>2</sup>  
 $E$  = 2100 Ton/cm<sup>2</sup>  
 $F$  = 20 Ton.

Haciendo una tabulación de resultados:

Miembro	$P_i$ (Ton)	L Mt	A (cms <sup>2</sup> )	$P_i^2 L/A$
ae	+ 7.50	3.00	100	+ 1.688
ec	+ 20.0	4.00	200	+ 8.000
af	+ 6.25	5.00	100	+ 1.953
fe	- 6.25	5.00	180	+ 1.085
hb	- 7.50	3.00	100	+ 1.688
ch	0.	4.00	150	0.
hg	+ 18.75	5.00	180	+ 9.766
ga	+ 6.25	5.00	100	+ 1.953
fg	- 7.50	6.00	100	+ 3.375
$\Sigma$				= 29.508

$$\Delta = \frac{\sum \frac{P_i^2 L}{A}}{FE}$$

$$\therefore \Delta = \frac{29.508 \times 100}{20 \times 2100} = \frac{29.508}{420}$$

Así que:

$$\Delta_{HOR} = 0.0703 \text{ cms}$$

(NUDO 5)

(hacia la derecha).

Cálculo de Deflexiones, usando el:

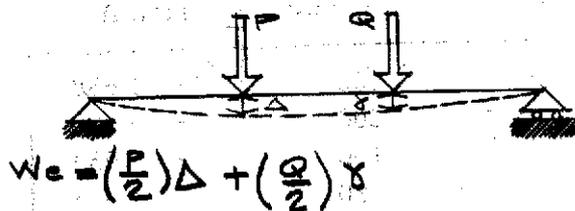
### Primer Teorema de Castigliano:

Este primer teorema de Castigliano es el que nos suministra uno de los métodos más importantes para determinar las deflexiones elásticas en cualquier punto de una estructura. La deflexión puede ser: Rotacional o Lineal, en cualquier dirección o causada por cualquier sistema de cargas aplicadas.

El Primer Teorema de Castigliano, puede enunciarse así:

“Al aplicar una carga sobre una estructura, la deflexión del punto de aplicación de la carga, en la dirección de esa carga, se obtiene evaluando la primera derivada parcial de la energía total de deformación interna de la estructura con respecto a la carga aplicada”. (La “carga” puede ser “una fuerza” o “un momento”).

Demostrando de una forma simple lo anterior:



$$W_e = \left(\frac{P}{2}\right)\Delta + \left(\frac{Q}{2}\right)\gamma$$

Energía Int = Energía Ext

$$W_i = W_e$$

$$\therefore W_i = \frac{P\Delta}{2} + \frac{Q\gamma}{2} \quad \text{--- (I)}$$

a) agregando a P una  $dP$ :

$$dW_i = \left[\frac{P+(P+dP)}{2}\right]d\Delta + \left[\frac{Q+Q}{2}\right]d\gamma$$

(Despreciando el producto de diferenciales).

$$dW_i = P d\Delta + Q d\gamma \quad \text{--- (II)}$$

b) aplicando gradualmente  $(P + dP)$  y  $Q$ :

$$W_i' = \left(\frac{P+dP}{2}\right)(\Delta+d\Delta) + \left(\frac{Q}{2}\right)(\gamma+d\gamma)$$

$$W_i' = \frac{P\Delta}{2} + \frac{Q\gamma}{2} + \frac{dP\Delta}{2} + \frac{P d\Delta}{2} + \frac{Q d\gamma}{2}$$

Luego; Usando I & II y considerando que  $W_i = dW_i = W_i'$  tenemos:

$$dW_i = \frac{dP\Delta}{2} + \frac{P d\Delta}{2} + \frac{Q d\gamma}{2}$$

$$dW_i = \frac{dP \Delta}{2} + \frac{dW_i}{2} \Rightarrow dW_i = dP \Delta$$

$$\therefore \Delta = \frac{dW_i}{dP}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\partial W_i}{\partial P}$$

Para el caso de estructuras de nudos articulados, se tiene:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} W_i$$

$$\therefore \Delta = \sum S \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$$

En la formulación anterior es importante hacer notar dos aspectos:

- $\Delta$  no representa la deflexión total del punto considerado, sino que la deflexión lineal en el sentido en que se aplica P.
- Si el signo de la expresión  $\sum S \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$  es negativo, quiere decir que la deflexión es de sentido contrario al que se le dió a la fuerza aplicada.

En el ejemplo siguiente se ilustra la forma en que se aplica el Primer Teorema de Castigliano para determinar deflexiones en los nudos de una estructura articulada.

### EJEMPLO 7

Considerando la estructura articulada del ejemplo 4, encontrar el desplazamiento vertical del nudo 5. Ver la armadura en la Figura 22:

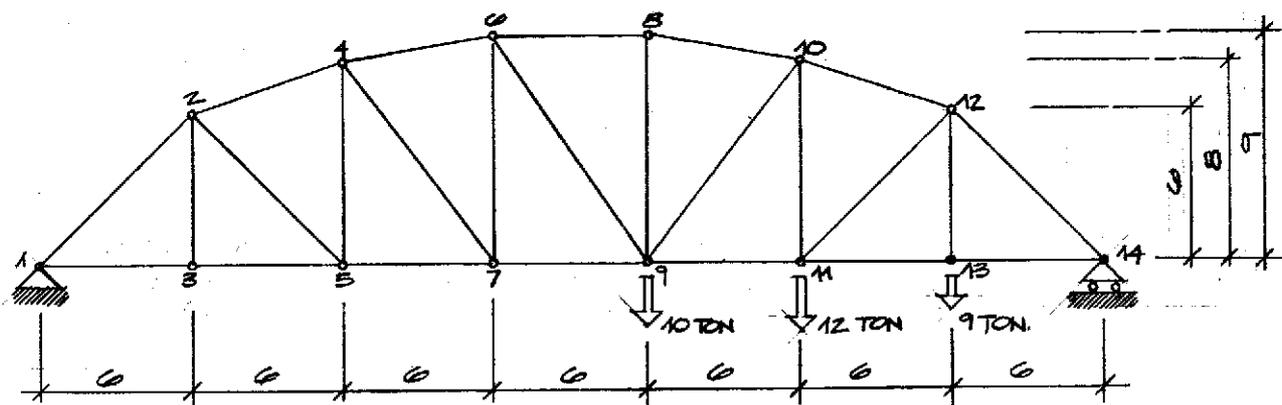
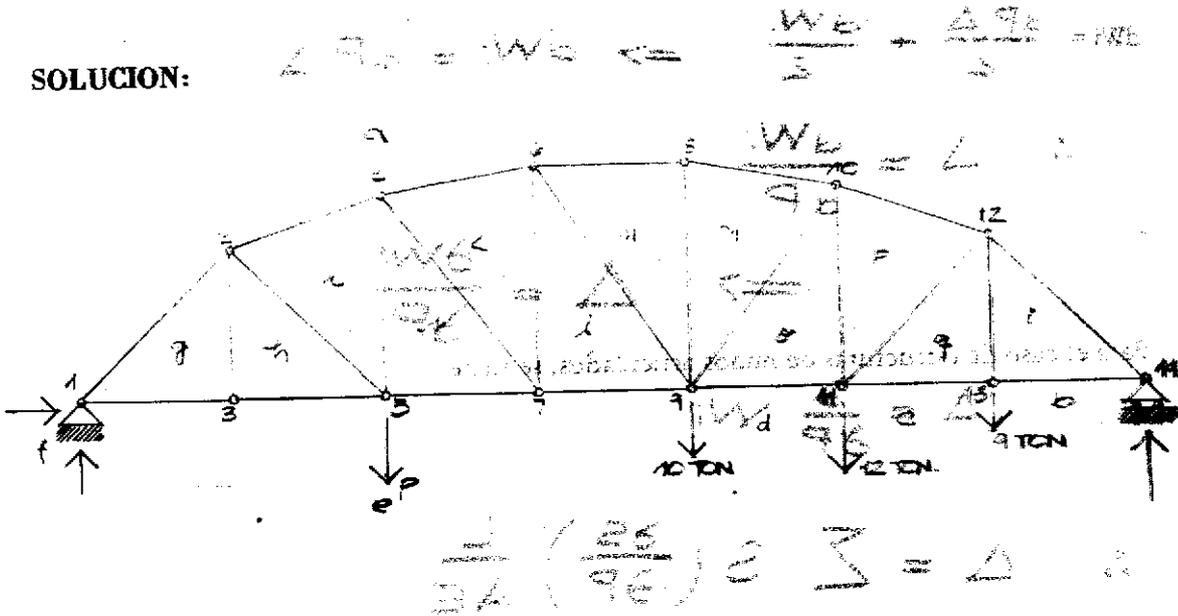


Figura 22

SOLUCION:



Secciones de Miembros:

- i) Cordón Superior = 40 cm<sup>2</sup>
- ii) Cordón Inferior = 30 cm<sup>2</sup>
- iii) Otros miembros = 20 cm<sup>2</sup>

E = 2,100 Ton/cm<sup>2</sup>

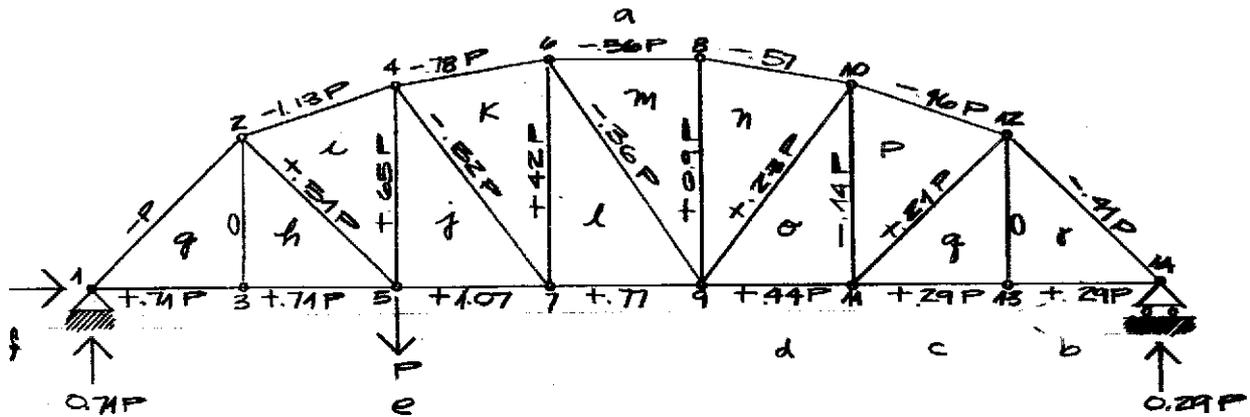
Para resolver el problema, contamos con la expresión:

$$\Delta = \sum S \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \left[ \sum S \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{A} \right] \frac{1}{E}$$

Donde:

- S = Esfuerzos en los miembros debidos a las cargas reales (Ver el ejemplo 4).
- $\frac{\partial S}{\partial P}$  = Primera derivada de S (esfuerzos en los miembros debidos a la aplicación de la carga P, en el punto y con el sentido en el que investigamos la deflexión) respecto a P (Estos esfuerzos deben estar expresados en función de P).
- L = Longitud del miembro.
- A = Area de la sección transversal del miembro.
- E = 2,100 Ton/cm<sup>2</sup>.

A continuación se muestra la estructura con el esfuerzo en cada miembro debido a la aplicación de la carga P. Son estos valores los que nos llevan a obtener el término  $\frac{\partial S}{\partial P}$  Así:



$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow R_{14} = \frac{12P}{42} = 0.29P$$

⊥

$$\sum M_{14} = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{30P}{42} = 0.71P$$

∴ Sí se cumple  $\sum F_v = 0$ .

Haciendo una tabulación con los resultados:

	Miembro	Long. (cm)	Area (cm <sup>2</sup> )	S (Ton) cargas reales	S (p) carga ficticia	$\frac{\partial S(P)}{\partial P}$	$S \left( \frac{\partial S(P)}{\partial P} \right) \frac{L}{A}$
Cordón superior	ag	849	40	- 12.7	- 1.00 P	- 1.00	+ 269.56
	ai	632	40	- 14.2	- 1.13 P	- 1.13	+ 253.53
	ak	608	40	- 18.3	- 0.78 P	- 0.78	+ 216.96
	am	600	40	- 24.0	- 0.56 P	- 0.56	+ 201.60
	an	608	40	- 24.3	- 0.57 P	- 0.57	+ 210.54
	ap	632	40	- 27.7	- 0.46 P	- 0.46	+ 201.32
	ar	849	40	- 31.1	- 0.41 P	- 0.41	+ 270.64
Cordón inferior	ge	600	30	+ 9.0	+ 0.71 P	+ 0.71	+ 127.80
	he	600	30	+ 9.0	+ 0.71 P	+ 0.71	+ 127.80
	je	600	30	+ 13.5	+ 1.07 P	+ 1.07	+ 288.90
	ie	600	30	+ 18.0	+ 0.77 P	+ 0.77	+ 277.20
	od	600	30	+ 26.3	+ 0.44 P	+ 0.44	+ 231.44
	qc	600	30	+ 22.0	+ 0.29 P	+ 0.29	+ 127.60
	rb	600	30	+ 22.0	+ 0.29 P	+ 0.29	+ 127.60
vertical e inclinado	gh	600	20	0.	0.	0.	0.
	hi	849	20	+ 6.4	+ 0.51 P	+ 0.51	+ 138.56
	ij	800	20	- 4.5	+ 0.65 P	+ 0.65	- 117.00
	jk	1000	20	+ 7.5	- 0.52 P	- 0.52	- 195.00
	kl	900	20	- 6.0	+ 0.42 P	+ 0.42	- 113.40
	lm	1082	20	+ 10.8	- 0.36 P	- 0.36	- 210.34
	mn	900	20	+ 4.0	+ 0.09 P	+ 0.09	+ 16.20
	no	1000	20	- 3.8	+ 0.23 P	+ 0.23	- 43.70
	op	800	20	+ 7.8	- 0.14 P	- 0.14	- 43.68
	pq	849	20	+ 6.0	+ 0.21 P	+ 0.21	+ 53.49
	qr	600	20	+ 9.0	0.	0.	0.
$\Sigma =$							2,417.62

$$\Delta = \frac{2,417.62}{2100}$$

$$\therefore \Delta_{\text{VERT}} \text{ (NUDO E)} = 1.151 \text{ cms.}^2 \text{ (hacia abajo).}$$

Cálculo de deflexiones usando el

#### Método del Trabajo Virtual:

Este es el método más versátil para la evaluación de las deflexiones elásticas de las estructuras. Si se usa este método, no solamente es posible determinar las deflexiones que resultan de cargas de cualquier tipo, que causan cualquier clase de esfuerzos en una estructura, sino que también es posible calcular las deflexiones resultantes de cambios de temperatura, errores de fabricación o encogimiento del material estructural (pueden ser deflexiones lineales o angulares en cualquier dirección). Cabe mencionar que con este método debe aplicarse el principio de superposición a las estructuras consideradas.

El principio de trabajo virtual, puede definirse como sigue: "Sea una estructura deformable, la cual se encuentra en equilibrio y soportando un sistema de cargas dado; si se le aplica una deformación virtual como resultado de alguna acción adicional, entonces,

Trabajo Virtual Externo (debido a carga unitaria) = Trabajo Virtual Interno (debido a carga unitaria)

El problema ahora estriba en adoptar una expresión para cada miembro de la igualdad anterior expresándolos en forma congruente.

Sea una estructura Articulada:

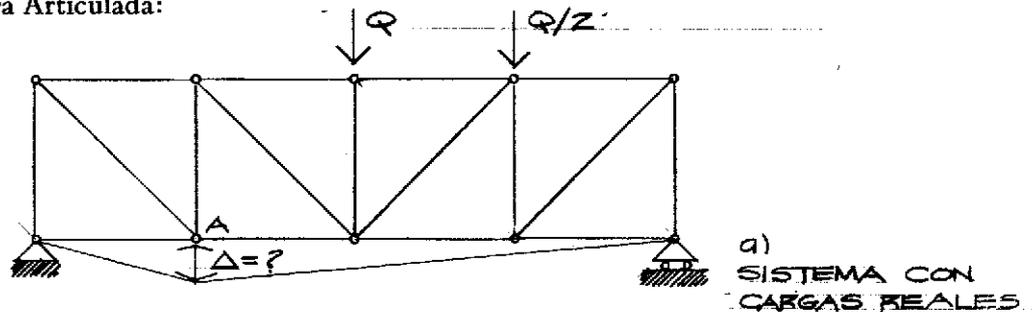
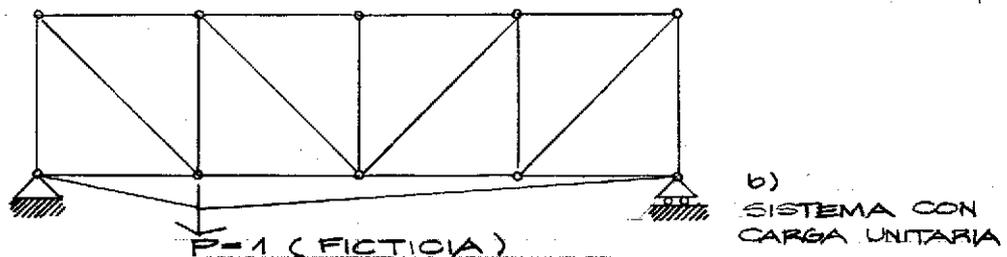


Figura 23



El trabajo virtual externo se puede expresar como:

$$W_{ext.} = F \times \text{Desplazamiento}$$

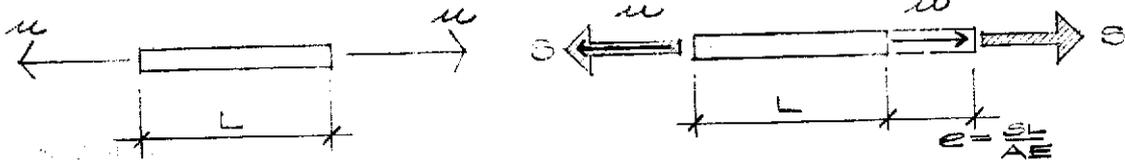
$$W_{ext.} = P \times \Delta$$

$$W_{ext.} = 1 \times \Delta$$

Ahora para determinar una expresión para el trabajo virtual interno en una estructura articulada se tiene:

1. Los esfuerzos ficticios en los miembros, resultantes de la acción de la fuerza unitaria ficticia deberán calcularse ( $\mathcal{K}$ ).
2. También deberán calcularse los esfuerzos reales en los miembros (S).

3. Deberá recordarse que el esfuerzo  $\mu$  no altera su valor al ser aplicadas las cargas reales, ya que se tendrá en cada miembro:



- i) Antes de aplicar las cargas reales.
- ii) Al ser aplicadas las cargas reales.

Ya expuesto todo lo anterior podemos expresar el trabajo virtual interno como sigue:

i. Para un miembro:

$$W_{int.} = \frac{\mu S L}{A E}$$

ii. Para la estructura total:

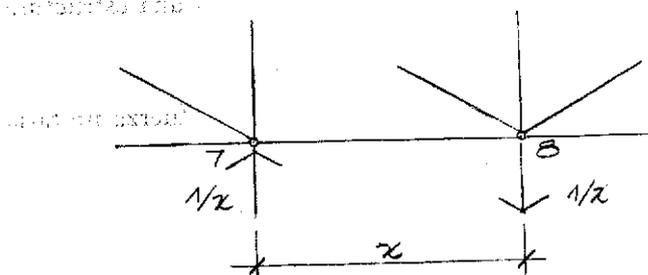
$$W_{int.} = \sum \frac{\mu S L}{A E} \Rightarrow 1 \times \Delta = \sum \frac{\mu S L}{A E}$$

En las formulaciones anteriores también son válidos los aspectos mencionados para el Teorema de Castigliano:

- a)  $\Delta$  no representa la deflexión total del punto considerado, sino que es la deflexión lineal en el sentido de aplicación de la carga unitaria ficticia.
- b) Un signo negativo en la expresión  $\sum \frac{\mu S L}{A E}$  indica que el sentido de la deflexión es contrario al de la carga ficticia unitaria.
- c) Si en lugar de determinar la deflexión de un nudo queremos determinar la rotación de un miembro, la formulación sería muy similar a la planteada, ya que:

Para encontrar la rotación del miembro mostrado, tenemos:

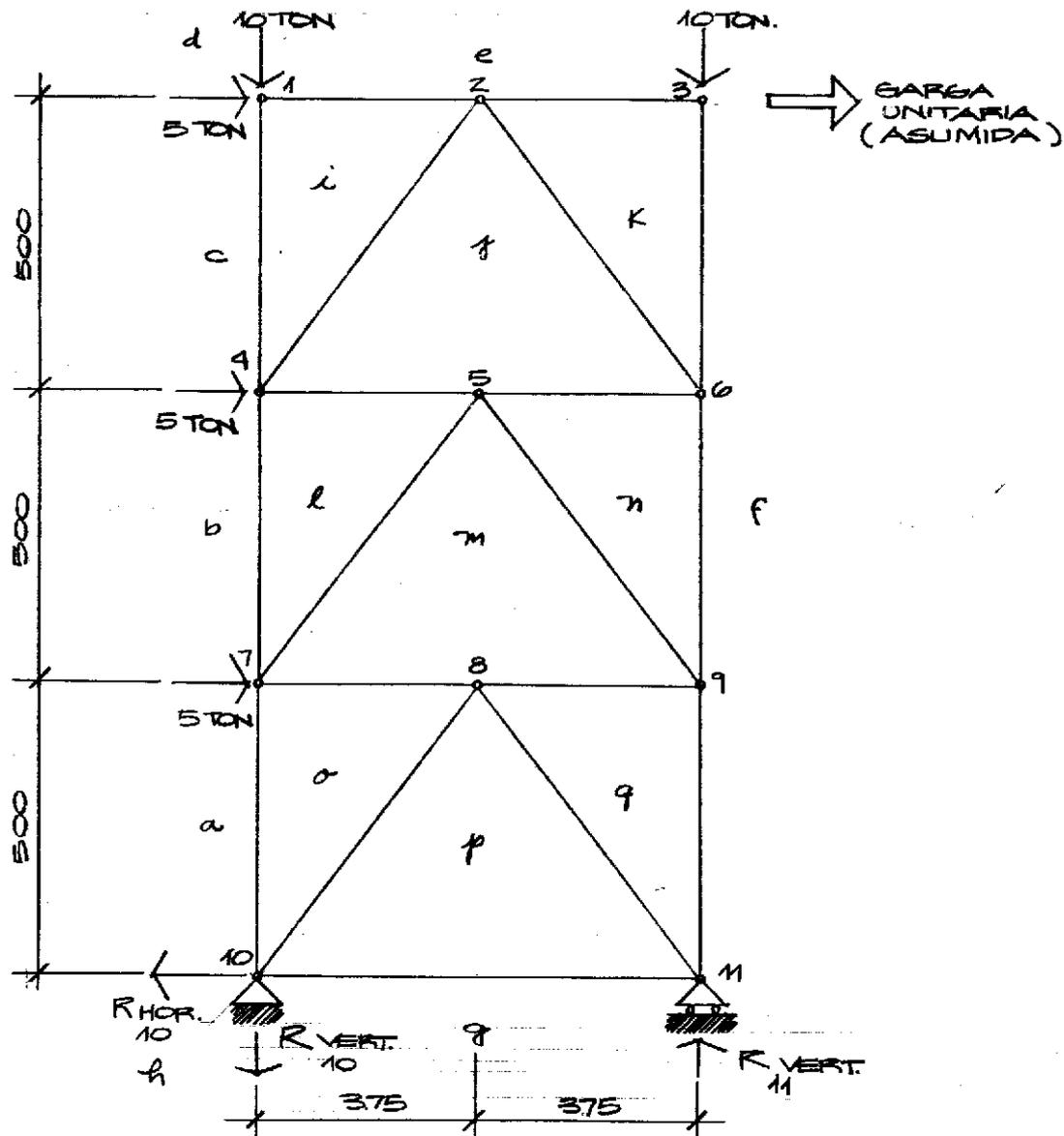
Deberá usarse entonces:



$$1 \times \theta = \sum \frac{\mu_{\alpha} S L}{A E}$$

**EJEMPLO 8:**

Considerando la estructura articulada de la figura 23, calcular el desplazamiento horizontal de nudo 3 debido al sistema de cargas actuantes.



**Figura 23**

En este caso debemos empezar por investigar si la estructura es determinada o no lo es (externa o internamente)

$$2j = b + r$$

$$2 \times 11 = 19 + 3$$

$$22 = 22$$

$$22 = 22$$

22 = 22 Es estáticamente determinada externa e internamente. (Puede comprobarse por simple inspección).

Calculando las reacciones:

$$\sum M_{10} = 0 \Rightarrow R_{\text{VERT } \textcircled{11}} = \frac{(10 \times 7.50) + (5 \times 15.00) + (5 \times 10) + (5 \times 5)}{7.50}$$

$$\therefore R_{\text{VERT } \textcircled{11}} = 30 \text{ Ton.}$$

$$\sum M_{11} = 0 \Rightarrow R_{\text{VERT } \textcircled{10}} = \frac{(5 \times 5) + (5 \times 10) + (5 \times 15) - (10 \times 7.50)}{7.50}$$

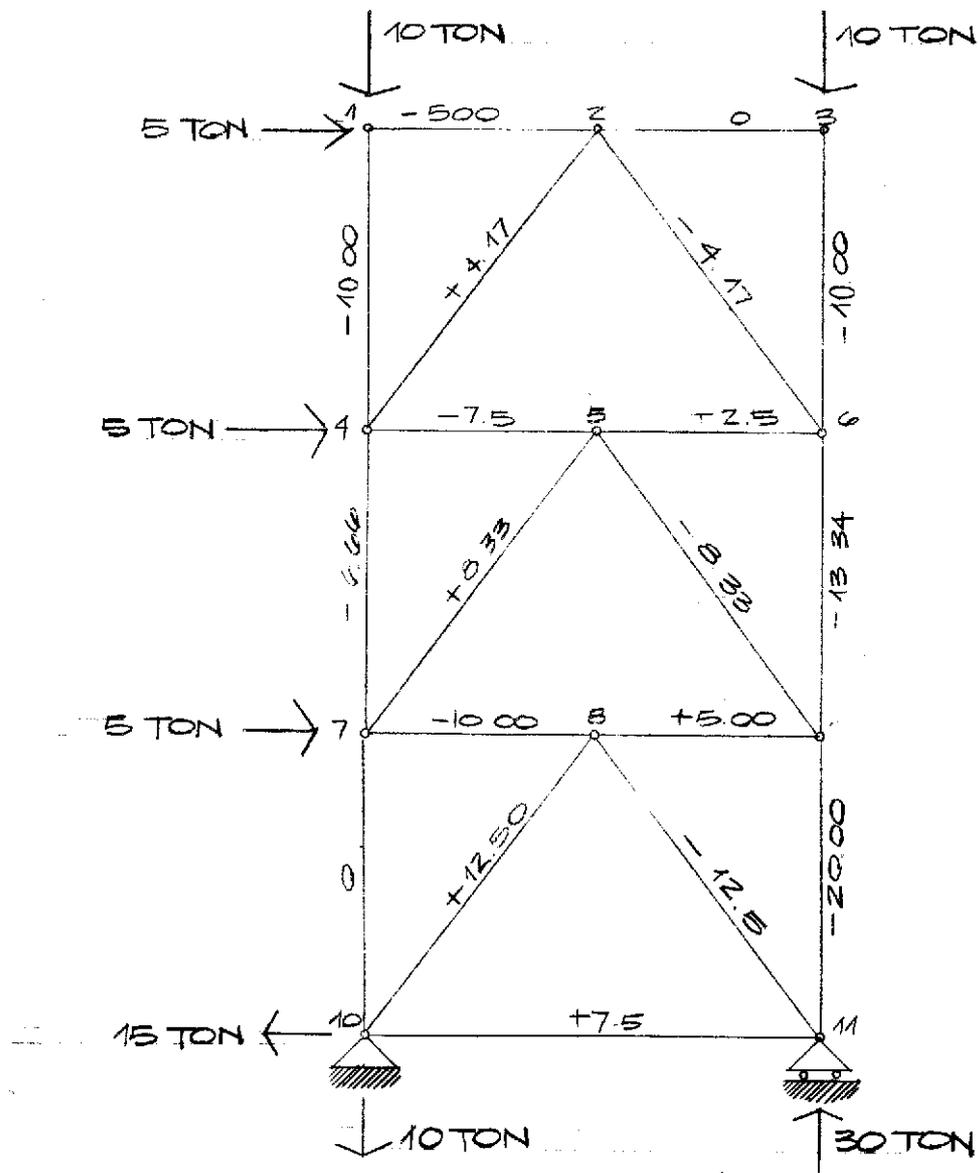
$$\therefore R_{\text{VERT } \textcircled{10}} = 10 \text{ Ton.}$$

$$\sum F_{\text{HOR}} = 0 \Rightarrow R_{\text{HOR } \textcircled{10}} = 5 + 5 + 5$$

$$\therefore R_{\text{HOR } \textcircled{10}} = 15 \text{ Ton.}$$

(Se cumple  $\sum F = 0$ ).

Ya con las reacciones calculadas, pasamos a la determinación de esfuerzos en los miembros debidos a las cargas reales sobre la estructura. Para esto aplicaremos el método de los nudos en el orden siguiente: 1, 3, 2, 4, 6, 5, 7, 9, 8, 10 y 11.



La expresión con que contamos para calcular la deflexión del nudo 3 es:

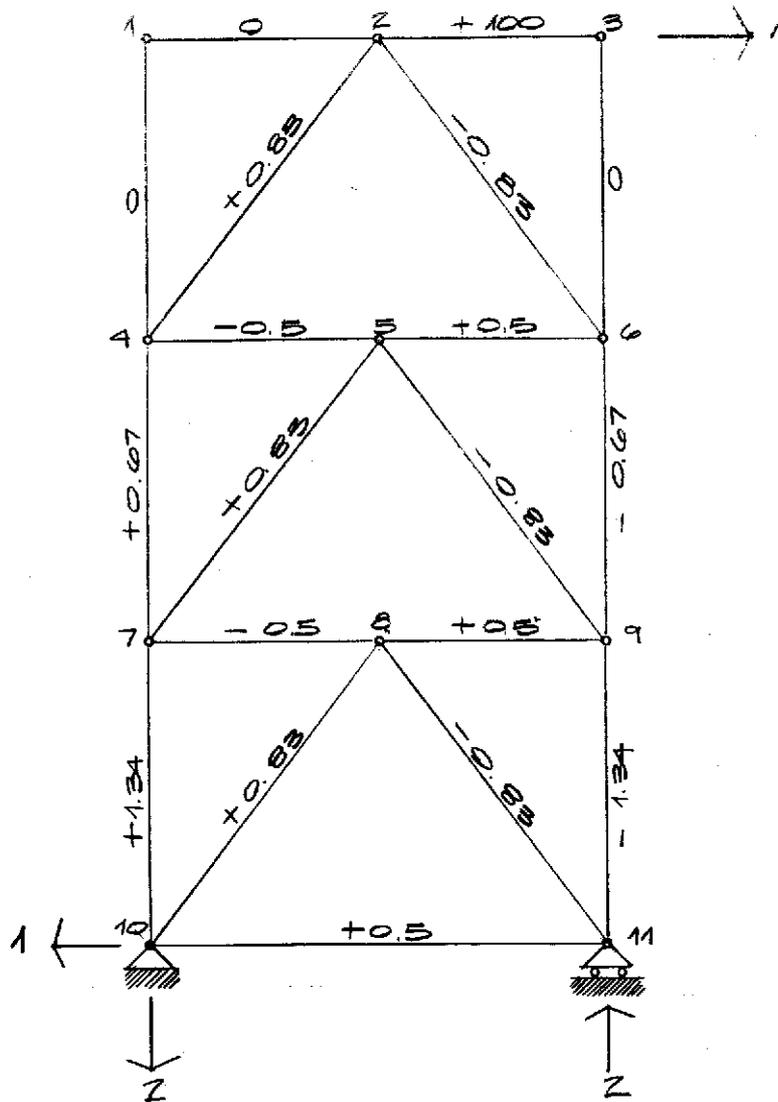
$$1 \times \Delta = \sum \frac{u S L}{A E}$$

Donde

- S = esfuerzo en los miembros debido a las cargas reales.
- $u$  = esfuerzo en los miembros debido a la carga unitaria aplicada en nudo 3.
- L = longitud del miembro.
- A = área de secc. transversal. (En este caso:  $A = 5 \text{ cm}^2$ ).
- E = 2,100 toneladas/cm<sup>2</sup>.

Los valores indicados en la estructura anterior corresponde a S. Calculando ahora los esfuerzos en los miembros de la estructura articulada, debidos a la carga unitaria aplicada en el punto y con la dirección en que necesitamos la deflexión ( $\Delta$ ):

(De este análisis obtenemos  $M$ )



Tabulando los resultados para obtener la deflexión horizontal del nudo 3:

Miembro	Long (cm)	Area (cm <sup>2</sup> )	S (Ton.)	$\mu$ (Ton)	$S\mu L$	
ei	375	5	- 5.0	0	0	
ek	375	5	0	+ 1.0	0	
ci	500	5	- 10.0	0	0	
ij	625	5	+ 4.17	+ 0.83	+ 3.46	
jk	625	5	- 4.17	- 0.83	+ 3.46	
kf	500	5	- 10.0	0	0	
jl	375	5	- 7.5	- 0.5	+ 3.75	
jn	375	5	+ 2.5	+ 0.5	+ 1.25	
bl	500	5	- 6.66	+ 0.67	- 4.46	
lm	625	5	+ 8.33	+ 0.83	+ 6.91	
mn	625	5	- 8.33	- 0.83	+ 6.91	
nf	500	5	- 13.34	- 0.67	+ 8.94	
mo	375	5	- 10.00	- 0.5	+ 5.00	
mq	375	5	+ 5.0	+ 0.5	+ 2.50	
ao	500	5	0	+ 1.34	0	
op	375	5	+ 12.5	+ 0.83	+ 0.38	
pq	375	5	- 12.5	- 0.83	+ 10.38	
qf	500	5	- 20.0	- 1.34	+ 26.80	
pg	750	5	+ 7.5	+ 0.5	+ 3.75	
$1 \times \Delta = (\sum S\mu L) \frac{1}{AE}$					$\sum =$	89.03

$$\therefore \Delta = \frac{89.03}{5 \times 2100}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{HOR}} \text{ (NUDO 3)} = 0.0085 \text{ cms (hacia la derecha)}$$

Ejemplo No. 9:

En este problema se ilustra como considerar los efectos de temperatura al aplicar el método del trabajo virtual a las estructuras de nudos articulados.

Sea la estructura mostrada, calcular la deflexión horizontal del nudo 3 cuando la temperatura de los miembros inferiores está 30°C más baja que la de los otros miembros; ver la Figura 24:

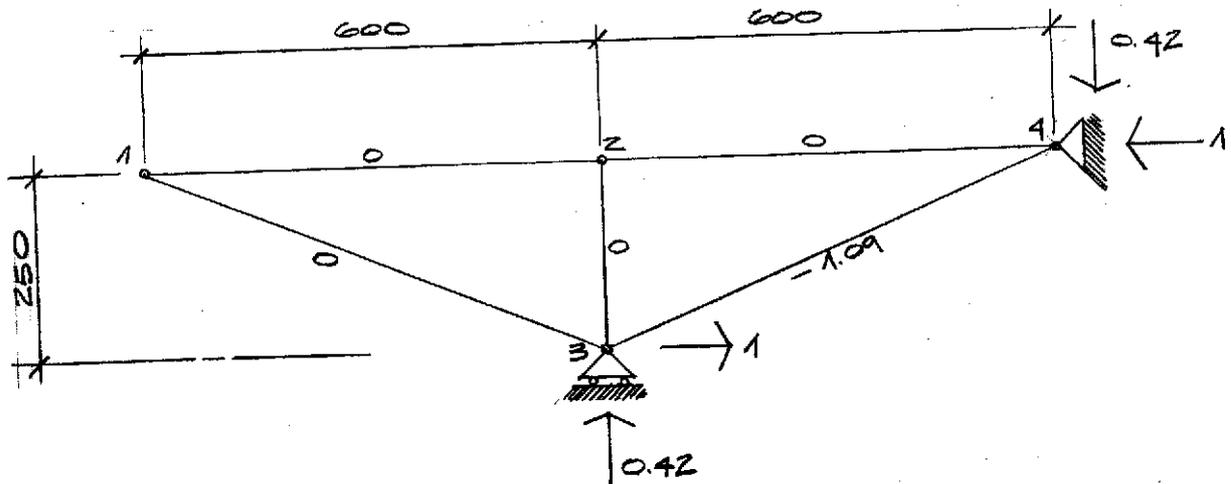


Figura 24

Para resolver este problema contamos con la expresión:

$$1 \times \Delta = \sum \mu dL$$

$\mu$  = esfuerzos en los miembros debidos a la carga unitaria.  
 $dL$  = cambio de longitud de cada miembro y se tiene:

- $dL = \alpha \Delta T L$   
 $\alpha$  = Coeficiente de expansión del material. (0.0000117/°C)  
 $\Delta T$  = diferencia de temp.  
 $L$  = longitud del miembro.  
 $\therefore dL = 30 \times 0.0000117 / \alpha \Delta T L$

Miembro	Long. (MTS)	dL	$\mu$	$\mu dL$
1-2	6.00	+0.00211	0	0
2-4	6.00	+0.00211	0	0
2-3	2.50	+0.00088	0	0
1-3	6.50	+0.00228	0	0
3-4	6.50	+0.00228	-1.09	-0.00249
$\Sigma$				-0.00249

$$\Delta = \sum \mu dL = -0.00249 \text{ Mts.}$$

Tenemos:

$$\Delta = -0.249 \text{ cms.}$$

El signo negativo indica que el desplazamiento del punto 3 vá en dirección contraria a la fuerza unitaria ∴ el punto 3 se desplaza hacia la izquierda 0.249 CMS.

Cabe mencionar que existe otro método de energía y es el Método de Trabajo Mínimo; este es considerado como una de las mejores armas con que se cuenta, para el análisis de estructuras de nudos articulados estáticamente indeterminadas. Este método se expone en el capítulo 5.

## 2. Métodos Gráficos:

Estos métodos son siempre mas rápidos, mas fáciles de aprender y necesitan mucho menos operación que los otros métodos. Aunque tienen el defecto de que los valores obtenidos no poseen la exactitud que nos dan los métodos operativos, sí podemos confiar en ellos ya que nunca están afectados por errores considerables. El método gráfico mas usado para determinar deformaciones en las estructuras de nudos articulados es el Método de Williot-Mohr, el cual puede dividirse en 2 fases que son:

- i. Diagrama de Williot.
- ii. Corrección de Mohr.

La gran ventaja del Método de Williot-Mohr, al determinar corrimientos en los nudos, es que directamente obtenemos el corrimiento total del nudo (magnitud, dirección y sentido).

### El Diagrama de Williot:

Empezaré por decir que este método tiene un valor limitado ya que las deflexiones obtenidas por su uso son "absolutas", salvo en el caso de que la construcción gráfica se refiera a:

- a) Un miembro estructural que permanece fijo en dirección y por lo menos con un extremo fijo; y
- b) Un nudo determinado por la unión de 2 miembros con sus otros extremos fijos.

En el caso de que todos los miembros de la estructura se muevan (girando o desplazándose) entonces el Diagrama de Williot dará deflexiones "relativas".

Para poder usar este método, deben primeramente calcularse los esfuerzos en los miembros de la estructura (tipo y magnitud), luego deben calcularse las deformaciones en cada uno de los miembros debidas al esfuerzo a que está sometido dicho miembro; así:

$$e = \frac{PL}{AE}$$

Donde:

- P = Esfuerzo al que está sometido el miembro.  
 L = Longitud del miembro.  
 A = Área de la sección transversal del miembro.  
 E = Módulo de Elasticidad del material del miembro.

Son las deformaciones de cada miembro, calculadas en la forma indicada, las que nos dan el Diagrama de Williot.

Como un ejemplo sencillo veamos la estructura de la Fig. 25 que se muestra a continuación:

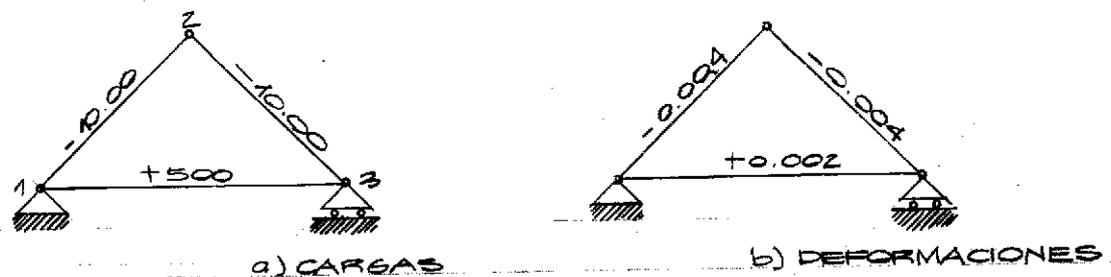
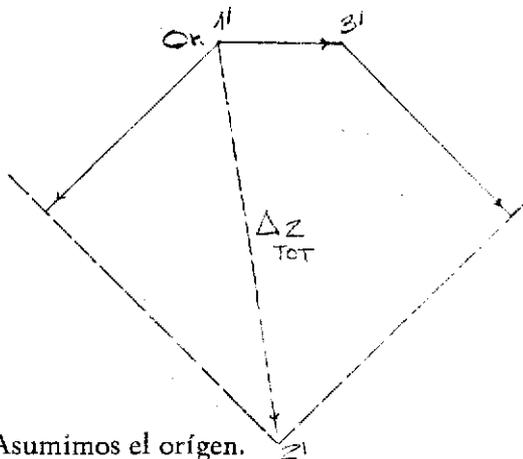


Figura 25

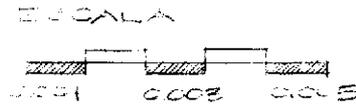
Ya encontradas las deformaciones en todos los miembros, los pasos a seguir son:

- Escoger un punto de origen.
- Escoger el miembro apropiado y determinar la nueva posición de uno de sus extremos determinando su corrimiento (paralelo al miembro).
- Ya escogido el miembro, suponemos que los puntos de sus extremos están en el punto de origen escogido, eso sí, "siempre conservando su posición relativa" (el de la derecha a la derecha y el de la izquierda a la izquierda).
- Ahora ya con los dos extremos del miembro en el origen, vemos si un extremo se acerca o se aleja del extremo fijo una distancia igual a la deformación del miembro ( $e$ ).
- Ahora debemos considerar si el miembro gira y en caso lo haga, deberá trazarse una perpendicular a la flecha que nos muestra el desplazamiento del extremo del miembro ( $e$ ).
- La intersección de perpendiculares determina la nueva posición del punto considerado.

Usando la estructura mostrada antes y siguiendo los pasos enumerados se tiene:



Este es el Diagrama de Williot perteneciente a la estructura de la Fig. 25, el cual se hizo siguiendo el razonamiento indicado en la presente hoja;



- i. Asumimos el origen.
- ii. Suponemos en el origen los puntos 1 y 3.
- iii. Conocida la deformación del miembro 1-3, se tiene que el punto 1 se queda fijo y es 3 el que se aleja de 1, luego conocemos la posición deformada del nudo 3 (3'). Nótese que en el miembro 1-3 no hay giro por lo que solo se considera el desplazamiento en esa dirección.
- iv. Necesitamos ahora conocer la posición deformada del nudo 2, el cual posee desplazamiento y giro, por lo que se procede así:
  - a) Tomamos el miembro 1-2 y aplicamos el mismo razonamiento que se usó con el miembro 1-3; ahora bien, como el miembro 1-2 gira alrededor del nudo 1 habrá que trazarle una perpendicular.
  - b) Tomamos ahora el miembro 2-3 y le aplicamos el razonamiento usado con 1-2.
  - c) La intersección de perpendiculares determina la nueva posición del nudo 2 (2').
- v. La deformación total de cada nudo de la estructura estará determinado por la distancia que hay del origen asumido hasta la nueva posición del nudo (números con primas).

Después de visto lo anterior, es notoria la importancia que tiene el hacer el Diagrama de Williot a una escala determinada, ya que la única manera de obtener los desplazamientos totales de cada nudo es midiéndolos a escala sobre el mismo diagrama.

En el caso que se tenga una estructura articulada mas compleja, la construcción del Diagrama de Williot se hace, en esencia, de la manera expuesta con anterioridad (ver el siguiente ejemplo).

#### EJEMPLO 10:

Sea la estructura mostrada en la Fig. 26 y en la cual ya se dan los valores de deformación para cada miembro, calcular los corrimientos de los nudos al aplicar las cargas que producen dichas deformaciones; las deformaciones están dadas en cms.

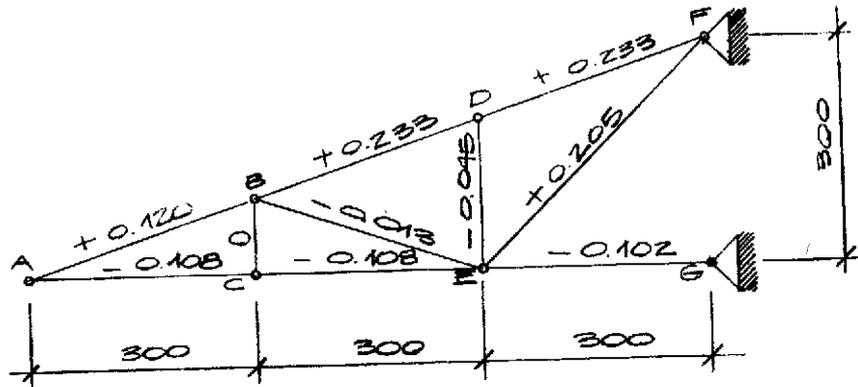


Figura 26

Como se puede ver, en esta estructura se tiene el caso de "un nudo ((E)) determinado por la unión de dos miembros (E-F y E-G) con sus otros extremos fijos (F y G)"; esto nos permite aplicar el Diagrama de Williot a la estructura.

(El Diagrama de Williot está en la siguiente hoja). Del Diagrama obtenido se midieron a escala las deformaciones totales de cada nudo, habiéndose obtenido las siguientes:

Nudo A =	2.710 cms.
Nudo B =	1.085 cms.
Nudo C =	1.100 cms.
Nudo D =	0.453 cms.
Nudo E =	0.407 cms.
Nudo F =	0 cms.
Nudo G =	0 cms.

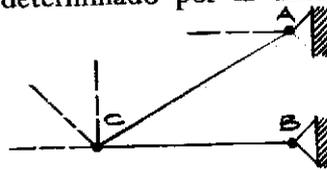
Las direcciones y sentidos de estas deformaciones pueden verse en el propio diagrama.

### Diagrama de Rotación de Mohr:

Se dijo que las deflexiones obtenidas con el Diagrama de Williot son "Absolutas" solo si hay en la estructura un miembro sin rotación y con un extremo fijo,



o también si se tiene un nudo determinado por la unión de dos miembros cuyos extremos restantes están fijos,



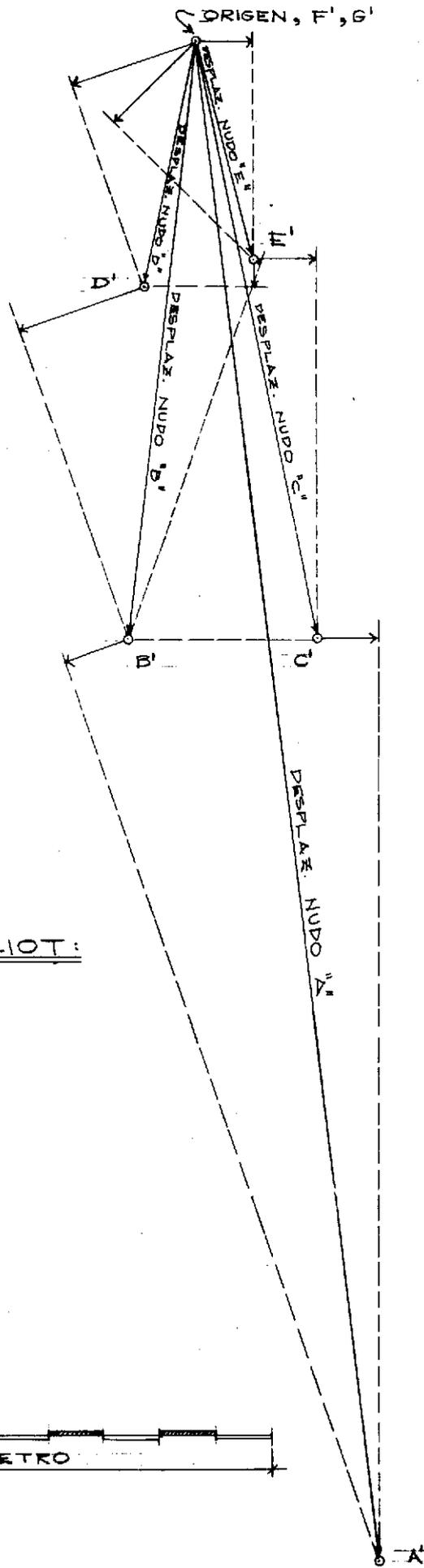


DIAGRAMA DE WILLIOT:

ESCALA:



Ahora bien, en muchas estructuras articuladas no existen tales condiciones, por lo que las deflexiones obtenidas por medio del Diagrama de Williot serán "relativas" a una junta o miembro que de hecho no está fija en cuanto a posición y dirección.

Así tenemos que el Diagrama de Rotación o Corrección de Mohr consiste en girar la estructura no deformada de tal forma que sus reacciones sean congruentes con los desplazamientos de juntas indicados en el Diagrama de Williot, el cual fué construido suponiendo la no rotación de un miembro cualquiera. (El Diagrama de Rotación debe superponerse sobre el Diagrama de Williot).

Para aclarar el desarrollo del Diagrama de Corrección de Mohr, se enumeran a continuación los pasos a seguir en su aplicación:

- a) Determinar, para todos los miembros de la estructura, las deformaciones debidas a los esfuerzos a que están sometidos.
- b) Investigar si la estructura posee algún miembro sin rotación y con un extremo fijo o si en su defecto posee un nudo determinado por la unión de dos miembros, para los cuales el extremo restante está fijo. Si en la estructura considerada se dá alguna de las dos condiciones anteriores entonces bastará aplicar el Diagrama de Williot; pero, si no se da ninguna condición entonces habrá que usar la Corrección de Mohr.
- c) Para aplicar la Corrección de Mohr debe primero suponerse un miembro sin rotación y con uno de sus extremos fijos.
- d) Se dibuja el Diagrama de Williot, basado en el miembro supuesto sin rotación y con un extremo fijo.
- e) Ya concluido el Diagrama de Williot podemos ver que los desplazamientos indicados para los nudos no son congruentes con las restricciones; esto indudablemente se debe al hecho de que la construcción del Diagrama de Williot se ha basado sobre suposiciones falsas.
- f) Ahora bien, la única forma como podemos lograr que las restricciones sean congruentes con los desplazamientos de nudos indicados en Diagrama de Williot, es haciendo girar la estructura no deformada ya que el Diagrama de ninguna manera se puede girar.

El giro aplicado a la estructura no deformada deberá ser de 90 grados desde su posición original; es este el Diagrama de Rotación de Mohr, el cual debe siempre estar superpuesto sobre el Diagrama De Williot. Para la construcción de este Diagrama de Rotación de Mohr debe tenerse el cuidado de elegir adecuadamente el punto de rotación de la estructura.

- g) La deflexión absoluta de cada nudo será la distancia entre los nudos de la estructura ya girada (en el ejemplo con "dobles primas") y los puntos determinados con el Diagrama de Williot (en el ejemplo con "una prima").

A continuación se resolverá un ejemplo para ilustrar la aplicación de Williot-Mohr:

### EJEMPLO

Sea la estructura mostrada en la Fig. 27, calcular los desplazamientos absolutos de los nudos al aplicar un sistema de cargas. Para facilitar el trabajo se dan las deformaciones sufridas por cada miembro, las cuales se supone fueron calculadas con anterioridad:

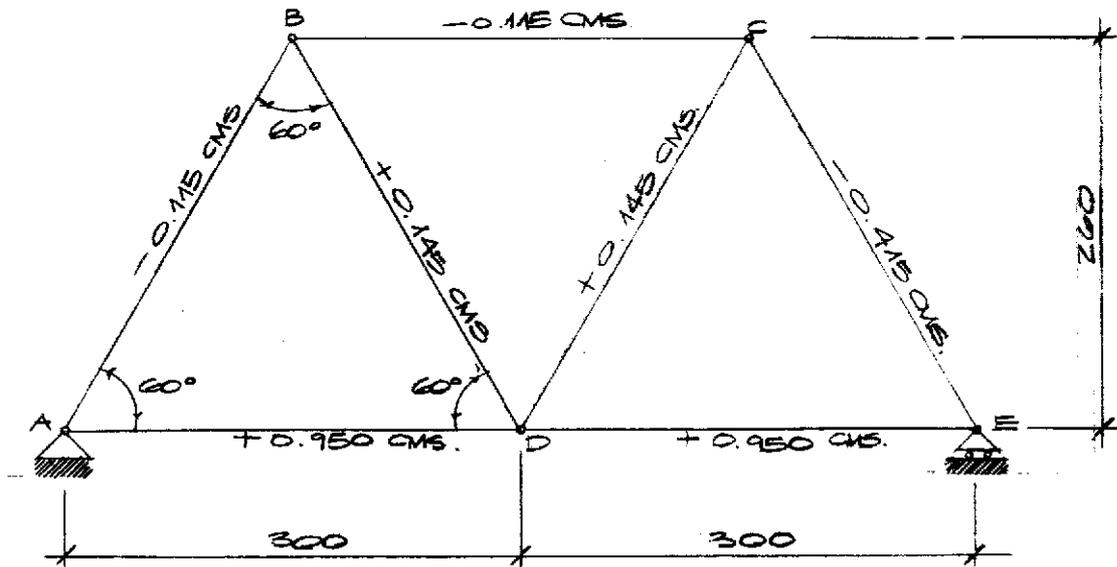


Figura 27

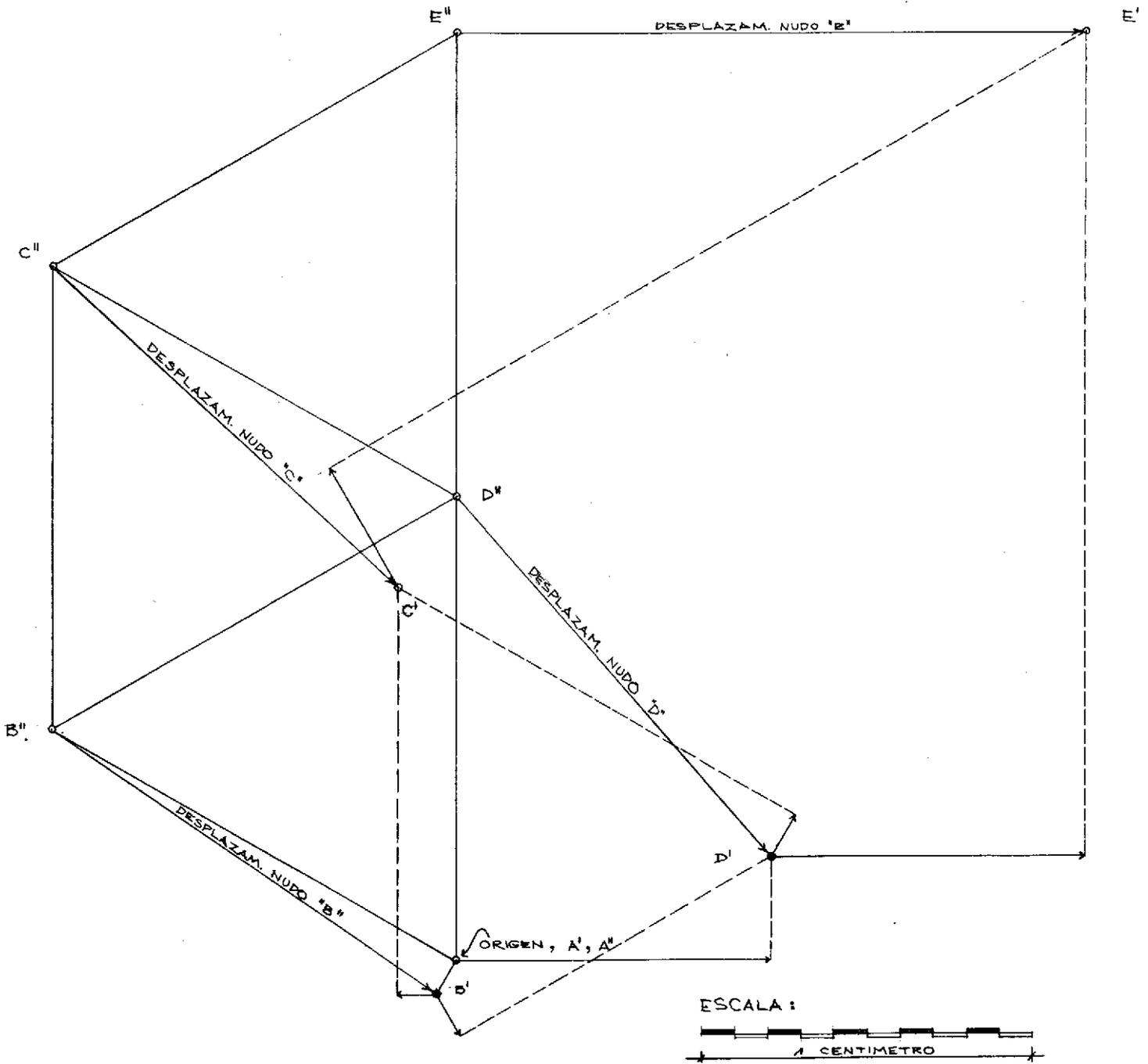
Como se puede ver en la figura anterior, la estructura no posee ningún miembro fijo y además todos rotan al sufrir deformación. Así pues se asumirá, para hacer el Diagrama de Williot-Mohr, que el miembro A-B no gira.

(El Diagrama de Williot Mohr está en la siguiente hoja). Las deformaciones medidas en el Diagrama de Williot-Mohr para cada uno de los miembros de la estructura son:

Nudo A =	0 cms.
Nudo B =	1.410 cms.
Nudo C =	1.425 cms.
Nudo D =	1.450 cms.
Nudo E =	1.903 cms.

Las direcciones y sentidos de estas deformaciones de cada nudo pueden verse en el propio diagrama.

DIAGRAMA DE WILLIOT Y ROTACION DE MOHR:



### 3. Métodos Matriciales:

Sin lugar a dudas, la introducción de las computadoras digitales en nuestro medio, ha motivado que el análisis de estructuras se efectúe mediante el uso de métodos matriciales. En la actualidad se ha enfatizado en dos métodos,

a) Flexibilidad y b) Rigidez

Dichos métodos tienen la gran ventaja de ser los más apropiados para la formulación de matrices, además representan las teorías más fundamentales de todas las disponibles.

A lo largo de este capítulo, únicamente se planterá el método de flexibilidad para calcular cualquier número de desplazamientos de nudo, en cualquier estructura articulada, debidos a varios sistemas de cargas.

Hay que hacer notar que para el planteo de estos métodos matriciales se asume de antemano que ya se conoce todo lo relacionado con el tema de Álgebra de Matrices.

A continuación se enumeran los principios básicos de los Métodos Matriciales:

- a) **Acciones y Desplazamientos:** Una acción es una combinación de fuerzas o pares o ya sea una fuerza distribuida. Un desplazamiento es una traslación o rotación en algún punto de una estructura.
- b) **Compatibilidad:** en un análisis de estructuras es necesario que se satisfagan no solo las ecuaciones de equilibrio sino también las condiciones de compatibilidad, las cuales se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura (condiciones de geometría).
- c) **Indeterminación Estática y Cinemática:** Debe tomarse en cuenta que cuando las incógnitas en el análisis son las acciones deberá considerarse la indeterminación estática, la cual se refiere a exceso de acciones desconocidas; así pues, esta indeterminación puede ser de dos tipos: externa e interna. Si las incógnitas en el análisis son los desplazamientos de nudos deberá considerarse la indeterminación cinemática, la cual se refiere a los desplazamientos de los nudos en la estructura.
- d) **Principio de Superposición:** este puede utilizarse siempre que existan relaciones lineales entre las acciones y los desplazamientos. En general, el principio dice que los efectos producidos por varias causas pueden obtenerse combinando los efectos debidos a las causas individuales.

#### **Método de la Flexibilidad:**

Este es un método bastante general que está basado en la determinación de acciones y desplazamientos debidos a la aplicación de valores unitarios en la estructura, valiéndose del principio de superposición.

Este método puede aplicarse a cualquier tipo de estructura no importando su grado de complejidad; además, su utilidad es muy grande si se analizan manualmente estructuras con un grado de indeterminación estática BAJO y un ALTO grado de indeterminación cinemática.

Esencialmente el método consiste en dos partes que son:

- a) Análisis estático y b) Operaciones matriciales.

Aunque lo que interesa en este trabajo es el estudio de las estructuras articuladas, es también conveniente conocer la notación y las ecuaciones fundamentales para el Método de Flexibilidad. A continuación únicamente se resumen dichas ecuaciones, considerando que si se desea profundizar en ellas habrá que auxiliarse con un libro especializado en la materia. Las ecuaciones son:

i.  $D = F A;$

Donde,

$D$  = Matriz de desplazamientos.  
 $F$  = Matriz de flexibilidad.  
 $A$  = Matriz de acciones.

ii.  $D_Q = D_{QL} + F Q,$

Donde,

$D_Q$  = Desplazamiento en estructura real correspondientes a las redundantes.  
 $D_{QL}$  = Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a las cargas.  
 $F$  = Desplazamientos en la estructura libre correspondiente a las redundantes y debidos a valores unitarios de las redundantes.  
 $Q$  = Acciones redundantes desconocidas.

iii.  $D_J = D_{JL} + D_{JQ} Q$

Donde,

$D_J$  = Desplazamientos de nudo en la estructura real.  
 $D_{JL}$  = Desplazamientos de nudo en la estructura libre debidos a las cargas.  
 $D_{JQ}$  = Desplazamientos de nudo en la estructura libre debidos a valores unitarios de las redundantes.

iv.  $A_M = A_{ML} + A_{MQ} Q;$

Donde,

$A_M$  = Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real.  
 $A_{ML}$  = Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real debidos a las cargas.

$A_{MQ}$  = Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real debidos a valores unitarios de las redundantes

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ} Q;$$

Donde,

$A_R$  = Reacciones en la estructura real.

$A_{RL}$  = Reacciones en la estructura libre debidas a las cargas.

$A_{RQ}$  = Reacciones en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes.

Aplicación del Método de Flexibilidad a las Estructuras Articuladas:

A continuación se decide un planteo para sistematizar el cálculo de DESPLAZAMIENTOS de nudos en estructuras de nudos articulados. Se basará tal planteo en el Método del Trabajo Virtual ya que éste se puede usar para calcular desplazamientos producidos por cargas sobre la estructura, así también como los producidos por cambios de temperatura y otros efectos.

En el Trabajo Virtual se consideran 2 sistemas de cargas:

- A) Sistema de cargas reales, temperatura, etc.
- B) Estructura sujeta a carga unitaria correspondiente a desplazamientos deseados en estructura real.

El Trabajo Virtual nos lleva a lo siguiente:

$$1 \times \Delta = \underbrace{\int \frac{Nn}{AE} dx}_{\text{Deformación total.}} + \underbrace{\int \frac{Mm}{EI} dx}_{\text{Deformación por carga axial.}} + \underbrace{\int \frac{Tt}{GJ} dx}_{\text{Deformación por flexión.}} + \underbrace{\int \frac{Vv}{AG} dx}_{\text{Deformación por torsión.}} + \underbrace{\int \frac{Vv}{AG} dx}_{\text{Deformación por corte.}}$$

Para la ecuación anterior se tiene que los términos N, M, T y V son debidos a las cargas reales sobre la estructura mientras que n, m, t y v son debidos a la carga unitaria aplicada sobre la estructura en el punto donde se busca la deformación total.

Ahora bien, cuando en el análisis de estructuras estamos calculando los desplazamientos, haciendo uso de ecuaciones matriciales y además aplicando el Método del Trabajo Virtual, es necesario que la estructura esté únicamente sujeta a cargas sobre los nudos; esto se logra transformando las cargas sobre los miembros en cargas equivalentes de nudo.

Como sabemos, el motivo de este trabajo son las Estructuras de Nudos Articulados, por lo que lo expuesto antes podemos simplificarlo aún mas, recordandonos unicamente que este tipo de estructuras solamente está afectado por cargas axiales; luego:

$$\Delta = \int \frac{N n}{AE} dx \quad \text{o sea;}$$

$$\Delta = \sum \frac{N n}{AE} L$$

Donde,

- $\Delta$  = Desplazamiento a calcular.  
 N = Carga axial en cada miembro debida a las cargas reales.  
 n = Carga axial en cada miembro debida a carga unitaria aplicada donde calculamos  $\Delta$ .  
 AE = Rigidez axial del miembro.  
 L = Longitud del miembro.

En cuanto a los signos tenemos:

N y n = son positivos si están a tensión y son negativos si están a compresión.

$\Delta$  y Carga unitaria = son positivos si tienen la misma dirección que los ejes coordenados utilizados para la estructura.

A continuación se expresará la ecuación anterior, pero en términos de acciones de extremo; debe recordarse que para una estructura de nudos articulados solo pueden haber dos acciones de extremo que son las cargas axiales en cada extremo. La ecuación queda así:

$$\Delta = \sum \frac{A_N A_n}{AE} L$$

Donde:

- $\Delta$  = Desplazamiento a calcular.  
 $A_N$  = Acción de extremo causada por las cargas reales en el extremo k del miembro j-k.  
 $A_n$  = Acción de extremo, causada por carga unitaria aplicada en punto donde buscamos  $\Delta$ , en extremo k del miembro j-k.  
 AE = Rigidez axial del miembro.  
 L = Longitud del miembro.

En la Fig. 28 se muestran dos sistemas de ejes; los ejes X, Y y Z que son orientados con la estructura y también los ejes  $X_{jk}$ ,  $Y_{jk}$  y  $Z_{jk}$  los cuales están asociados a un miembro en particular. Los ejes de miembro siempre tendrán su origen en el extremo j del miembro.

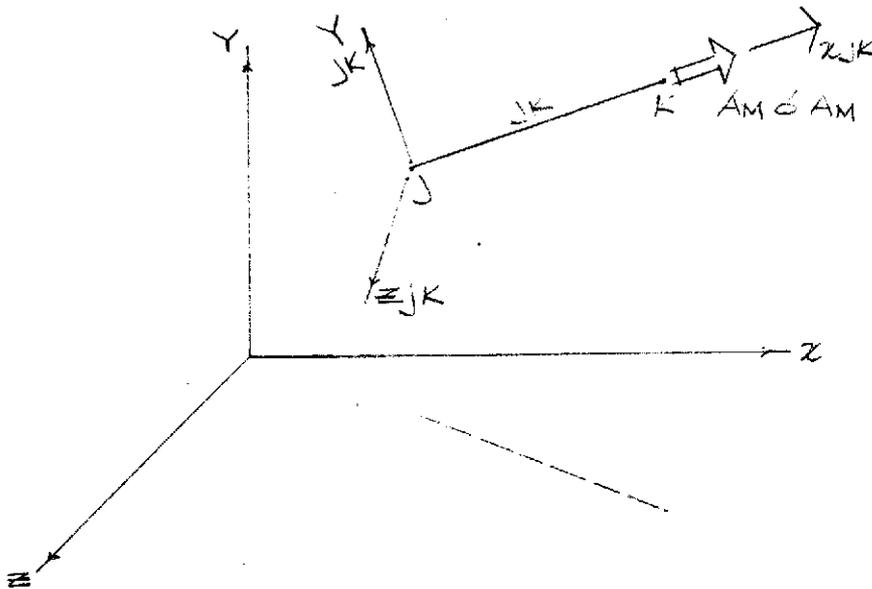


Figura 28

Hay que hacer notar que las acciones de extremo a considerar serán siempre las del extremo k.

En resumen, tenemos ya una ecuación para determinar desplazamientos en estructura articuladas, la cual está expresada en términos de acciones de extremo,

$$\Delta = \sum \frac{A_N A_n}{AE} L$$

Falta pues, únicamente, introducir la flexibilidad de miembro ( $F_M$ ). Esta se define como el desplazamiento del extremo del miembro causado por una fuerza axial unitaria. Así que:

$$F_M = \frac{PL}{AE}, \quad \text{pero } P=1$$

$$\therefore F_M = \frac{L}{AE}$$

De lo anterior podemos poner:

$$\Delta = \sum \frac{A_n A_n}{AE} L = \sum A_n A_n \frac{L}{AE}$$

$$\Delta = \sum A_n A_n F_M \quad \text{y reordenando,}$$

$$\Delta = \sum A_n F_M A_n$$

y para una forma matricial:

$$\bar{D} = \bar{A}_n^T \cdot \bar{F}_M \cdot \bar{A}_n$$

Donde:

$\bar{A}_n^T$  = Transpuesta del vector columna formado por las acciones de extremo  $A_n$  debidas a la carga unitaria.

$\bar{A}_n$  = Vector columna formado por las acciones de extremo  $A_n$  debidas a las cargas reales.

$\bar{F}_M$  = Matriz diagonal de flexibilidades que contiene las flexibilidades de los miembros a lo largo de su diagonal principal.

Suponiendo que la estructura articulada posee "m" miembros y que es necesario calcular "n" desplazamientos los cuales son producidos por "p" sistemas de carga; las matrices anteriores tendrán las formas siguientes:

$\bar{D}$ ; es de orden "nxp",

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \dots & D_{mp} \end{bmatrix} \Rightarrow D_{np} = \text{Desplazamientos (de 1 a n) para cada sistema de carga (de 1 a p).}$$

$\overline{A}_n$  : es de orden "mxn",

$$\overline{A}_n = \begin{bmatrix} A_{n11} & A_{n12} & \dots & A_{n1n} \\ A_{n21} & A_{n22} & \dots & A_{n2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nm1} & A_{nm2} & \dots & A_{nmn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A_{n_{mxn}}$  = Es la acción de extremo en miembros (de 1 a m), causada por carga unitaria colocada en el punto en que buscamos el desplazamiento (de 1 a n).

$\overline{F}_M$  : es de orden "mxm",

$$\overline{F}_M = \begin{bmatrix} F_{M1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{M2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & F_{Mm} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow F_{M_m}$  = Deformación en cada miembro al aplicarse una carga unitaria (para m miembros).

$\overline{A}_N$  : es de orden "mxp",

$$\overline{A}_N = \begin{bmatrix} A_{N11} & A_{N12} & \dots & A_{N1p} \\ A_{N21} & A_{N22} & \dots & A_{N2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Nm1} & A_{Nm2} & \dots & A_{Nmp} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A_{N_{mp}}$  = Es la acción de extremo en miembros (de 1 a m) causada por cada sistema de cargas (de 1 a p) sobre la estructura.

Luego de todo lo expuesto anteriormente, tenemos que para calcular cualquier número de desplazamientos de nudo, en cualquier estructura articulada, debido a varios sistemas de cargas basta con utilizar la ecuación matricial definida con anterioridad,

$$\overline{D} = \overline{A}_n^t \cdot \overline{F}_m \cdot \overline{A}_N$$

Para aclarar cualquier duda de lo expuesto anteriormente se plantea el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 12:

Sea la estructura articulada mostrada en la Figura. 30, la cual está sujeta a dos sistemas de carga ( $P_1$  y  $P_2$ ); calcular los desplazamientos del nudo A (Horizontal y Vertical) y del nudo C (Horizontal)..

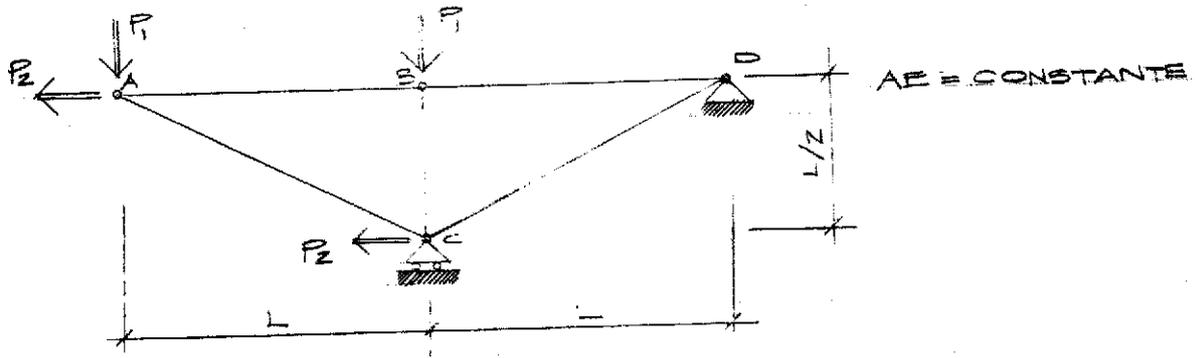
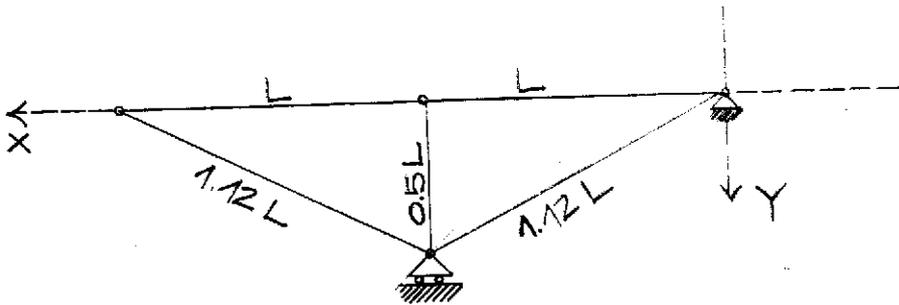


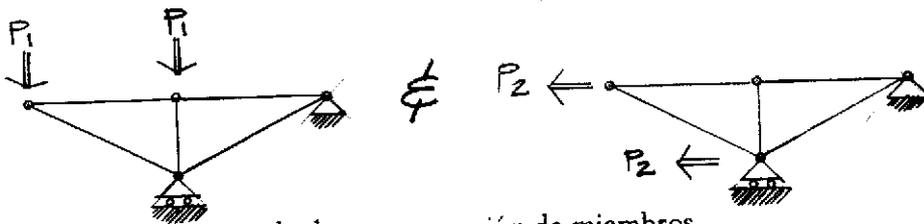
Figura 30

**Solución:**

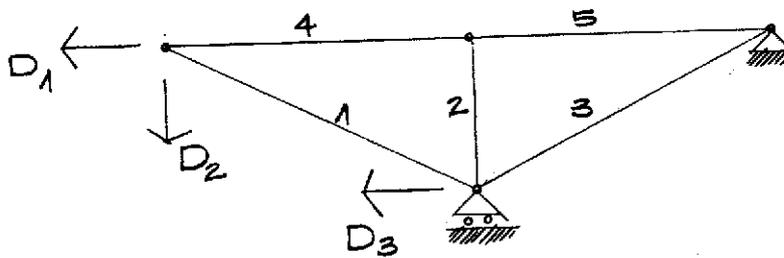
a) Longitudes de miembros y ejes asumidos,



b) Sistemas de Cargas,



c) Desplazamientos a calcular y numeración de miembros,



- d) Matriz de Flexibilidad: para este caso en particular se trata de una matriz de orden  $5 \times 5$  y en la diagonal tiene las deformaciones para cada miembro sometido a una carga unitaria.

$$\overline{F}_M = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- e) Matriz  $\overline{A}_N$ : Está formada por acciones de extremo debidas a los dos sistemas de carga; para este ejemplo es de orden  $5 \times 2$ . Así tenemos,

- i) Para el primer sistema de cargas:  $(P_1)$

$$A_{N11} = -2.24 P_1$$

$$A_{N21} = -1.00 P_1$$

$$A_{N31} = -2.24 P_1$$

$$A_{N41} = +2.00 P_1$$

$$A_{N51} = +2.00 P_1$$

- ii) Para el segundo sistema de cargas:  $(P_2)$

$$A_{N12} = 0$$

$$A_{N22} = 0$$

$$A_{N32} = +1.12 P_2$$

$$A_{N42} = +1.00 P_2$$

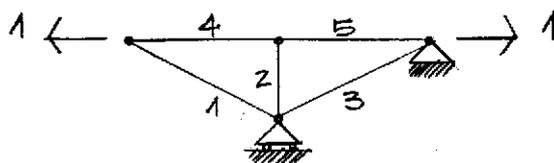
$$A_{N52} = +1.00 P_2$$

Luego:

$$\overline{A}_N = \begin{bmatrix} -2.24 P_1 & 0 \\ -1.00 P_1 & 0 \\ -2.24 P_1 & +1.12 P_2 \\ +2.00 P_1 & +1.00 P_2 \\ +2.00 P_1 & +1.00 P_2 \end{bmatrix}$$

- f) Matriz  $\overline{A}_n$ : Está formada por las acciones de extremos debidas a cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos deseados; para nuestro ejemplo es de orden  $5 \times 3$ . Así que,

- i. Para carga unitaria correspondiente a  $D_1$ :



$$A_{n11} = 0$$

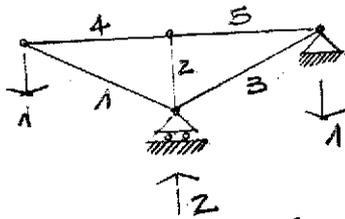
$$A_{n21} = 0$$

$$A_{n31} = 0$$

$$A_{n41} = +1.00$$

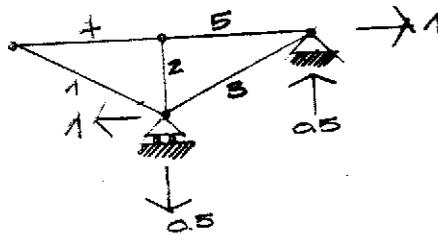
$$A_{n51} = +1.00$$

II. Para carga unitaria correspondiente a  $D_2$ :



$$\begin{aligned} A_{n12} &= -2.24 \\ A_{n22} &= 0 \\ A_{n32} &= -2.24 \\ A_{n42} &= +2.00 \\ A_{n52} &= +2.00 \end{aligned}$$

III. Para carga unitaria correspondiente a  $D_3$ :



$$\begin{aligned} A_{n13} &= 0 \\ A_{n23} &= 0 \\ A_{n33} &= +1.12 \\ A_{n43} &= 0 \\ A_{n53} &= 0 \end{aligned}$$

Luego, la matriz es:

$$\overline{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & -2.24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.24 & 1.12 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y su transpuesta,

$$\overline{A}_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2.24 & 0 & -2.24 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1.12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g) Forma de la matriz de desplazamientos:

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix}$$

Para la cual se tiene que  $D_{np}$  indica:

$n$  = Lugar del desplazamiento.

$p$  = Sistema de carga.

h) Efectuando el producto de matrices:

$$\bar{D} = \bar{A}_n^T \cdot \bar{F}_M \cdot \bar{A}_N$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2.24 & 0 & -2.24 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1.12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.24 P_1 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ -2.24 P_1 & 1.12 P_2 \\ 2 P_1 & P_2 \\ 2 P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

(3 x 2) (3 x 5) (5 x 5) (5 x 2)

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2.51 & 0 & -2.51 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.24 P_1 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ -2.24 P_1 & 1.12 P_2 \\ 2 P_1 & P_2 \\ 2 P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

(3x2) (3x5) (5x2)

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 4 P_1 & 2 P_2 \\ 19.24 P_1 & 1.19 P_2 \\ -2.80 P_1 & 1.4 P_2 \end{bmatrix}$$

(3x2) (3x2)

De la igualdad matricial anterior tenemos:

$$D_{11} = 4 P_1 L / AE$$

$$D_{21} = 19.24 P_1 L / AE$$

$$D_{31} = -2.80 P_1 L / AE$$

&

$$D_{12} = 2 P_2 L / AE$$

$$D_{22} = 1.19 P_2 L / AE$$

$$D_{32} = 1.4 P_2 L / AE$$

**Observaciones:**

1. Como se ve, cada desplazamiento posee dos subíndices, los cuales significan:
  - i. El primero indica el desplazamiento al que nos referimos.
  - ii. El segundo indica el sistema de carga que lo produce.
2. Es de suma importancia el darle una notación adecuada tanto a los miembros como a los nudos de la estructura.

**Método de la Rigidez:**

Este método es muy similar al de Flexibilidad, en lo que a su formulación matemática se refiere ya que también se lleva a cabo mediante álgebra matricial; además ambos métodos hacen uso del principio de superposición.

Ahora bien, en el Método de Rigidez se tiene que las incógnitas son los desplazamientos de nudo; luego, para las estructuras articuladas los desplazamientos de nudo son demasiados lo cual nos viene a determinar un grado muy alto en cuanto a indeterminación cinemática. Lo anterior nos lleva a concluir que la aplicación del Método de la Rigidez a las estructuras articuladas es poco eficiente, máxime si se trata de aplicar a mano o sea sin el uso de una calculadora.

Considero conveniente señalar que si se desea estudiar a fondo este método, habrá que recurrir a otras tesis que ya lo han tratado y las cuales se mencionan en la bibliografía.

**4. Métodos programados:**

En relación a este tema únicamente se menciona que son los métodos matriciales los que dan origen a la programación de computadoras.

Si se quiere analizar una estructura que posee un alto grado de indeterminación, tanto estática como cinemática, estamos ante un caso cuya resolución a mano sería muy laboriosa y hasta cierto punto complicada. El único camino a seguir es utilizar un programa de computadora.

En las tesis mencionadas en la bibliografía aparecen algunos programas aplicables a estructuras de nudos articulados.

## CAPITULO V:

### Análisis de Estructuras de Nudos Articulados Estáticamente Indeterminadas.

Después de que en el capítulo anterior se consideró todo lo relacionado con desplazamientos de nudos en una estructura estáticamente determinada, lo que quedaría por exponer es la forma de enfocar las estructuras estáticamente indeterminadas.

Cabe recordar algunos conceptos sobre indeterminación:

1. Estructura Estáticamente Indeterminada: es toda estructura a la cual no se le pueden determinar sus componentes de reacción mediante el uso de las 3 ecuaciones de la estática.
2. Indeterminación Interna: sucede cuando en una estructura sí se pueden determinar las componentes de reacción, pero por otro lado se tiene que las 3 ecuaciones de equilibrio estático son insuficientes para determinar los esfuerzos en los miembros de dicha estructura.
3. Indeterminación Externa: sucede cuando en una estructura no podemos determinar las componentes de reacción con el uso de las 3 ecuaciones de la estática.
4. Indeterminación Total: está determinada por el grado de indeterminación interna y externa de la estructura. Para determinar el grado de indeterminación total puede usarse la ecuación discutida en el segundo capítulo:

$$2j = b + r \text{ Donde; } \begin{array}{l} j = \text{número de nudos.} \\ b = \text{número de barras.} \\ r = \text{número de reacciones desconocidas.} \end{array}$$

Es conveniente hacer notar que al determinar el grado de indeterminación de la estructura, debe además chequearse por simple inspección, ya que la ecuación anterior puede en algunos casos cumplirse y sin embargo estar ante una estructura estáticamente indeterminada.

A continuación se desarrollan los métodos mas versátiles conocidos hasta hoy para el análisis de estructuras de nudos articulados estáticamente indeterminadas. El planteamiento de dichos métodos se hará esencialmente mediante el planteo de algunos ejemplos.

#### 1. Método General:

En la aplicación de este método se suprimen los esfuerzos y/o componentes de reacción redundantes, con lo cual se reduce la estructura a una condición de determinación y estabilidad.

El concepto anterior nos permite suprimir cualquier condición de componentes de esfuerzos y/o reacciones redundantes, escribiendo para el efecto una ecuación de condición de deflexión para cada punto de aplicación de una componente de esfuerzo o reacción redundante. En cada ecuación se tendrá que el miembro de la izquierda es una suma de todas las componentes de deflexión que son causadas por todas las cargas reales y las componentes redundantes de esfuerzos o reacciones que actúan sobre la estructura. El miembro de la derecha es la suma de estas componentes de deflexión (generalmente es cero).

La resolución simultánea de las ecuaciones anteriores darán las magnitudes y sentidos de las componentes redundantes de esfuerzos y/o reacciones

A continuación se desarrollan algunos ejemplos para aclarar la aplicación del Método General.

**EJEMPLO No. 13: (Indeterminación externa)**

Sea la estructura de nudos articulados de la Fig. 31, calcular las reacciones en los apoyos:

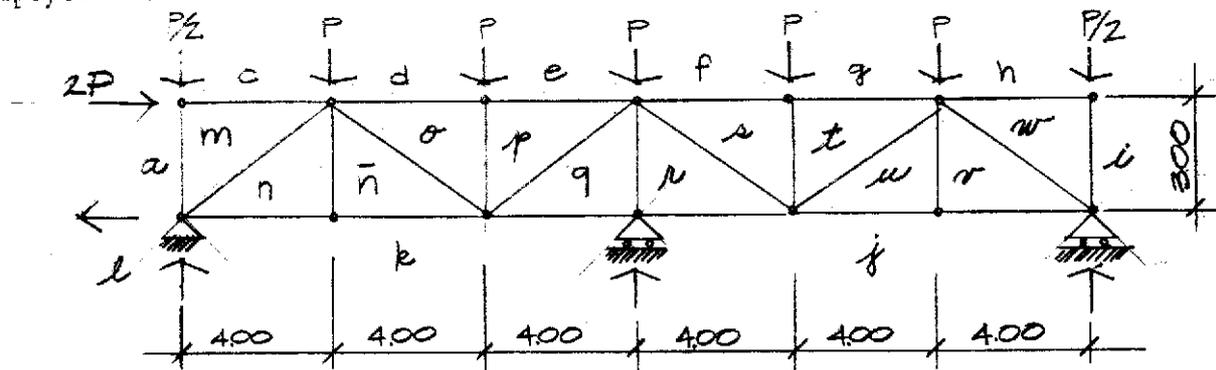


Figura 31

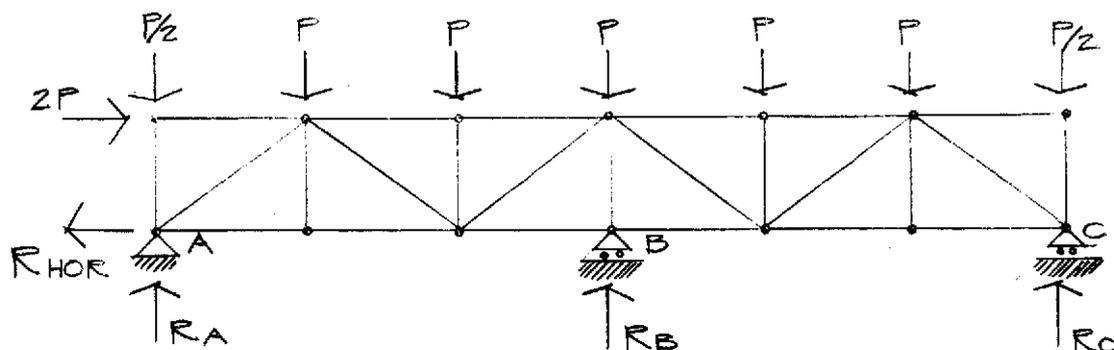
Area de los miembros:

- i) Cordon Inferior =  $32.26 \text{ cm}^2$
- ii) Cordon superior =  $38.71 \text{ cm}^2$
- iii) Diagonales y verticales =  $25.81 \text{ cm}^2$

$$E = 2100 \text{ TON/CM}^2.$$

$$P = 4.54 \text{ TON.}$$

Cálculo de reacciones:



$$\sum F_{\text{HOR}} = 0 \Rightarrow R_{\text{HOR}} = 2P = 2 \times 4.54$$

$$\therefore R_{\text{HOR}} = 9.08 \text{ Ton}$$

$$\sum F_{\text{VERT}} = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C = 6P = 6 \times 4.54$$

$$\therefore R_A + R_B + R_C = 27.24 \text{ Ton} \quad \text{--- (I)}$$

$$\sum M_P = 0 \Rightarrow f(R_A, R_B, R_C) = 0 \quad \text{--- (II)}$$

Así que tenemos solo 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que la estructura es indeterminada de 1er grado. Si asumimos como redundante a  $R_B$  tenemos que proceder como sigue:

- i) Determinar la deflexión total del nudo B al suprimir el apoyo:

$$\Delta_B = \sum \frac{\mu SL}{AE}$$

- ii) Determinar la deflexión unitaria en B en el sentido de  $R_B$  aplicando una carga unitaria:

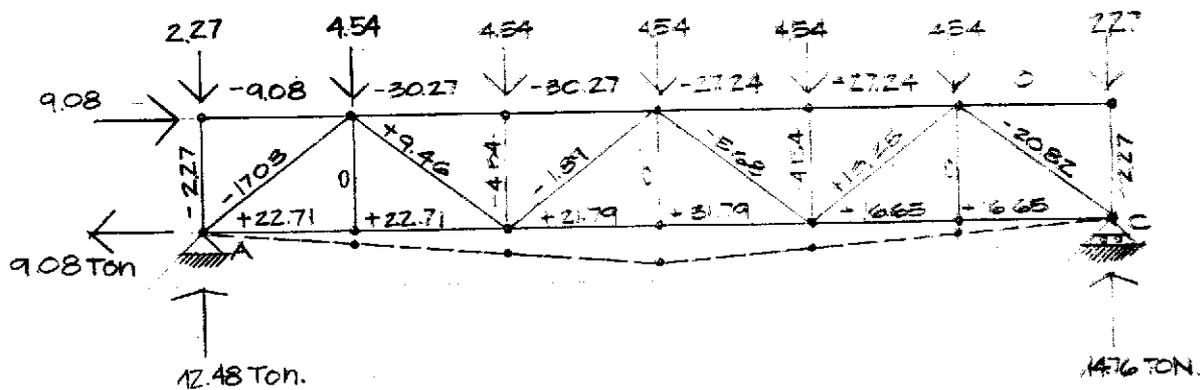
$$\delta_B = \sum \frac{\mu_i^2 L}{AE}$$

- iii) En el apoyo B se debe tener una reacción de magnitud suficiente para evitar cualquier deflexión vertical del nudo B. Esto se verifica si:

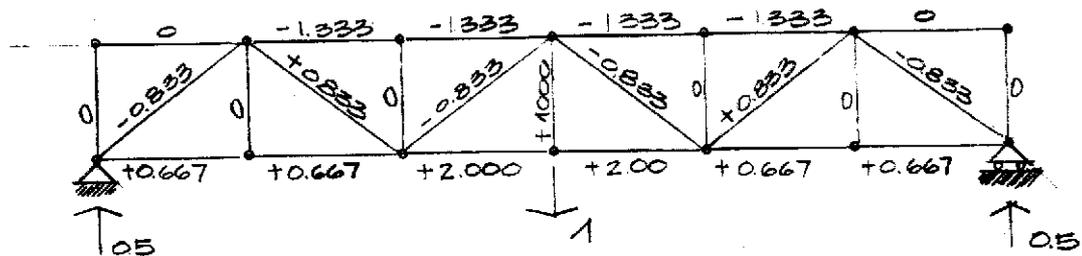
$$\Delta_B - \delta_B \cdot R_B = 0$$

Ya con la estructura modificada (determinada y estable), tenemos:

- a) Determinación de esfuerzos en los miembros debidos a las cargas reales (S):



- b) Determinación de esfuerzos en los miembros debidos a la carga unitaria en el sentido de  $\Delta_B$  (M):



- c) Determinar los esfuerzos en los miembros debidos a la carga unitaria en el sentido de  $R_B$  ( $M_1$ ):

\* Todos los  $M_1 = -M$ , pero en vista que este  $M_1$ , nos sirve para calcular un  $M_1^2$  podrán utilizarse los mismos valores de  $M$  ya que el resultado siempre será positivo.

d) Haciendo una tabulación de los resultados, la cual aparece en esta hoja, resulta:

$$\Delta_B - \delta_B \cdot R_B = 0$$

$$\Delta_B = \delta_B \cdot R_B$$

$$\therefore R_B = \frac{\Delta_B}{\delta_B}$$

$$R_B = \frac{2.3387}{0.1363} \Rightarrow R_B = 17.1585 \text{ Ton}$$

Miembro	Longitud (cms)	Area (cms <sup>2</sup> )	S (TON.)	$\mu$ (TON.)	$\frac{S\mu L}{AE}$	$\frac{\mu^2 L}{AE}$
o-m	400	38.71	- 9.08	0	0	0
d-o	400	38.71	- 30.27	- 1.333	+ 0.1985	+ 0.0087
e-p	400	38.71	- 30.27	- 1.333	+ 0.1985	+ 0.0087
f-s	400	38.71	- 27.24	- 1.333	+ 0.1787	+ 0.0087
g-t	400	38.71	- 27.24	- 1.333	+ 0.1787	+ 0.0087
h-W	400	38.71	0	0	0	0
a-m	300	25.81	- 2.27	0	0	0
m-n	500	25.81	- 17.03	- 0.833	+ 0.1309	+ 0.0064
n-N	300	25.81	0	0	0	0
n-o	500	25.81	+ 9.46	+ 0.833	+ 0.0727	+ 0.0064
o-p	300	25.81	- 4.54	0	0	0
p-q	500	25.81	- 1.89	- 0.833	+ 0.0145	+ 0.0064
q-r	300	25.81	0	+ 1.000	0	+ 0.0055
r-s	500	25.81	- 5.68	- 0.833	+ 0.0436	+ 0.0064
s-t	300	25.81	- 4.54	0	0	0
t-v	500	25.81	+ 13.25	+ 0.833	+ 0.1018	+ 0.0064
u-v	300	25.81	0	0	0	0
v-w	500	25.81	- 20.82	- 0.833	+ 0.1600	+ 0.0064
w-i	300	25.81	- 2.27	0	0	0
m-k	400	32.26	+ 22.71	+ 0.667	+ 0.0894	+ 0.0026
N-k	400	32.26	+ 22.71	+ 0.667	+ 0.0894	+ 0.0026
q-k	400	32.26	+ 31.79	+ 2.000	+ 0.3754	+ 0.0236
r-j	400	32.26	+ 31.79	+ 2.000	+ 0.3754	+ 0.0236
u-j	400	32.26	+ 16.65	+ 0.667	+ 0.0656	+ 0.0026
v-j	400	32.26	+ 16.65	+ 0.667	+ 0.0656	+ 0.0026
$\Sigma =$					+ 2.3387	+ 0.1363

 $\Delta_B$ 
 $\delta_B$

Ya con los cálculos anteriores podemos determinar las reacciones, así:

$$R_A + R_B + R_C = 27.24 \quad \text{--- (I)}$$

$$R_B = 17.16 \text{ Ton}$$

$$R_A + R_C = 10.08 \text{ Ton.}$$

Con una suma de momentos,

$$\sum \mathcal{M}_A = 0$$

$$(R_B \times 12) + (R_C \times 24) - (9.08 \times 3) - [4.54(4+8+12+16+20)] - (2.27 \times 24) = 0$$

$$\therefore R_C = \frac{27.24 + 272.40 + 54.48 - 205.92}{24}$$

$$R_C = \frac{148.20}{24}$$

$$R_C = 6.18 \text{ Ton.}$$

De (I):

$$R_A = 10.08 - 6.18$$

$$\therefore R_A = 3.90 \text{ Ton.}$$

Como resumen tenemos que las reacciones de la estructura son:

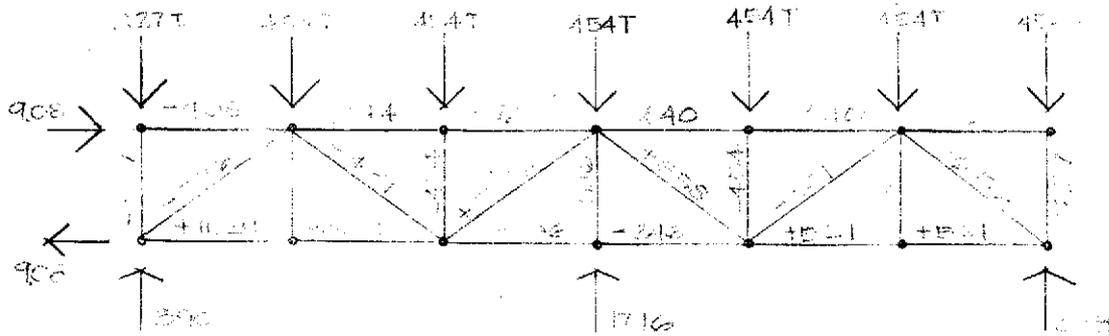
$$R_{A_{\text{HOR}}} = 9.08 \text{ Ton (a la izquierda)}$$

$$R_{A_{\text{VER}}} = 3.90 \text{ Ton (hacia arriba)}$$

$$R_{B_{\text{VER}}} = 17.16 \text{ Ton (hacia arriba)}$$

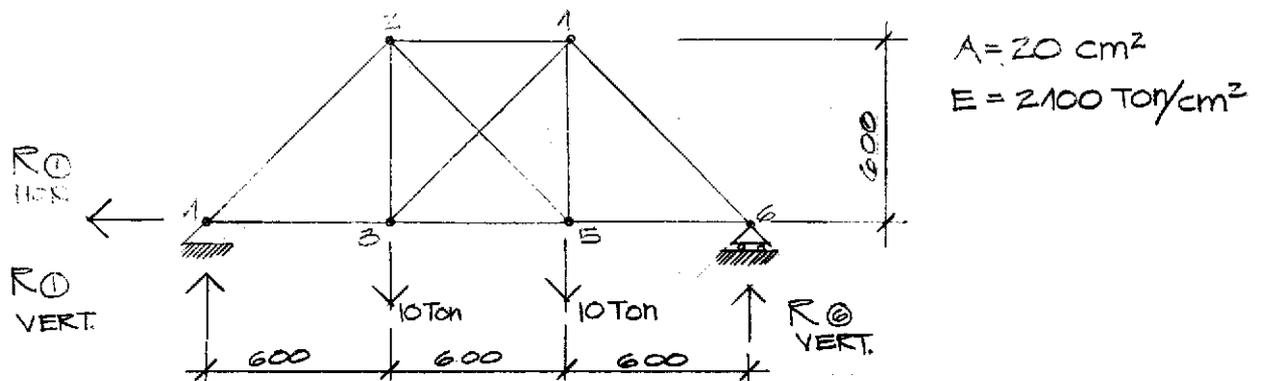
$$R_{C_{\text{VER}}} = 6.18 \text{ Ton (hacia arriba)}$$

Ya con las reacciones anteriores podemos calcular los esfuerzos en los miembros de la estructura, utilizando para el efecto cualquiera de los métodos propuestos en el capítulo 3; así se tiene:



#### EJEMPLO No. 14: (indeterminación Interna)

Sea la estructura articulada mostrada en la Fig. 32; determinar el esfuerzo en el miembro 3-4 cuando a la estructura se le aplican las cargas mostradas.



Por inspección se ve que la estructura es estáticamente indeterminada (internamente) de 1er grado.

Para lograr una condición de estabilidad y determinación en la estructura, escogemos arbitrariamente un miembro redundante. En nuestro caso escogemos el miembro 3-4 ya que así obtenemos directamente la respuesta.

a) Cálculo de las reacciones:

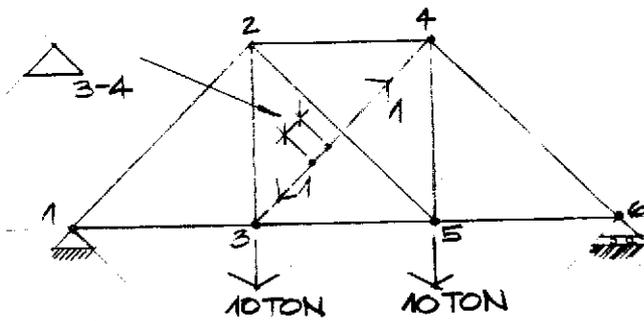
$$\sum F_{HOR} = 0 \Rightarrow \sum_{HOR} R = 0$$

$$\sum M_{\odot} = 0 \Rightarrow 10 R_{3-4} = 10(2-10)$$

$$\Rightarrow \sum_{HOR} R = 10 \text{ TON}$$

$$\sum F_{VER} = 0 \Rightarrow \sum_{VER} R = 10 \text{ TON}$$

b) La nueva estructura ya modificada es:



$$\Delta_{3-4} = \sum \frac{u \cdot S}{AE}$$

$$\delta_{3-4} = \sum \frac{u^2 L}{AE}$$

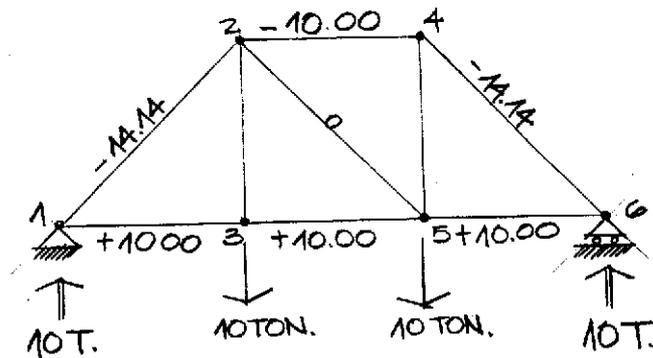
Donde

- $u$  = esfuerzo en cada miembro causado por el par de fuerzas ficticias unitarias de tensión.
- $S$  = esfuerzo en cualquier miembro debido a cargas reales.

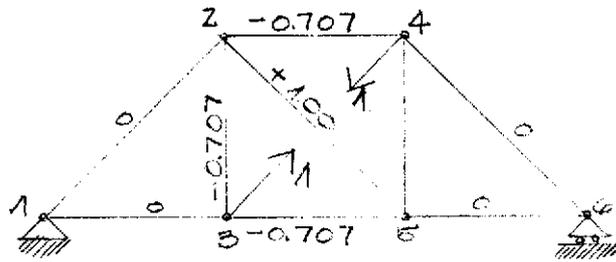
Deberá cumplirse que:

$$\Delta_{3-4} + \delta_{3-4} \cdot T = 0$$

c) Valores de  $S$  :



b) Valores de  $M$  :



Tabulando los valores anteriores:

Miembro	Longit. (cms)	S (Ton)	M (Ton)	$M \cdot S \cdot L$	$M^2 \cdot L$
1-3	600	+ 10.00	0	0	0
2-3	600	+ 10.00	- 0.707	- 4242	+ 299.9
2-4	600	- 10.00	- 0.707	+ 4242	+ 299.9
3-5	600	+ 10.00	- 0.707	- 4242	+ 299.9
4-5	600	+ 10.00	- 0.707	- 4242	+ 299.9
5-6	600	+ 10.00	0	0	0
1-2	849	- 14.14	0	0	0
2-5	849	0	+ 1.000	0	+ 849.0
3-4	849	0	+ 1.000	0	+ 849.0
4-6	849	- 14.14	0	0	0
$\Sigma =$				- 8484	+ 2897.6

Luego;

$$\Delta_{3-4} + \delta_{3-4} \cdot T = 0$$

$$\delta_{3-4} \cdot T = -\Delta_{3-4}$$

$$T = \frac{-(-8484)}{2897.6}$$

$$\therefore T = 2.93 \text{ Ton.}$$

Así que, el miembro 3-4 está afectado por una fuerza de tensión de 2.93 Ton.

**EJEMPLO No. 15: (Indeterminación externa e interna)**

Sea la estructura mostrada en la Fig. 33; explicar el procedimiento a seguir para determinar los esfuerzos en los miembros 3-4 y 4-7 y además la reacción en el apoyo B:

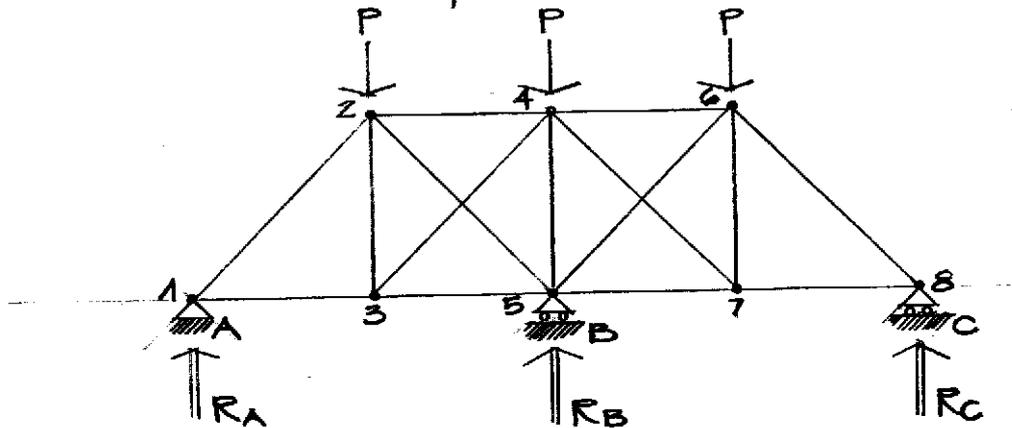
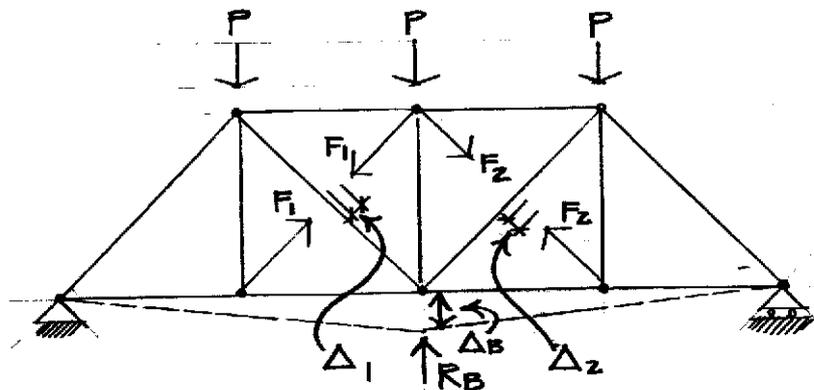


Figura 33.

Si tomamos como redundantes los miembros 3-4 y 4-7 y la reacción en B ( $R_B$ ), tenemos:



Las 3 ecuaciones son:

$$\Delta_B^{\circ} \cdot R_B = \sum f_{R_B} S \frac{L}{AE} = 0 \quad \text{--- (I)}$$

$$\Delta_1^{\circ} \cdot F_1 = \sum f_{F_1} S \frac{L}{AE} = 0 \quad \text{--- (II)}$$

$$\Delta_2^{\circ} \cdot F_2 = \sum f_{F_2} S \frac{L}{AE} = 0 \quad \text{--- (III)}$$

Donde:

$$f_a = \text{esfuerzos en los miembros debidos a la aplicaci3n de "a"}$$

$$S = \text{Esfuerzos en los miembros debidos a la aplicaci3n de las cargas reales, } F_1, F_2 \text{ y } R_B.$$

Luego:

Cada ecuaci3n ser3 de la forma:  $\sum (\text{Funci3n } (P, F_1, F_2, R_B)) = 0$

$$\therefore \sum \text{Funci3n } (P, F_1, F_2, R_B) = 0 \text{ ---(I)}$$

$$\sum \text{Funci3n } (P, F_1, F_2, R_B) = 0 \text{ ---(II)}$$

$$\sum \text{Funci3n } (P, F_1, F_2, R_B) = 0 \text{ ---(III)}$$

$\therefore$  3 ecuaciones con 3 inc3gnitas.

$$(F_1, F_2, R_B)$$

**Observaci3n:**

El planteamiento anterior nos lleva a determinar que en la soluci3n para el ejemplo 13, pudo haberse procedido as3:

$$\Delta_B \cdot R_B = \sum f S \frac{L}{AE} = 0$$

Donde:

$f$  = esfuerzos en los miembros, debidos a la aplicaci3n de una fuerza  $F$  arbitraria en  $B$ .

$S$  = esfuerzos en los miembros, debidos a las cargas sobre la estructura ( $P$  y  $R_B$ )

Como se ve, en este planteo se considera a  $R_B$  como una fuerza externa sobre la estructura. El ejemplo 14 tambi3n pudo trabajarse de la siguiente manera:

a) Si en el an3lisis se considera tambi3n el miembro redundante:

$$\Delta_{3-4} \cdot T = \sum f S \frac{L}{AE} = 0$$

b) Si no se considera el miembro redundante:

$$\Delta_{3-4} \cdot T = \sum f S \frac{L}{AE} \quad \text{con } \Delta_{3-4} = e_{3-4}$$

$$\therefore \frac{TL}{AE} \cdot T = \sum f S \frac{L}{AE}$$

Donde:

$$f = \text{esfuerzos debidos a la aplicación de T.}$$

$$S = \text{esfuerzos debidos a la aplicación de P } \neq T.$$

## 2. Método del Trabajo Mínimo:

Este también es conocido como el Segundo Teorema de Castigliano o como el Método de Menabrea. Es un método muy efectivo para el análisis de estructuras articuladas estáticamente indeterminadas, apesar de que no puede usarse para determinar esfuerzos causados por errores de fabricación, cambios de temperatura o asentamientos de apoyo.

El Segundo Teorema de Castigliano Puede enunciarse así:

“En una estructura indeterminada cargada, los valores de las redundantes serán tales que hagan un mínimo a la energía de deformación interna elástica total; esta energía resulta de la aplicación de un sistema dado de cargas”.

A continuación se hace una deducción simple del enunciado anterior: Sea una estructura articulada,

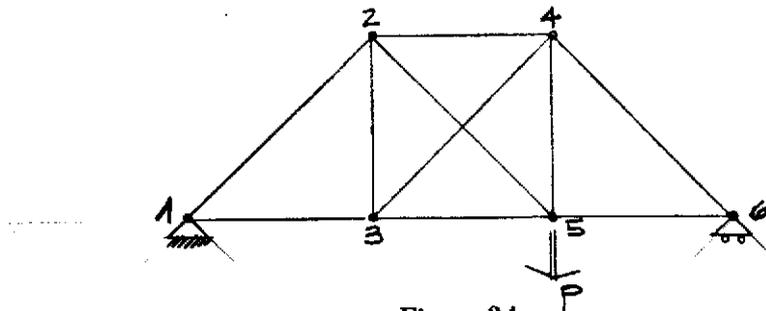


Figura 34

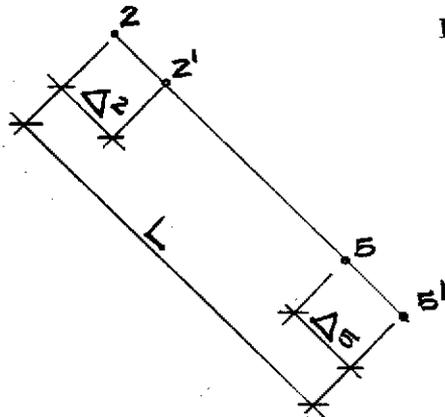
Esta es una estructura estáticamente indeterminada, ya que:

$$2j = b + r$$

$$2 \times 6 \neq 10 + 3$$

$$12 \neq 13$$

Si de la estructura anterior tomamos el miembro 2-5, tenemos:



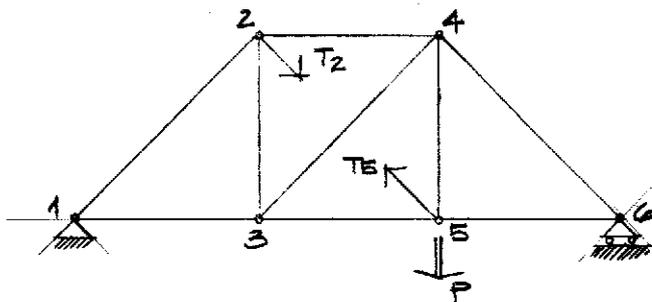
El alargamiento de la barra será;

$$e_{2-5} = \frac{SL}{AE}$$

Donde:

- S = esfuerzo del lado a P.  
 L = longitud del miembro.  
 A = área de sección transversal del miembro.  
 E = módulo de elasticidad.

Por otro lado sabemos que para tener una estructura determinada y estable, basta que en lugar del miembro 2-5, hagamos una sustitución como la mostrada;



La estructura es ya estable y determinada.

Ahora recordemos que  $\Delta_2$  y  $\Delta_5$  podemos calcularlos aplicando el Primer Teorema de Castigliano, así;

$$\Delta_2 = \frac{\partial W_1}{\partial T_2}$$

$$\Delta_5 = \frac{\partial W_1}{\partial T_5}$$

Donde:

- $W_1$  = energía interna total de la formación elástica en la estructura, bajo la acción de las cargas externas (P,  $T_2$  y  $T_5$ ), con la barra 2-5 suprimida.

Por simple inspección se puede notar que  $\Delta_5$  es negativa, ya que  $T_5$  es opuesta al sentido de la deflexión del nudo 5 a lo largo del miembro 2-5, luego:

$$\Delta_2 + \Delta_5 = \frac{\partial W_1}{\partial T_2} + \frac{\partial W_1}{\partial T_5}$$

Logicamente, la deformación elástica del miembro 2-5 será de igual magnitud que  $\Delta_2 + \Delta_5$ , ya que esta se extiende entre los nudos 2 y 5, así que:

$$\Delta_2 + \Delta_5 + e_{2-5} = 0$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial T_2} + \frac{\partial W_1}{\partial T_5} + \frac{SL}{AE} = 0$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial S} + \frac{SL}{AE} = 0 \quad \text{--- (I)}$$

Como se dijo anteriormente,  $W_1$  no incluye la energía interna de deformación del miembro 2-5. Ahora bien, dicha energía para el miembro 2-5 es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial S} (W_{2-5}) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{S^2 L}{2AE} \right) = \frac{SL}{AE}$$

De lo anterior tenemos que la ecuación (I) significa lo siguiente:

$$\frac{\partial W_1}{\partial S} = \text{energía interna de deformación sin incluir el miembro 2-5}$$

$$\frac{SL}{AE} = \text{energía interna de deformación para el miembro 2-5.}$$

o sea,

$$\frac{\partial W_1}{\partial S} + \frac{SL}{AE} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial S} = 0$$

Donde,  
 $W =$  energía interna total de deformación para la estructura mostrada (incluye miembro 2-5).

Es esta última expresión la que viene a justificar la definición dada para el Segundo Teorema de Castigliano. Para estructuras de nudos articulados se tiene,

$$\Delta = \frac{\partial W}{\partial T} = \sum S \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) \frac{L}{AE} = 0$$

**EJEMPLO 16:**

Sea la estructura articulada mostrada en la Figura 35, determinar el esfuerzo a que está sometido el miembro A-D;

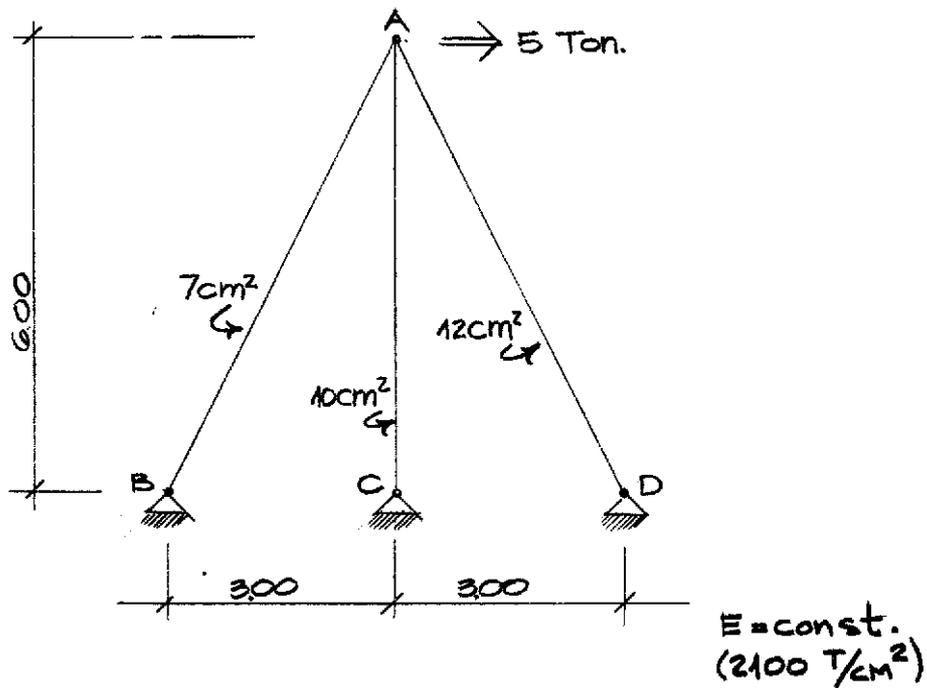
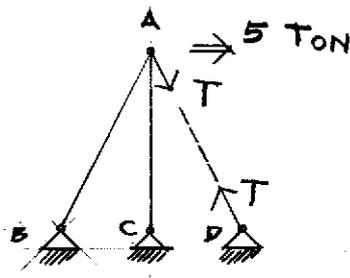


Figura 35

Como se ve, la estructura es estáticamente indeterminada por lo que la hacemos determinada y estable de la siguiente forma,



La ecuación de condición:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \sum S \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) \frac{L}{AE} = 0$$

("E" se puede omitir por ser constante).

Los valores de  $S$  son:

$$AB = + (11.18 + T)$$

$$AC = - (10 + 1.78 T)$$

$$AD = + T$$

Tabulando:

Miembro	Long (cms)	Area (cms <sup>2</sup> )	S	$\frac{\partial S}{\partial T}$	$S \frac{\partial S}{\partial T} \times \frac{L}{AE}$
AB	671	7	11.18 + T	+ 1.00	+ 1071.68 + 95.86 T
AC	600	10	- 10 - 1.78 T	- 1.78	+ 1068.00 + 190.10 T
AD	671	12	+ , T	+ 1.00	+ 55.92 T
$\Sigma$					= + 2139.68 + 341.88 T

Como sabemos,

$$\Sigma S \cdot \frac{\partial S}{\partial T} \cdot \frac{L}{A} = 0$$

$$2139.68 + 341.88 T = 0$$

$$\therefore T = - \frac{2139.68}{341.88}$$

$$T = -6.26 \text{ Ton}$$

Del resultado anterior deducimos que el miembro A-D está sujeto a una compresión de 6.26 Ton. Hay que hacer ver, que de la misma manera se procede cuando hay un caso de indeterminación interna.

### 3. Método de la Flexibilidad:

Para poder analizar estructuras estaticamente indeterminadas bastará con aplicar a las ecuaciones fundamentales del Método de la Flexibilidad la ecuación mostrada a continuación, la cual fué deducida en el capítulo anterior;

$$\overline{D} = \overline{A}_n^T \overline{F}_M \overline{A}_n$$

(Es conveniente hacer ver que esta ecuación también se escribe mas comunmente en otra forma, en la cual lo único diferente es la notación ya que cada matriz tiene igual significado,

$$\overline{D} = \overline{A}_{MU}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML} )$$

La aplicación anterior nos dará un método muy sistemático para resolver las estructuras estáticamente indeterminadas.

Primeramente habrá que hacernos notar que cuando se usan las ecuaciones fundamentales del Método de la Flexibilidad, las cargas reales en la estructura se reemplazan por cargas de nudo combinadas (estas son cargas que actúan sobre el miembro transformadas en cargas equivalentes de nudo sumadas a las cargas que actúan sobre el propio nudo).

Supongamos pues que las ecuaciones fundamentales se refieren a la estructura con cargas combinadas. Además, habrá que hacer ver que las "acciones de extremo" y las "redundantes" que concuerdan con dichas acciones de extremo no son iguales en la estructura con cargas reales y en la estructura con cargas combinadas. Luego, en las ecuaciones fundamentales hay que hacer la siguiente modificación:

$\overline{A}_M = \overline{A}_{ML} + \overline{A}_{MQ} \overline{Q}$ ; ya encontrados los valores de las acciones de extremo (para la estructura con cargas combinadas), deben ser sumados a las correspondientes acciones de extremo en la estructura fija para así obtener las ACCIONES DE EXTREMO DEBIDAS A LAS CARGAS REALES. Lo anterior puede expresarse así:

$$(\overline{A}_M)_A = \overline{A}_M + (\overline{A}_M)_R$$

Donde

$(\overline{A}_M)_A =$  Acciones de extremo en la estructura real.

$(\overline{A}_M)_R =$  Acciones de extremo en la estructura fija.

En cuanto a las reacciones  $(\overline{A}_R)$  y los desplazamientos de nudo  $(\overline{D}_J)$ , tenemos que son los mismos para cargas reales como para las cargas combinadas. Ahora bien, las redundantes  $(\overline{Q})$  serán válidas para las cargas reales dependiendo de:

- i. Una redundante que es una reacción para la estructura, será válida.
- ii. Una redundante que es una acción de extremo de miembro, deberá tratarse como las acciones de extremo  $\overline{A}_M$ .

El orden a seguir al resolver una estructura estáticamente indeterminada es el siguiente:

Primeramente contamos con la ecuación matricial  $\overline{D}_Q = \overline{D}_{QL} + \overline{F} \overline{Q}$ , la cual nos da las redundantes  $\overline{Q}$ ; ya con los valores de las redundantes podemos determinar  $\overline{A}_M$ ,  $\overline{A}_R$  &  $\overline{D}_J$ .

A continuación se considera cómo las matrices de las ecuaciones anteriores pueden ser calculadas, con la ayuda de las ecuaciones de desplazamiento derivadas del método de la carga unitaria. Es de aquí de donde se obtiene el método sistemático para analizar estructuras estáticamente indeterminadas.

Empezaremos por recordar la ecuación de desplazamiento derivada del método de la carga unitaria:

$$\overline{D} = \overline{A}_{MU}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

A continuación se expresa cada una de las ecuaciones fundamentales del Método de Flexibilidad, partiendo únicamente de la ecuación anterior:

En  $\overline{D}_Q = \overline{D}_{QL} + \overline{F} \overline{Q}$  se tiene que  $\overline{D}_{QL}$  representa los desplazamientos en estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a cargas de nudo combinadas. Luego,  $\overline{D}_{QL}$  puede calcularse con la expresión:

$$\overline{D} = \overline{A}_{MU}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

Recordemos por otra parte que tenemos la expresión  $\overline{A}_M = \overline{A}_{ML} + \overline{A}_{MQ} \overline{Q}$  para la cual  $\overline{A}_{MQ}$  es la matriz de acciones de extremos de miembros en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes: Luego

$$\overline{A}_{MU} = \overline{A}_{MQ}$$

Ahora, tenemos que la matriz  $\overline{A}_{ML}$  representa las acciones de extremo debidas a las cargas que causan los desplazamientos; de donde, para el caso de los desplazamientos  $\overline{D}_{QL}$ , la matriz  $\overline{A}_{ML}$  está formada por las acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a las cargas combinadas. En conclusión,

$$\overline{D}_{QL} = \overline{A}_{MQ}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML} \quad \longrightarrow \quad \overline{D}_{QL}$$

Para calcular la matriz de Flexibilidad de la estructura ( $\overline{F}$ ), tenemos que está formada por desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes, y también causados por valores unitarios de las redundantes; pueden ser determinados a partir de,

$$\overline{D} = \overline{A}_{MU}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

En la ecuación anterior es necesario cambiar  $\overline{A}_{MU}$  por  $\overline{A}_{MQ}$  ya que las cargas unitarias son valores unitarios de las redundantes; además como las cargas que causan los desplazamientos son también valores unitarios de las redundantes se tiene que  $\overline{A}_{ML} = \overline{A}_{MQ}$ ; así que,

$$\overline{F} = \overline{A}_{MQ}^T \overline{F}_M \overline{A}_{MQ} \quad \longrightarrow \quad \overline{F}$$

Ahora, como la matriz  $\overline{D}_Q$  se conoce por las condiciones de la estructura, estamos ya en disposición de determinar las redundantes:

$$\overline{D}_Q = \overline{D}_{QL} + \overline{F} \overline{Q} \quad \overline{Q} = \overline{F}^{-1} (\overline{D}_Q - \overline{D}_{QL})$$

- ii. Procedemos ahora a calcular las acciones de extremo de miembro, para lo cual usamos:

$$\overline{A}_M = \overline{A}_{ML} + \overline{A}_{MQ} \overline{Q}$$

En dicha ecuación ya se conocen todas las matrices que determinan a  $\overline{A}_M$  por lo que solo tenemos que operar.

- iii. Para determinar las reacciones  $\overline{A}_R$  contamos con la expresión:

$$\overline{A}_R = \overline{A}_{RL} + \overline{A}_{RQ} \overline{Q}$$

De estas matrices nos falta determinar  $\overline{A}_{RL}$  &  $\overline{A}_{RQ}$ , las cuales significan:

$\overline{A}_{RL}$  = Acciones en estructura libre debidas a cargas combinadas.

$\overline{A}_{RQ}$  = Acciones en estructura libre debidas a valores unitarios.

Para determinar dichas matrices se hace necesario un análisis estático de la estructura libre para cada caso.

- iv. Falta unicamente por determinar los desplazamientos de nudo  $\overline{D}_J$ , contándose con la ecuación,

$$\overline{D}_J = \overline{D}_{JL} + \overline{D}_{JQ} \overline{Q}$$

Para poder resolver la igualdad anterior, tendremos que introducir una matriz denominada  $\overline{A}_{MJ}$ , que está formada por acciones de extremo de miembro debidas a las cargas unitarias que corresponden a los desplazamientos deseados de nudo ( $\overline{D}_J$ ). La primera columna de  $\overline{A}_{MJ}$  contiene las acciones de extremo de miembro debidas a una carga unitaria correspondiente a  $\overline{D}_{J1}$ , la segunda columna contiene las acciones de extremo correspondientes a  $\overline{D}_{J2}$  y así sucesivamente.

Para calcular  $\overline{D}_{JL}$  y  $\overline{D}_{JQ}$  podemos proceder así:

$$\overline{D} = \overline{A}_{MU}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

$$\overline{D}_{JL} = \overline{A}_{MJ}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

$$\overline{D}_{JQ} = \overline{A}_{MJ}^T \overline{F}_M \overline{A}_{MQ}$$

Luego, substituyendo en la ecuación de desplazamientos de nudo,

$$\overline{D}_J = \overline{D}_{JL} + \overline{D}_{JQ} \overline{Q}$$

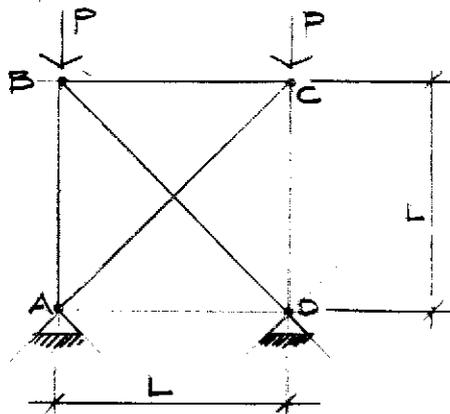
$$\overline{D}_J = \overline{A}_{Mj}^T \overline{F}_M (\overline{A}_{ML} + \overline{A}_{MQ} \overline{Q})$$

$$\overline{D}_J = \overline{A}_{MJ}^T \overline{F}_M \overline{A}_M \Rightarrow D_J$$

A continuación se ilustra la aplicación del procedimiento expuesto para resolver estructura estaticamente indeterminadas.

**EJEMPLO 17:**

Sea la estructura mostrada en la Fig. 36, resolverla para el caso en que se le apliquen las cargas mostradas.

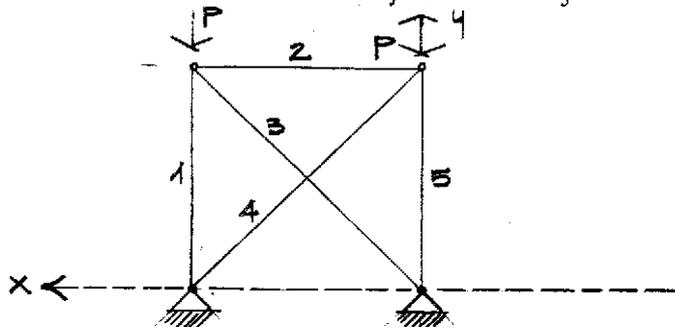


*AE = const.*

Solución:

Figura 36

- 1) Numeración de miembros y sistema de ejes:

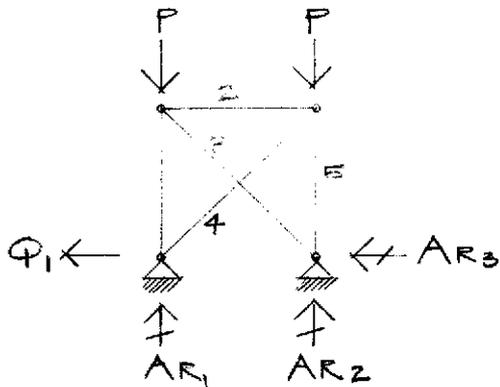


Como se ve, en este ejemplo las cargas actúan en los nudos por lo que no hay necesidad de obtener cargas equivalentes de nudo.

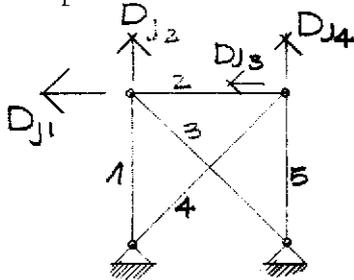
- 2) Redundantes y Reacciones a determinar:

Puede notarse que la estructura es estáticamente indeterminada externamente de primer grado, luego solo habrá necesidad de hacer uso de una redundante,

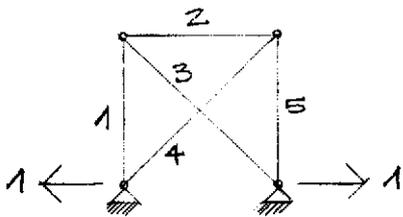
PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central



3) Desplazamientos de nudo a calcular en la estructura,

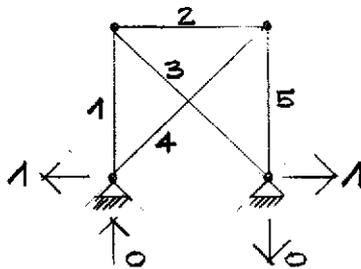


4) Cálculo de  $\overline{Q}_{MQ}$  (Matriz de acciones de extremo de miembros en la estructura libre, debidas a valores unitarios de las redundantes):



$$\overline{A}_{MQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1.414 \\ 1.414 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5) Cálculo de  $\overline{A}_{RQ}$  (Acciones en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes):



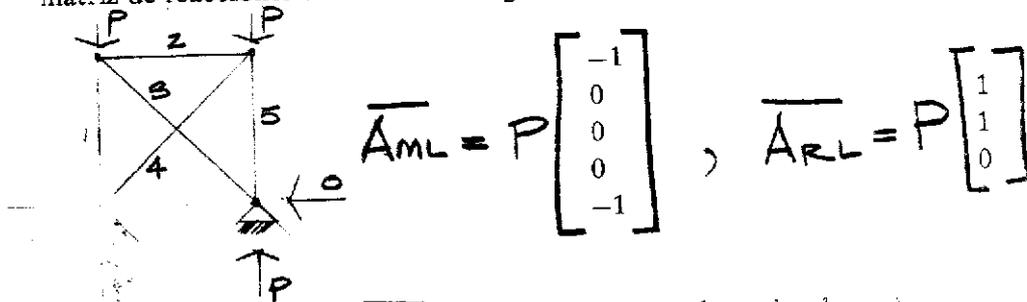
$$\overline{A}_{RQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si la estructura tuviera un grado de indeterminación mas, habría necesidad de una redundante extra en la estructura; esto a la vez haría que las matrices  $\overline{A}_{MQ}$  y  $\overline{A}_{RQ}$  posean una columna mas.

- 6) Cálculo de la matriz  $\overline{F}_M$  (contiene en su diagonal las deformaciones en cada uno de los miembros debidos a una carga unitaria de tensión):

$$\overline{F}_M = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 7) Obtención de  $\overline{A}_{ML}$  y  $\overline{A}_{RL}$  (matriz de acciones en miembros debidas a las cargas reales y matriz de reacciones debidas a las cargas reales en la estructura libre respectivamente):



- 8) Obtención de matriz  $\overline{D}_{QL}$  (Desplazamientos en las redundantes):

$$\overline{D}_{QL} = \overline{A}_{MQ}^T \overline{F}_M \overline{A}_{ML}$$

$$\overline{D}_{QL} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1.414 & 1.414 & -1 \end{bmatrix} \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D}_{QL} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1.414 & 1.414 & -1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2PL}{AE}$$

9) Cálculo de la matriz de Flexibilidad de la estructura ( $\bar{F}$ ):

$$\bar{F} = \bar{A}_{MQ} \bar{F}_M \bar{A}_{MQ}$$

$$\bar{F} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1.414 \\ 1.414 \\ -1 \end{bmatrix} = 8.657 \frac{L}{AE}$$

10) Cálculo de la matriz de redundantes ( $\bar{Q}$ ):

$$\bar{Q} = \bar{F}^{-1} (\bar{D}_Q^0 - \bar{D}_{QL})$$

$$\bar{Q} = \left( \frac{AE}{8.657 L} \right) \left( -\frac{2PL}{AE} \right)$$

$$\bar{Q} = -0.231 P \quad \Rightarrow \text{hacia la derecha.}$$

11) Cálculo de la matriz  $\bar{A}_M$  (acciones de miembros debido a cargas reales):

$$\bar{A}_M = \bar{A}_{ML} + \bar{A}_{MQ} \bar{Q}$$

$$\bar{A}_M = P \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1.414 \\ 1.414 \\ -1 \end{bmatrix} (-0.231 P) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.231 \\ -0.327 \\ -0.327 \\ 0.231 \end{bmatrix} P$$

$$\bar{A}_M = P \begin{bmatrix} -0.769 \\ 0.231 \\ -0.327 \\ -0.327 \\ -0.769 \end{bmatrix}$$

12) Cálculo de la matriz  $\bar{A}_R$  (Reacciones debidas a las cargas reales):

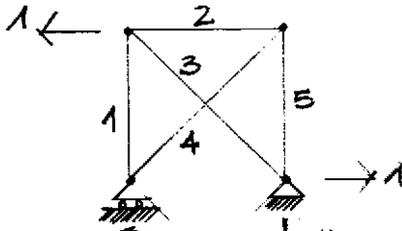
$$\bar{A}_R = \bar{A}_{RL} + \bar{A}_{RQ} \bar{Q}$$

$$\bar{A}_R = P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (-0.231 P) = P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.231 \end{bmatrix}$$

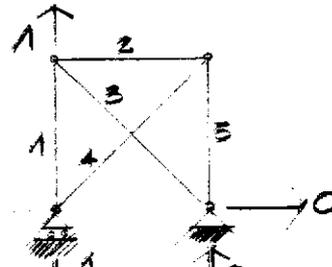
$$\bar{A}_R = P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.231 \end{bmatrix}$$

13) Cálculo de la matriz  $\overline{A}_{MJ}$  (matriz de extremos de miembro debidos a la aplicación de cargas unitarias en los nudos donde se buscan desplazamientos):

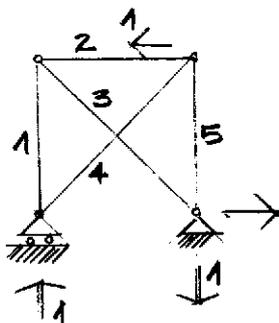
i. Unitaria en  $D_{J1}$ :



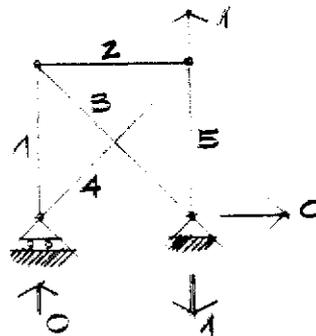
ii. Unitaria en  $D_{J2}$ :



iii. Unitaria en  $D_{J3}$ :



iv. Unitaria en  $D_{J4}$ :



Luego,

$$\overline{A}_{MJ} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1.414 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14) Cálculo de la matriz  $\overline{D}_J$  (matriz de desplazamientos en la estructura real debida a la aplicación de cargas):

$$\overline{D}_J = \overline{A}_{MJ}^T \overline{F}_M \overline{A}_M$$

$$\overline{D}_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1.414 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -0.769 \\ 0.231 \\ -0.327 \\ -0.327 \\ -0.769 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D}_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{L}{AE} \times P = \begin{bmatrix} -0.769 \\ 0.231 \\ -0.327 \\ -0.327 \\ -0.769 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D}_J = \frac{PL}{AE} \begin{bmatrix} 0.115 \\ -0.769 \\ -0.115 \\ -0.769 \end{bmatrix}$$

El signo negativo en los desplazamientos indica que éste va hacia la derecha o hacia abajo (en contra del sistema de ejes).

Ya determinadas las matrices  $\overline{Q}$ ,  $\overline{A}_M$ ,  $\overline{A}_R$  y  $\overline{D}_J$  queda completamente resuelta la estructura.

## RECOMENDACIONES Y CONCLUSIONES

1. Son consideradas como estructuras de nudos articulados, aquellas en las que los elementos o barras que las forman están unidos entre sí por articulaciones sin rozamiento.
2. Es de suma importancia determinar, al iniciar un análisis, si la estructura es determinada o indeterminada tanto externa como internamente. En caso sea indeterminada habrá que investigar el grado de indeterminación total que posee.
3. Al tratar de resolver una estructura habrá necesidad de adoptar una notación determinada. Aunque se cuenta con la Notación de Bow, el Ingeniero Estructural podrá adoptar el sistema de notación que considere mas adecuado; eso sí, deberá ser congruente a todo lo largo del problema.
4. Al determinar esfuerzos en los miembros de una estructura articulada deberá recordarse que el Método de los Nudos es mas eficiente cuando se tienen que determinar los esfuerzos en todos y cada uno de los miembros; el Método de Secciones es muy practico si unicamente se quieren determinar los esfuerzos de algunos miembros de la estructura.
5. Conforme avanza el análisis de esfuerzo deberán irse anotando, sobre un esquema de la estructura real, los esfuerzos en cada miembro pero descompuestos en sus componentes horizontal y vertical; esto nos permite chequear fácilmente el equilibrio estático de cada nudo.
6. Cuando en el análisis se utilice un método gráfico cualquiera, deberá adoptarse la mayor escala posible para evitar que se incurra en errores apreciables.
7. Los Métodos de Energía nos permiten determinar cualquier tipo de deformación en las estructuras articuladas, ya sean desplazamientos lineales de los nudos o bien rotación de los miembros.
8. Los diferentes métodos de energía vienen a ser prácticamente una repetición, ya que están basados primordialmente en la aplicación de cargas, en los puntos donde necesitamos las deformaciones. Además, se originan de la igualdad existente entre la energía de deformación externa y la energía de deformación interna de la estructura.
9. Respecto al cálculo de deflexiones o desplazamientos de nudo podría decirse que:
  - a) El Método del Trabajo Real es muy limitado ya que con él solo pueden calcularse deformaciones en el punto de aplicación de las cargas.
  - b) El Primer Teorema de Castigliano es uno de los métodos mas importantes ya que mediante su aplicación se puede encontrar cualquier componente de deflexión en cualquier punto de la estructura.

- c) El Método del Trabajo Virtual es el mas versátil de todos ya que nos permite determinar deflexiones de cualquier tipo y que resulten de aplicar cargas, cambios de temperatura, errores de fabricación, etc.
  - d) Los métodos gráficos son los únicos que nos dan los desplazamientos absolutos de todo los nudos en un mismo gráfico.
10. La aplicación a mano (sin uso de computadora) del Método de Flexibilidad es adecuado si la estructura articulada posee un grado bajo de indeterminación estática.
  11. La aplicación a mano del Método de Rigidez en estructura articuladas deberá hacerse solo si hay una indeterminación cinemática baja.
  12. Cuando se trata de resolver estructuras estaticamente indeterminadas, tenemos que independientemente del método de análisis adoptado, básicamente deberán adoptarse las redundantes necesarias hasta contar con una estructura estable y determinada.

**BIBLIOGRAFIA:**

1. Chu-Kia Wang; **STATICALLY INDETERMINATE STRUCTURES.**  
McGraw-Hill Book Company, New York. 1965.
2. Jan J. Tuma; **TEORIA Y PROBLEMAS DE ANALISIS ESTRUCTURAL.**  
McGraw-Hill compendios Schaum, México. 1973.
3. J. Sterling Kinney; **ANALISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS.**  
Compañía Editorial Continental S.A., México. 1968.
4. Chu-Kia Wang y Clarence Lewis Eckel; **TEORIA ELEMENTAL DE ESTRUCTURAL.**  
McGraw-Hill Book Company, New York. 1968.
5. Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston; **MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS (Tomo I).**  
McGraw-Hill Book Company, New York. 1970.
6. Charles Head Norris y John Benson Wilbur; **ANALISIS ELEMENTAL DE ESTRUCTURAS.**  
McGraw-Hill, México. 1960.
7. Héberto Castillo Martínez; **ANALISIS Y DISEÑO ESTRUCTURAL'**  
Editorial del Centro Regional de Ayuda Técnica, México. 1973.
8. Rodolfo Luthe García; **ANALISIS ESTRUCTURAL.**  
Editorial del Centro Regional de Ayuda Técnica, México. 1971.
9. James M. Gere y Willian Weaver; **ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES**  
Compañía Editorial Continental S.A.; México. 1972.
10. Antonio Vizcaino Marcucci; **EL METODO DE RIGIDEZ EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS'**  
Tesis presentada al conferírsele el Título de Ingeniero Civil, Guatemala, 1974.
11. Octavio Augusto Salguero Duarte; **EL METODO DE FLEXIBILIDAD EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS.**  
Tesis presentada al conferírsele el Título de Ingeniero Civil, Guatemala, 1974.

*"Recinos"*  
Carlos Romeo Recinos Flores

Vo. Bo.

*E. Rosales*  
Ing. Ernesto Rosales Flores  
Asesor

Vo. Bo.

*Manuel Castillo Barajas*  
Ing. Manuel Castillo Barajas  
Director de Escuela de  
Ingeniería Civil

Imprimase

*Hugo Quijano*  
Ing. Hugo Quijano Ma  
Decano

Guatemala, Mayo de 1975