

08T(214)C

MFN:623

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, Centro América

"TORSION EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO"



Presentada a la Junta Directiva de la

Facultad de Ingeniería

de la

Universidad de San Carlos de Guatemala

por:

JORGE MARIO VETTORAZZI GANDARA

Al conferírsele el Título de:

INGENIERO CIVIL

Guatemala, Noviembre de 1971

TESIS DE REFERENCIA

NO

SE PUEDE SACAR DE LA BIBLIOTECA  
BIBLIOTECA CENTRAL - USAC.

JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:

Vocal Primero: Ing. Marco Tulio Samayoa B.  
Decano en Funciones

Vocal Segundo: Ing. Rodolfo González Morasso

Vocal Tercero: Ing. Adolfo Behrens

Vocal Cuarto: Br. Gustavo Sierra

Vocal Quinto: Br. Guido R. Cosenza

Secretario Interino: Ing. Eduardo Martínez Balcells

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN  
GENERAL PRIVADO

Decano: Ing. Mauricio Castillo Contoux

Vocal Segundo: Ing. Rodolfo González Morasso

Examinador: Ing. Luis Felipe Mérida

Examinador: Ing. Renato Fernández Rivas

Secretario: Ing. Héctor A. Centeno B.

**HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:**

Cumpliendo con lo establecido por la Ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, tengo el honor de someter a vuestra consideración mi trabajo de tesis titulado:

**"TORSION EN ESTRUCTURAS DE CONCRETO"**

Tema que me fuera asignado por la Junta Directiva de la  
**FACULTAD DE INGENIERIA.**

DEDICO ESTE ACTO:

A Dios Todopoderoso

A mis Padres:

Francisco José Vettorazzi Gerardi  
María Luisa Gándara de Vettorazzi

A mis Hermanos:

José Francisco  
Julio César

A la Señorita:

Sonia González Campo

A la Facultad de Ingeniería

A los Catedráticos de la Facultad de Ingeniería

A mis Amigos y Compañeros de estudio

Especial reconocimiento a los Ingenieros:

Roberto Solís Hegel  
Joaquín Lottmann

## CONTENIDO

	Pág. Nº
1. INTRODUCCION	1
2. OBJETIVO DE LA TESIS	3
3. ANALISIS DE CARGAS DE DIVERSOS TIPOS DE MIEMBROS ESTRUCTURALES DE CONCRETO SUJETOS A TORSION	5
3.1 Miembros rectilíneos planos	5
3.1.1 Vigas Perimetrales	5
3.1.1.1 Vigas Perimetrales soportando momentos concentrados transmitidos por vigas en voladizo	5
3.1.1.2 Vigas Perimetrales soportando losas en voladizo con carga uniforme	7
3.1.1.3 Vigas Perimetrales que son interceptadas por vigas secundarias interiores	10
3.1.1.4 Vigas Perimetrales soportando cargas excéntricas transmitidas por una losa interior	11
3.1.2 Vigas Balcón	14
3.1.3 Torsión introducida en voladizos mutuamente soportados	17
3.2 Sistemas Rectilíneos en el espacio	35
3.2.1 Marcos rectangulares en el espacio	35
3.2.2 Escaleras de apoyo libre	36
3.3 Miembros curvos planos	43
Vigas curvas	43
3.4 Sistemas curvos en el espacio	63
Escaleras helicoidales	63
4. RESUMEN	75
5. BIBLIOGRAFIA	77

## 1. INTRODUCCION

El enorme desarrollo que ha tenido la industria de la construcción conjuntamente con la necesidad de crear estructuras bellas, han llevado a la arquitectura a la época de los diseños atrevidos, creando frecuentemente estructuras complicadas.

Muchos de los elementos auxiliares en los diseños arquitectónicos, son miembros estructurales rectilíneos, curvos, miembros de dos y de tres dimensiones.

En nuestra época, de grandes avances tecnológicos, el estudio de la tecnología del diseño estructural de miembros de concreto ha avanzado de tal manera, que actualmente los códigos de diseño han aminorado los valores de los factores de carga de las estructuras. Esto se ha basado en que en la actualidad es posible aplicar métodos de diseño que permiten considerar todos los elementos que afectan una estructura, gracias a la utilización de computadoras.

En igual forma, el avance de los conocimientos acerca de las propiedades mecánicas del concreto y del acero, los exactos métodos de control de calidad y la obtención de mejores materiales, y en total la acumulación de todos los conocimientos acerca de la forma en que se comporta un elemento estructural de concreto, han determinado que se puede diseñar y construir miembros estructurales de concreto más ajustados a la realidad.

Ahora bien, si se han reducido los valores de los coeficientes de carga o de seguridad de las estructuras, se hace ahora más necesario que antes, el considerar todas las cargas importantes que actúan sobre los miembros a manera de lograr un diseño estructural ajustado a la realidad.

Ya no es posible despreciar o ignorar cierto tipo de cargas que actúan sobre determinados elementos estructurales, o tratar de simplificar excesivamente estructuras complicadas bajo pretexto de que se tienen factores de seguridad altos.

En el caso de la torsión, se tiene un efecto que muy frecuentemente se ha ignorado o, por lo menos, no se le ha dado la importancia que tiene para el diseño.

Se ha considerado siempre la torsión como un efecto secundario, y bajo este pretexto, se le ha ignorado en estructuras donde los momentos torsionales y sus efectos pueden ser de mayor cuantía que los flexionales o los producidos por el cortante transversal.

Parte de la culpa de este problema lo había tenido la falta de una teoría adecuada de diseño por torsión, que interrelacionara la torsión con la flexión y el cortante, así como la falta casi absoluta de un reglamento de diseño por torsión, y el poco conocimiento de la forma como ciertos miembros estructurales trabajan.

## 2. OBJETIVO DE LA TESIS

El objetivo principal de esta tesis, es el de presentar un estudio resumido de la forma de analizar diversos tipos de miembros estructurales sujetos a torsión, así como la de presentar ejemplos de aplicación. En esta forma se considera que el presente trabajo pueda servir de base para fomentar el estudio de este tipo de estructuras tan comunes en la actualidad.

No se pretende desarrollar un libro de texto, sino simplemente hacer algunas comparaciones de estudios de este tipo de miembros estructurales, hacer comentarios acerca de los mismos e indicaciones que el autor de la presente considera de importancia para la comprensión del problema y su mejor aplicación al diseño.

Se presentarán los casos más comunes en los diseños arquitectónicos de nuestro medio, indicando siempre el origen de los trabajos analizados, los cuales se incluyen en la bibliografía adjunta.

Se incluyen tablas de coeficientes para los distintos casos tratados, tomadas de los artículos en cuestión, con el objeto de facilitar al lector la resolución de los problemas. Ya que como se podrá ver en los temas desarrollados, la mayoría de las fórmulas necesarias para determinar los valores redundantes en cada caso particular, principalmente en los miembros curvos, son complicadas y tediosas de aplicar.

Como el objeto del presente trabajo es el de interesar al lector en el tema, no nos interesa desarrollar los análisis completos de los complejos sistemas estructurales, sino más bien, darles los elementos necesarios para poder llevar a cabo el diseño de los mismos.

### 3. ANALISIS DE CARGAS DE DIVERSOS TIPOS DE MIEMBROS ESTRUCTURALES DE CONCRETO SUJETOS A TORSION

#### 3.1 Miembros Rectilíneos Planos

##### 3.1.1 Vigas Perimetrales

Se denominan vigas perimetrales a las vigas de los marcos exteriores de un edificio.

Para el estudio de las vigas perimetrales, supondremos a la viga como perfectamente empotrada en sus extremos ya que para la mayoría de casos esta suposición es aproximada a la realidad. La intersección en el nudo de las vigas y columnas introduce una rigidez enorme en el mismo, comparada con la rigidez torsional de la viga en cuestión.

Se considerará que las vigas son de sección constante a través de toda su longitud, por lo tanto sus propiedades físicas serán constantes a través de la misma.

##### 3.1.1.1 Vigas Perimetrales soportando momentos concentrados transmitidos por vigas en voladizo. Ver Fig. No. 1

Consideremos una viga AB sujeta a un momento torsional en el punto "C" transmitido por una viga en voladizo, los tramos AC y BC de la viga, absorben el momento torsional en proporción directa a sus rigideces torsionales.

Si la rigidez torsional de un miembro está dada por la expresión

$$\beta b^3 d G/l$$

donde los valores de  $\beta$ ,  $b$ ,  $d$  y  $G$  son iguales para ambos tramos, por lo tanto sus rigideces torsionales relativas varían inversamente con la longitud del tramo.

Con base en lo anterior, el momento torsional "T" se repartirá a los tramos AC y BC en la siguiente forma: para el tramo AC el momento torsional que absorbe  $T_{AC}$  es igual a

$$T_{AC} = \frac{T \cdot l_2}{l}$$

Para el tramo BC el momento torsional absorbido,  $T_{BC}$ , será igual a

$$T_{BC} = \frac{T \cdot l_1}{l}$$

Se muestra en la figura No. 2 el diagrama de momentos torsionales para la viga en cuestión.

Nomenclatura:

$l$  = Longitud de la viga.

$l_1$  = Longitud del tramo AC.

$l_2$  = Longitud del tramo BC.

$\beta$  = Constante cuyo valor depende de la relación  $d/b$ . (Ver tabla No. 1).

$b$  = Ancho de la sección transversal de la viga.

$d$  = Peralte de la sección transversal de la viga.

$G$  = Módulo de elasticidad en cortante.

$$\text{Rigidez tramo AC} = \beta b^3 d G / l_1$$

$$\text{Rigidez tramo BC} = \beta b^3 d G / l_2$$

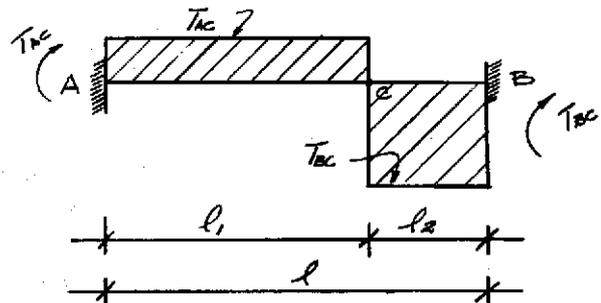
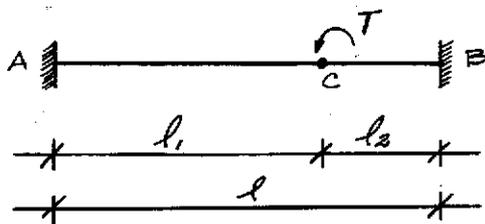


Fig. No. 1 - Momento torsional  $T$  aplicado a la viga AB en C

Fig. No. 2 - Diagrama de momentos torsionales para la viga AB

Porcentaje de  $T$  que absorbe el tramo AC:

$$T_{AC} = T \left[ \frac{\text{Rigidez AC}}{\sum \text{Rigideces}} \right] = T \left[ \frac{\beta b^3 d G (1/l_1)}{\beta b^3 d G (1/l_1 + 1/l_2)} \right] = T \left[ \frac{(1/l_1)}{(1/l_1 + 1/l_2)} \right]$$

$$\underline{T_{AC} = \frac{T \cdot l_2}{l}}$$

Porcentaje de  $T$  que absorbe el tramo BC:

$$\underline{T_{BC} = T \left[ \frac{\text{Rigidez BC}}{\sum \text{Rigideces}} \right] = \frac{T \cdot l_1}{l}}$$

### 3.1.1.2 Vigas Perimetrales soportando losas en voladizo con carga uniforme

Primer Caso: Ver figura No. 3.

El voladizo actúa a través de toda la longitud de la viga.

El momento de flexión de la losa en voladizo que actúa uniformemente distribuido, es transmitido a la viga en forma de momento torsional uniformemente distribuido.

A causa de la simetría de las cargas, el giro máximo ocurre a la mitad de la viga, por lo que el momento torsionante es nulo.

El momento torsionante aumenta a lo largo de la mitad de la viga hasta alcanzar un valor máximo en los apoyos.

El diagrama de momentos torsionales se muestra en la figura 3.

Segundo Caso: Ver figura No. 4.

El voladizo actúa únicamente en una sección de la longitud de la viga.

Para la resolución de este caso podemos suponer el voladizo compuesto por vigas de ancho unitario que transmiten momentos concentrados.

En esta forma el problema se asemeja al caso descrito en el punto anterior con la variante de que es un sistema de varias cargas concentradas.

En la figura se muestra el sistema indicando en la misma, todos los valores que afectan al problema.

En la figura 5 se muestra el diagrama de momentos torsionales de la viga.

$w$  = Carga uniformemente distribuida.

$l_1$  = Largo del voladizo.

$t$  = Momento torsional aplicado a la viga AB en forma uniforme =  $\frac{w \cdot l_1^2}{2}$  por unidad de longitud.

$$T_{AC} = T_{BC} = t \left( \frac{l}{2} \right)$$

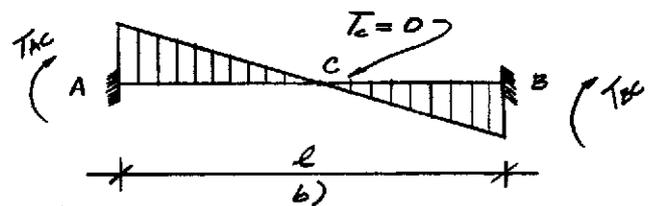
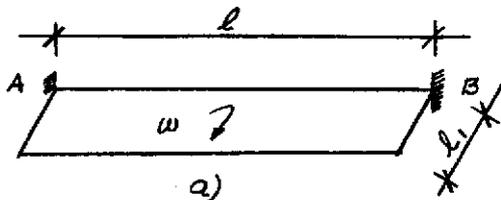


Figura No. 3 - Diagramas de carga y de momentos torsionales para la viga AB, bajo carga transmitida por una losa en voladizo sujeta a carga uniforme.

w = Carga uniformemente distribuida

$$t = \frac{w \cdot l_1^2}{2}$$

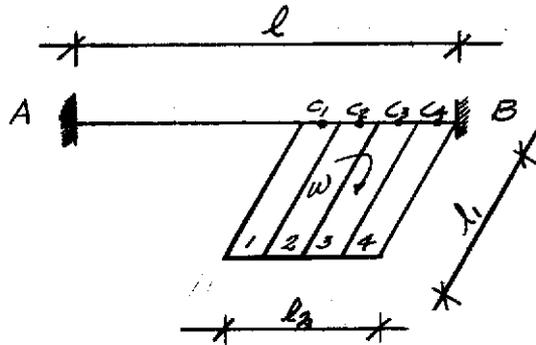
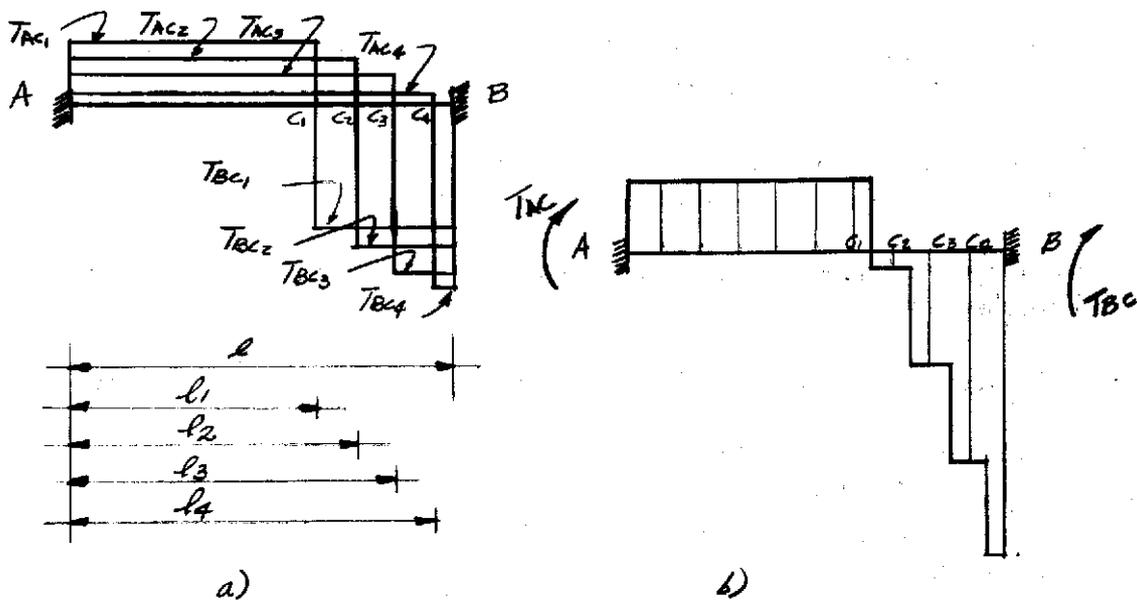


Figura No. 4 - Viga perimetral soportando una losa en voladizo con una longitud de  $l_2$ .



La curva que representa los momentos torsionales acumulados se representa en mejor forma por medio de una línea continua por ser carga uniforme la que actúa sobre la viga.

Figura No. 5 a) Diagramas parciales de momentos torsionales actuando sobre la viga AB.

b) Diagrama final de torsión sobre la viga AB.

Si suponemos a la losa en voladizo compuesta por vigas de ancho unitario, y denominadas 1, 2, 3 y 4. Estas vigas transmiten a la viga AB momentos torsionales que se pueden suponer concentrados en los puntos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

Para determinar la forma en que se distribuyen estos momentos torsionales concentrados en los puntos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , se aplica el concepto expuesto en punto 3.1.1.1

Siendo  $t$  el momento torsional concentrado que transmite la viga de ancho unitario.

Así pues, tendremos que:

$$T_{AC_1} = \frac{(l-l_1)}{l} \cdot t$$

*considerando  $l_1, l_2, l_3$  y  $l_4$  como la distancia desde A hasta  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ .*

$$T_{AC_2} = \frac{(l-l_2)}{l} \cdot t$$

$$T_{AC_3} = \frac{(l-l_3)}{l} \cdot t$$

$$T_{AC_4} = \frac{(l-l_4)}{l} \cdot t$$

$$T_{BC_1} = \frac{l_1}{l} \cdot t$$

$$T_{BC_2} = \frac{l_2}{l} \cdot t$$

$$T_{BC_3} = \frac{l_3}{l} \cdot t$$

y

$$T_{BC_4} = \frac{l_4}{l} \cdot t$$

El diagrama final del momento torsional que actúa sobre AB, se determina por la superposición de los diagramas parciales de cada caso considerado.

### 3.1.1.3 Vigas Perimetrales que son interceptadas por vigas secundarias interiores

Ver figura No. 6, donde se presenta el caso de una viga secundaria que intercepta una viga perimetral en el punto "C".

NOTA: no se considera losa en este sistema.

Se harán las siguientes consideraciones:

1. El extremo "D" empotrado.
2. No se considerará disminución en los momentos torsionales a causa de la restricción que la viga secundaria le ofrece a la perimetral.
3. No se considerará la deflexión vertical de la viga perimetral en el punto "C".
4. Se considerará empotrada en sus extremos la viga AB.

El momento torsional que absorbe la viga AB, se determina por medio del método de la distribución de momentos.

Porcentajes de disminución de los momentos torsionales a causa de la restricción que la viga secundaria ofrece a la perimetral se discuten en el artículo 3.1.1.4.

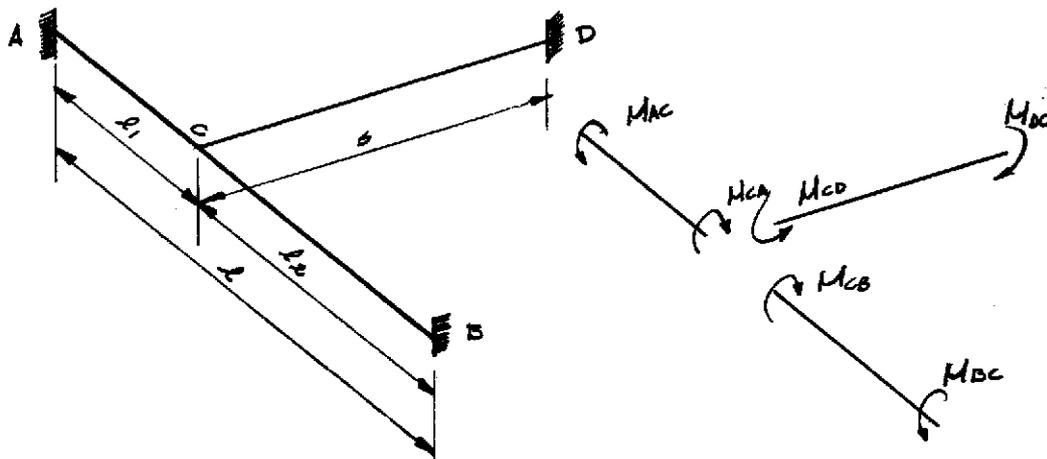


Figura No. 6 - Diagrama de la intercepción de una viga secundaria CD en una viga perimetral AB.

$M_F$  = Momento fijo de la viga CD

$M_C$  = Momento torsional que absorbe la viga perimetral  $AB = M_{CD}$

$K_{CD}$  = Rigidez en flexión de la viga CD

$K_{AC}$  = Rigidez torsional del tramo AC

$K_{BC}$  = Rigidez torsional del tramo BC

$$\therefore M_C = M_F \left( 1 - \frac{K_{CD}}{K_{CD} + K_{AC} + K_{BC}} \right)$$

El momento concentrado  $M_C$  se reparte a los tramos AC y BC en función directa a sus rigideces torsionales.

### 3.1.1.4 Vigas Perimetrales soportando cargas excéntricas transmitidas por una losa interior

Primer Caso: Ver figura No. 7.

Losas que trabajan en un solo sentido: consideremos la losa de la figura No. 7 como compuesta de una serie de vigas de ancho unitario que consideraremos empotradas en el extremo "D".

Al suponer dicho extremo empotrado, se está trabajando del lado conservador, ya que si se le permitiera girar a dicho extremo, el momento de torsión aplicado a la viga perimetral se disminuiría.

El momento torsional absorbido por la viga perimetral se puede determinar por medio de la distribución de momentos; considerando los valores de rigideces flexionales de la viga unitaria y los de la rigidez torsional de los dos tramos de la viga perimetral en el punto donde se transmite el momento torsionante.

El autor del presente trabajo no considera necesario el tomar en cuenta la reducción de los momentos torsionales en la viga a causa de la restricción que le ofrece la losa, por haberse demostrado que dichos valores son del orden del 8 al 10%, ver Ref. No. 4. Tampoco considera tomar en cuenta la disminución de los momentos torsionales aplicados a causa de las deflexiones verticales de la viga cuando sus valores son pequeños.

El efecto que produce el considerar un extremo de la viga perimetral semi-empotrado y el otro empotrado es el de reducir los momentos torsionales en valores aproximados del 10 al 15%.

La condición de considerar ambos extremos articulados reduce los momentos torsionales en el 20%.

Con base en estas consideraciones se adoptará como aproximado a la realidad, analizar la viga como perfectamente empotrada.

Atención especial se le debe dar al aspecto de que el valor de la suma de las rigideces torsionales de los dos tramos de la viga considerada (AC-BC), no es constante en todos sus puntos.

Esto da como resultado que el valor de la suma de las rigideces torsionales de los tramos (AC y BC) aumente en forma lineal cuando el punto "C" se mueve del centro de la viga, hacia los extremos. Por lo tanto, para el caso de una losa interior sujeta a carga uniforme, la viga perimetral absorberá los momentos torsionales en forma uniformemente variada con valores mínimos en el centro de la viga y máximos en los apoyos. Ver figura No. 8, para los diagramas de momento torsional en la viga perimetral.

#### Segundo Caso:

Losas que trabajan en dos sentidos: el problema de analizar el caso presentado en el punto anterior para el caso de una losa que trabaja en dos direcciones, es la determinación de la rigidez flexional de la viga unitaria y la forma en que las cargas se distribuyen en la losa.

Los momentos torsionales transmitidos a la viga perimetral por una losa de dos direcciones son menores que los transmitidos por una losa de una sola dirección, a causa de la mayor rigidez de la losa de dos direcciones y de la forma en que distribuye las cargas.

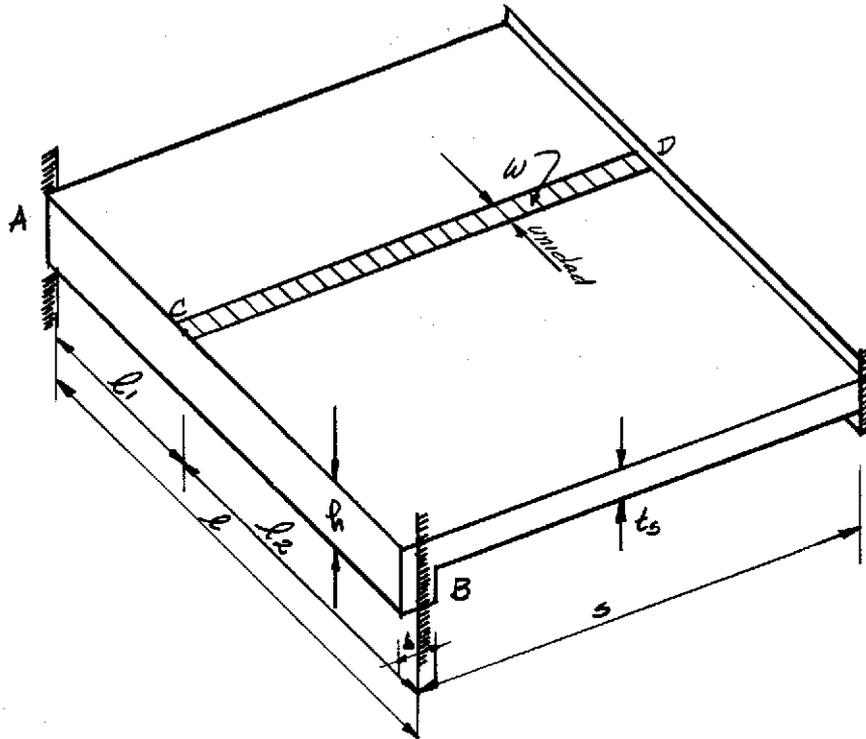


Figura No. 7 - Diagrama de una viga perimetral soportando una losa interior de una sola dirección.

$w$  = Carga uniformemente distribuida sobre la losa.

Consideremos la losa como formada por una serie de vigas de ancho unitario, que transmiten momentos torsionales concentrados a la viga AB.

La forma de determinar el valor de los momentos torsionales que absorbe la viga perimetral para cada viga de ancho unitario es la descrita en el artículo 3.1.1.3. Por considerarse simétrico el sistema estructural, el valor máximo de giro por torsión ocurre en el centro de la viga AB, donde existirá un momento torsional de valor cero.

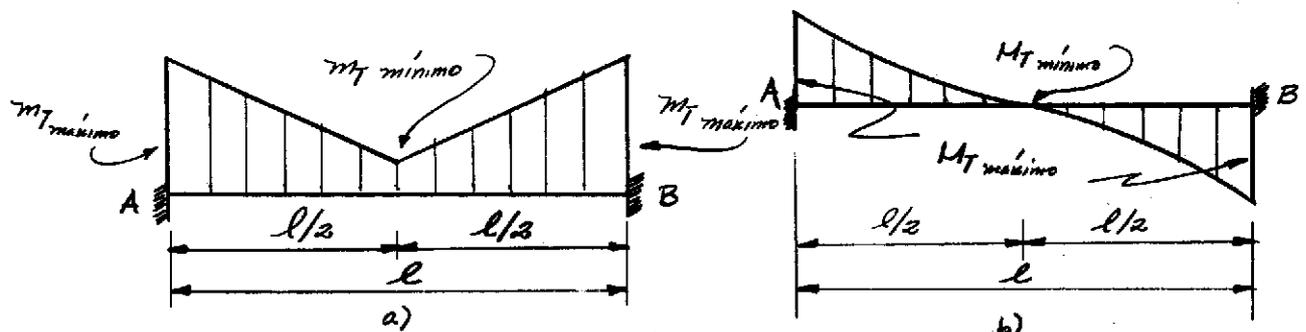


Figura No. 8 - a) Forma en que se transmite el momento torsional de una losa interior de una dirección a una viga perimetral AB.  
b) Diagrama de momentos torsionales acumulados en la viga AB con base en el diag. de cargas de la fig. a.

### 3.1.2 Vigas Balcón

#### 3.1.2.1 Vigas balcón con miembros interceptados en ángulo recto

La forma de analizar una viga balcón cuyos miembros se interceptan en ángulo recto se mostrará por medio de un ejemplo numérico. (Ver figura No. 9).

#### 3.1.2.2 Vigas balcón con miembros interceptados en ángulos diferentes a 90 grados

Las vigas balcón de este tipo se han usado como ochavo en edificios cuando la columna esquinera se omite. La forma de analizar este tipo de estructura es similar al análisis llevado a cabo para una viga curva plana.

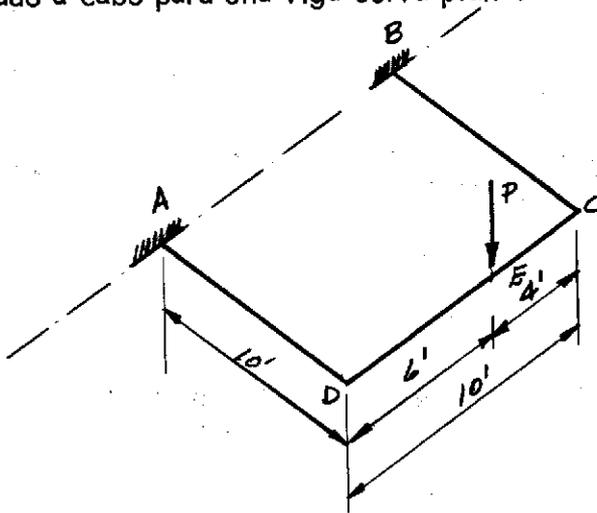


Figura No. 9 - Diagrama de carga para una viga balcón.

Consideremos la viga balcón mostrada, formada por las vigas BC, CD y DA.

Los apoyos empotrados, bien se pueden considerar que representan columnas o bien puntos (apoyos) sobre una viga.

La sección transversal de todas las vigas se considerará igual:

$$\text{ancho } b = 10''$$

$$\text{peralte } d = 20''$$

$$P = 40 \text{ Kips}$$

Rigidez en flexión de la viga CD

$$K_{CD} = \frac{4EI}{L} = \frac{(4E)(1/12)(10)(20)^3}{(10)(12)} \approx 222 E$$

Rigidez en torsión para las vigas BC y DA

$$K_T = \beta b^3 d G/L = (0.229) \cdot (10)^3 \cdot (20) E / 2.4 \times 12 \times 10$$

$$K_T \approx 16E$$

donde  $G \approx E/2.4$

$$\beta = 0.229$$

Factores de distribución:

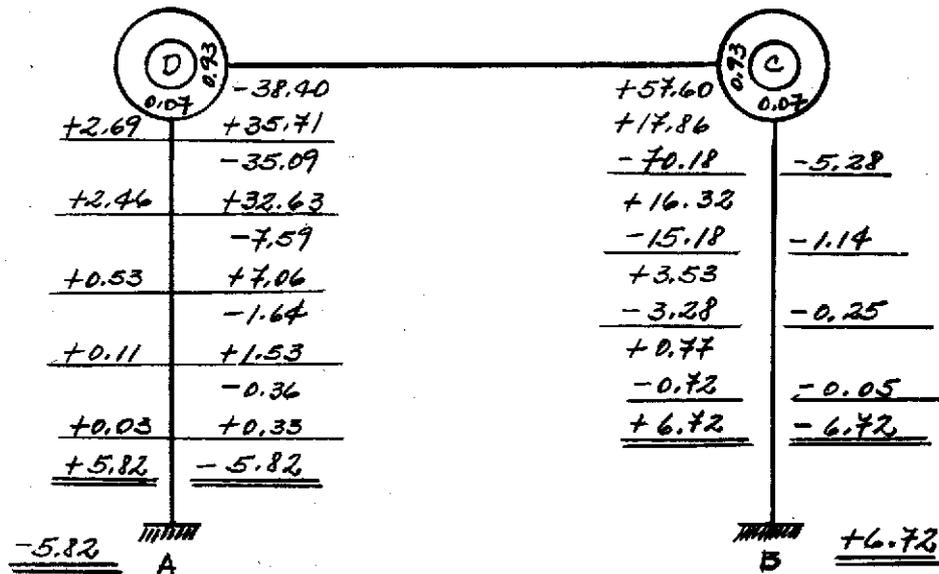
$$\text{para DC} = 222 / (222 + 16) = 0.93$$

$$\text{para BC y DA} = 16 / 238 = 0.070$$

$$M_{F_{20}} = \frac{(40)(6)^2(4)}{10^2} = 57.60 \text{ Kpie}$$

$$M_{F_{DC}} = \frac{(40)(6)(4)^2}{10^2} = 38.40 \text{ Kpie}$$

Los momentos finales en los extremos A, B, C y D se determinan por distribución de momentos, estos son:



Esfuerzas inducidas en las vigas:

Viga DC:

$$\sum M_c = 0$$

$$10V_D + 6.72 - 5.82 - 40(4) = 0$$

$$\therefore \underline{V_D = 15.91 K}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$10V_C - 6.72 + 5.82 - 40(6) = 0$$

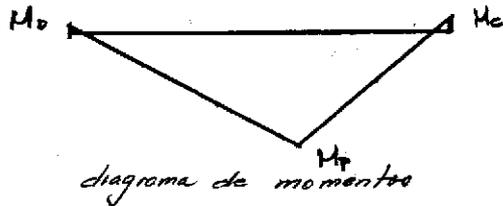
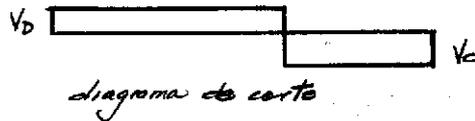
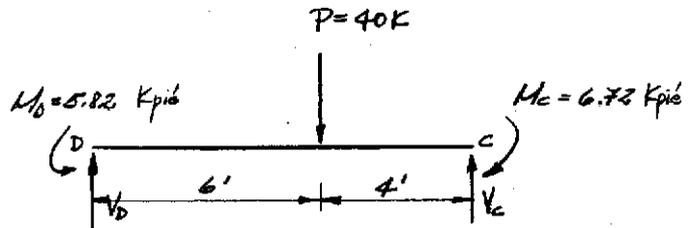
$$\therefore \underline{V_C = 24.09 K}$$

Momentos:  $0 \leq x \leq 6'$

$$M_x = V_D \cdot x - 5.82$$

$6 \leq x \leq 10'$

$$M_x = V_D \cdot x - 5.82 - 40(x - 6)$$



K desde D	0'	2'	4'	6'	8'	10'
M <sub>x</sub>	-5.82	26.0	57.82	89.64	41.46	-6.72

Viga AD:

$$\underline{R_{FA} = -159.10 Kpie}$$

$$\underline{M_{TA} = -5.82 Kpie}$$

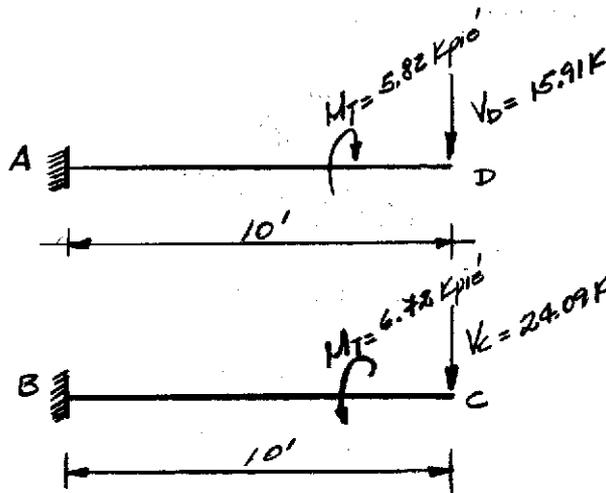
$$\underline{V_A = 15.91 K}$$

Viga BC:

$$\underline{R_{FB} = -240.90 Kpie}$$

$$\underline{M_{TB} = +6.72 Kpie}$$

$$\underline{V_B = 24.09 K}$$



Nota: Cuando los valores de  $V_D$  y  $V_C$  discrepan demasiado, se hace necesario considerar los giros de los voladizos AD y BC en los puntos D y C para determinar el valor del giro diferencial entre ambos extremos con el objeto de determinar el momento torsional que actúa en CD.

### 3.1.3 Torsión introducida en voladizos mutuamente soportados

Con el avance de la arquitectura moderna, se ha visto afectado el uso de las estructuras convencionales, al introducirles elementos estructurales en cuya solución hay que considerar la existencia de momentos torsionales. Tal es el caso del omitir las columnas esquineras de los edificios. La solución estructural de este caso consiste en el utilizar vigas curvas o bien voladizos que son unidos rígidamente en sus intersecciones. Debido a la rigidez de la unión, ambos voladizos están sometidos a momentos de flexión y de torsión.

En esta sección del trabajo, se considerarán los voladizos que se interceptan en ángulo recto, que es el caso más común para la solución de la eliminación de la columna esquinera. Aunque los artículos a que este problema se refieren no son muy completos, ya que no consideran continuidad entre el resto de la estructura y los voladizos mutuamente soportados, presentaré el análisis del sistema para el caso general, donde las propiedades de los dos voladizos son diferentes y actúan diversos tipos de cargas. En seguida el autor del presente trabajo desarrollará la forma de determinar las rigideces del sistema y los coeficientes de transmisión de sus momentos flexionales y torsionales.

El artículo escogido para presentar el caso es el "Flexure of Perpendicular Mutually Supported Cantilevers" de Panayiotis J. Spyropoulos, que considero como el más completo de los consultados.

A causa de la rigidez de la unión de los dos voladizos, su punto de unión se encuentra afectado por rotaciones y desplazamientos que son comunes a ambos voladizos. Estas rotaciones y desplazamientos son expresados por una condición de esfuerzos en cada voladizo, resolviendo así un sistema de carga indeterminado al tercer grado.

El análisis de la estructura puede llevarse a cabo por medio del método de la distribución de momentos, o bien por el método de las acciones.

Este último análisis se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Se escoge una estructura primaria estáticamente determinada y estable. Se introducen tantas acciones como redundantes tiene el problema, una acción en dirección de cada redundante.
2. Se determinan las deformaciones producidas por estas acciones en el punto en cuestión.
3. A causa de la continuidad de las superficies en el punto en cuestión, debe de existir compatibilidad satisfaciéndose las acciones desconocidas, lo cual conduce a tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución proporciona el valor de las redundantes. El resto del análisis de cargas se obtiene por simple superposición.

A causa de lo laborioso de los cálculos, el autor del artículo ha elaborado una serie

de tablas de coeficientes para determinar los valores de las redundantes del sistema, basados en las propiedades geométricas de los voladizos, sus relaciones de longitudes y del tipo de carga que actúa en los mismos.

Las tablas se presentan en este trabajo, y aunque no cubren una gran gama de casos, son de gran ayuda para el diseño de este tipo de estructuras.

En ninguno de los artículos que trata el análisis de los voladizos mutuamente soportados, se considera a los voladizos monolíticamente unidos a losas. Esto trae como consecuencia, que no se consideren los momentos torsionales uniformemente distribuidos que transmiten las losas a las vigas, y que no se considere tampoco la capacidad que tiene una losa monolítica, como consecuencia de su enorme rigidez torsional, de absorber parte de los momentos torsionales de la viga.

Análisis de voladizos mutuamente soportados:

Consideremos dos voladizos perpendiculares CA y CB, con longitudes  $l_1$  y  $l_2$  y cargas  $P_1$  y  $P_2$

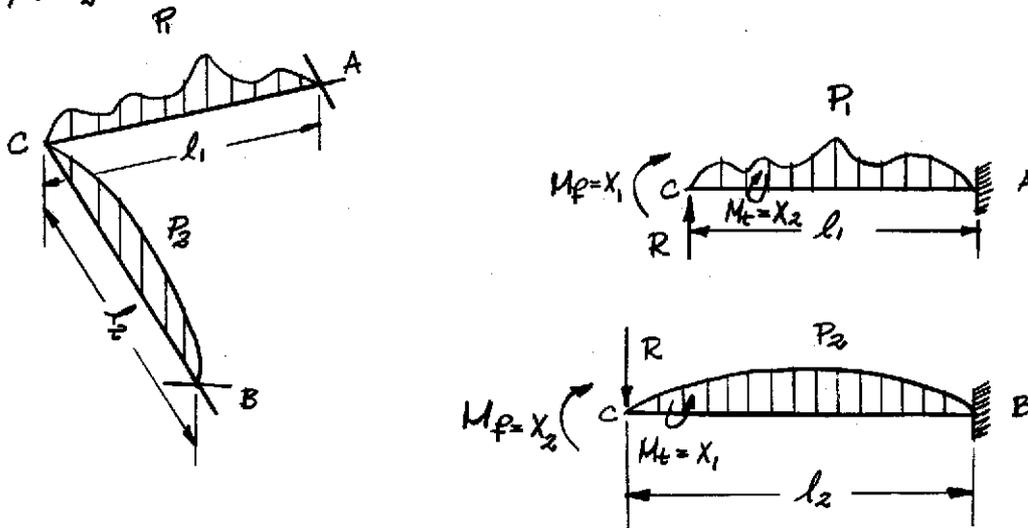


Figura No. 10 - Voladizos perpendiculares mutuamente soportados.

Para el voladizo No. 1 tenemos:

$R$  = Reacción vertical en el punto C, actúa hacia arriba.

$X_1$  = Momento flector en el punto C produciendo tensión en la fibra inferior.

$X_2$  = Momento torsional en el punto C, actuando en dirección contra el reloj.

En el punto C, del voladizo 2 actúan fuerzas y momentos iguales de dirección opuesta

$R$  = Fuerza actuando hacia abajo.

$X_1$  = Momento torsional, actuando en dirección contra el reloj.

$X_2$  = Momento flector produciendo tensión en la fibra inferior.

$f_1$  y  $f_2$  = deflexiones;  $f_{1(c)}$  y  $f_{2(c)}$  = deflexiones producidas por  $P_1$  y  $P_2$

$\phi_1$  y  $\phi_2$  = pendientes

$\theta_1$  y  $\theta_2$  = rotaciones torsionales

Determinación de la deflexión del punto C

$$f_1 = f_{1(c)} - \frac{R \cdot l_1^3}{3EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1^2}{2EI_1} \quad (1)$$

$$f_2 = f_{2(c)} + \frac{R \cdot l_2^3}{3EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2^2}{2EI_2} \quad (2)$$

$$\phi_1 = \phi_{1(c)} - \frac{R \cdot l_1^2}{2EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1}{EI_1} \quad (3)$$

$$\phi_2 = \phi_{2(c)} + \frac{R \cdot l_2^2}{2EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2}{EI_2} \quad (4)$$

$$\theta_1 = \frac{X_2}{G_1} \cdot l_1 \quad (5)$$

$$\theta_2 = \frac{X_1}{G_2} \cdot l_2 \quad (6)$$

donde

$$G_1 = G_2 = (\beta b^3 d G)$$

$b$  = ancho de la sección

$d$  = peralte de la sección

$G$  = módulo de elasticidad en corte

$\beta$  = coeficiente en función de  $d/b$

Se debe satisfacer la siguiente condición en el punto C.

$$f_1 = f_2 \quad (7)$$

$$\phi_1 = \theta_2 \quad (8)$$

$$\phi_2 = \theta_1 \quad (9)$$

igualando las ecuaciones

$$f_{1(c)} - \frac{R \cdot l_1^3}{3EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1^2}{2EI_1} = f_{2(c)} + \frac{R \cdot l_2^3}{3EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2^2}{2EI_2} \quad (10)$$

$$\phi_{1(c)} - \frac{R \cdot l_1^2}{2EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1}{EI_1} = \frac{X_1}{G_2} \cdot l_2 \quad (11)$$

$$\phi_{2(c)} + \frac{R \cdot l_2^2}{2EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2}{EI_2} = \frac{X_2}{G_1} \cdot l_1 \quad (12)$$

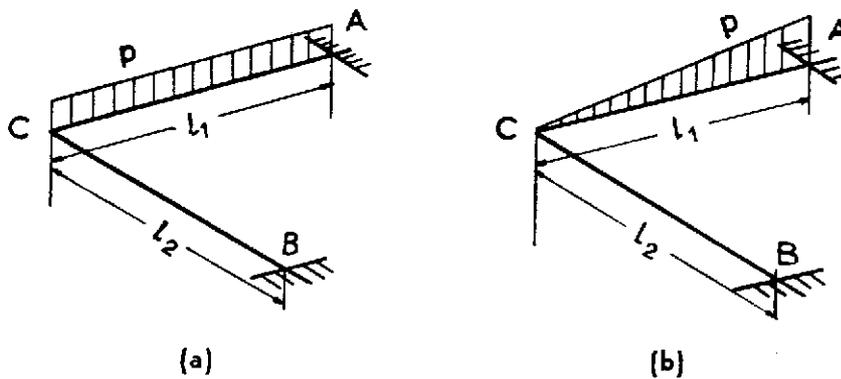
En la siguiente página se presentan tablas con valores de " $\beta$ " y valores de  $R$ ,  $R$  y  $R$  para los valores de  $d/b$  y diversos tipos de cargas y longitudes de los voladizos.

Las tablas fueron tomadas del artículo de Panayiotis J. Spyropoulos.

TABLA No. 1 - VALORES DE " $\beta$ " PARA VARIAS RELACIONES DE  $d/b$

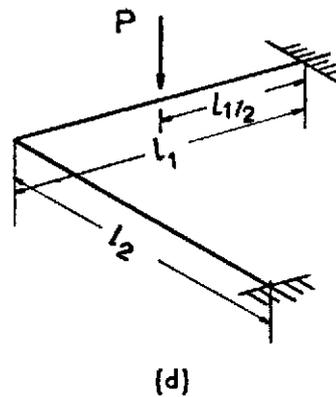
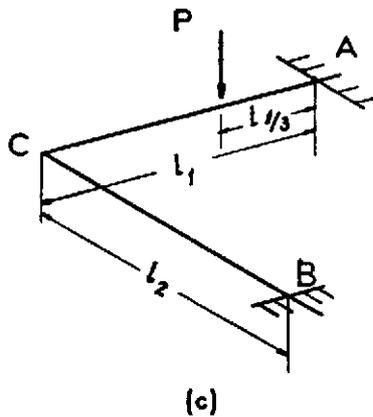
$d/b$	$\beta$	$d/b$	$\beta$
1.0	0.141	3.0	0.263
1.2	0.166	4.0	0.281
1.5	0.196	5.0	0.291
2.0	0.229	10.0	0.312
2.5	0.249	$\infty$	0.333

TABLA No. 2 - REACCIONES Y MOMENTOS DE FLEXION Y TORSION DE UNA VIGA EN VOLADIZO PARA DIVERSOS VALORES DE  $d/b$  Y DIVERSOS TIPOS DE CARGAS

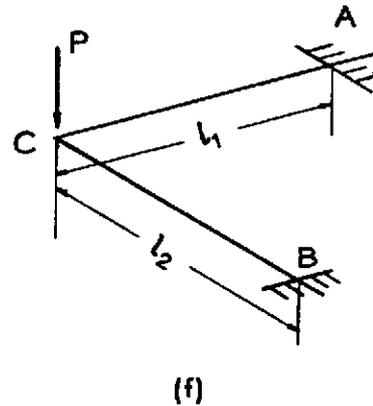
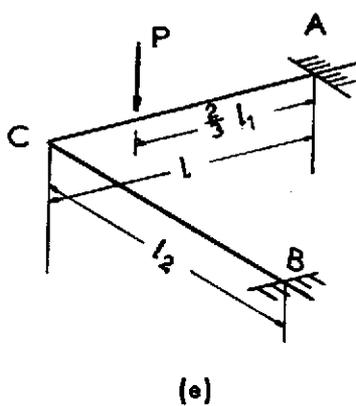


$\frac{d}{b}$ ratio	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$
$\frac{d}{b} = 1$	$R = 0.2680 pl_1$ $X_1 = 0.0160 pl_1^2$ $X_2 = 0.0352 pl_1^2$	0.1970 0.0285 0.0412	0.1423 0.0348 0.0422	0.0735 0.0024 0.0097	0.0538 0.0061 0.0113	0.0389 0.0081 0.0115
$\frac{d}{b} = 1.5$	$R = 0.2650 pl_1$ $X_1 = 0.0127 pl_1^2$ $X_2 = 0.0248 pl_1^2$	0.1940 0.0215 0.0299	0.1388 0.0255 0.0310	0.0722 0.0021 0.0068	0.0525 0.0047 0.0081	0.0374 0.0061 0.0084
$\frac{d}{b} = 2$	$R = 0.2640 pl_1$ $X_1 = 0.0097 pl_1^2$ $X_2 = 0.0178 pl_1^2$	0.1918 0.0160 0.0217	0.1356 0.0187 0.0227	0.0713 0.0018 0.0048	0.0517 0.0035 0.0059	0.0365 0.0044 0.0061
$\frac{d}{b} = 2.5$	$R = 0.2640 pl_1$ $X_1 = 0.0071 pl_1^2$ $X_2 = 0.0125 pl_1^2$	0.1903 0.0116 0.0154	0.1330 0.0134 0.0162	0.0710 0.0013 0.0034	0.0512 0.0026 0.0042	0.0356 0.0032 0.0044
$\frac{d}{b} = 3$	$R = 0.2635 pl_1$ $X_1 = 0.0058 pl_1^2$ $X_2 = 0.0100 pl_1^2$	0.1895 0.0094 0.0123	0.1320 0.0107 0.0130	0.0706 0.0011 0.0027	0.0509 0.0021 0.0033	0.0353 0.0025 0.0035
$\frac{d}{b} = 4$	$R = 0.2635 pl_1$ $X_1 = 0.0038 pl_1^2$ $X_2 = 0.0062 pl_1^2$	0.1887 0.0060 0.0078	0.1300 0.0068 0.0082	0.0705 0.0007 0.0017	0.0505 0.0013 0.0021	0.0348 0.0016 0.0021
$\frac{d}{b} = 5$	$R = 0.2635 pl_1$ $X_1 = 0.0026 pl_1^2$ $X_2 = 0.0042 pl_1^2$	0.1886 0.0041 0.0053	0.1290 0.0046 0.0056	0.0705 0.0005 0.0011	0.0505 0.0009 0.0014	0.0345 0.0011 0.0015

TABLA No. 2 - REACCIONES Y MOMENTOS DE FLEXION Y TORSION DE UNA VIGA EN VOLADIZO PARA DIVERSOS VALORES DE  $d/b$  Y DIVERSOS TIPOS DE CARGAS



$\frac{d}{b}$ ratio	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$
$\frac{d}{b} = 1$	$R = 0.1138 P$ $X_1 = 0$ $X_2 = 0.0150 Pl_1$	0.0825 0.0059 0.0173	0.0592 0.0096 0.0175	0.2330 0.0042 0.0306	0.1700 0.0168 0.0356	0.1228 0.0232 0.0363
$\frac{d}{b} = 2$	$R = 0.1080 P$ $X_1 = 0$ $X_2 = 0.0073 Pl_1$	0.0780 0.0038 0.0088	0.0547 0.0054 0.0092	0.2250 0.0034 0.0152	0.1626 0.0098 0.0184	0.1144 0.0127 0.0192
$\frac{d}{b} = 4$	$R = 0.1053 P$ $X_1 = 0$ $X_2 = 0.0025 Pl_1$	0.0753 0.0015 0.0031	0.0518 0.0021 0.0032	0.2210 0.0015 0.0052	0.1577 0.0039 0.0065	0.1088 0.0048 0.0069



$\frac{d}{b}$ ratio	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$	$l_2 = 0.75 l_1$	$l_2 = l_1$	$l_2 = 1.25 l_1$
$\frac{d}{b} = 1$	$R = 0.3770$ $X_1 = 0.0168$ $X_2 = 0.0496$	0.2770 0.0352 0.0578	0.2000 0.0447 0.0592	0.6700 0.0810 0.0880	0.50 0.1047 0.1047	0.3660 0.1150 0.1080
$\frac{d}{b} = 2$	$R = 0.3680$ $X_1 = 0.0108$ $X_2 = 0.0248$	0.2670 0.0201 0.0303	0.1885 0.0244 0.0315	0.6840 0.0440 0.0461	0.50 0.0565 0.0565	0.3550 0.0612 0.0593
$\frac{d}{b} = 4$	$R = 0.3660$ $X_1 = 0.0042$ $X_2 = 0.0104$	0.2610 0.0076 0.0109	0.1800 0.0089 0.0114	0.6950 0.0164 0.0165	0.50 0.0206 0.0206	0.3450 0.0220 0.0218

Forma de determinar las rigideces flexionales y torsionales y los coeficientes de transmisión de flexión y torsión.

Rigidez de la estructura BCA (Ver figura No. 10).

Rigidez en flexión

Para determinar la rigidez de la estructura BCA se hará uso de la ecuación No. 3 de la pág. 19, al introducir o forzar un ángulo de giro unitario en el extremo B. Para resolver el sistema de ecuaciones hay necesidad de eliminar la influencia de las cargas que no existen y dejar únicamente el efecto de las incógnitas  $X_1$ ,  $X_2$  y  $R$  y tomar en cuenta la deflexión introducida por el giro unitario  $\Phi$ ,  $\Delta = \Phi l_2$ .

Al hacer uso de las igualdades en la ecuación 8, se tendrá la siguiente igualdad

$\Phi + \phi_2 = \theta_1$ . Donde  $\Phi$  es el ángulo unitario introducido en B. Y  $\Phi l_2 + f_2 = f_1$ , el valor de la deflexión total, en la ecuación 7.

Substituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones presentado, se determinan los valores de los momentos de flexión y torsión en ambos extremos B y A.

El valor del momento de empotramiento en B será el valor de la rigidez en flexión de la estructura BCA.

La relación del valor del momento de flexión en A al valor del momento de flexión en B será el coeficiente de transmisión de flexión de la estructura.

El valor de la relación del momento torsional en B al momento de flexión en B será el coeficiente de relación  $m_{B\phi B}$ .

El valor de la relación del momento torsional en A al momento de flexión en B será el coeficiente de relación  $m_{B\phi A}$ .

Rigidez de la estructura ACB

A menos que ambos voladizos tengan las mismas propiedades físicas, se deberá determinar las rigideces y los coeficientes de transmisión y relación para ambos sentidos de la estructura, ya que varían. La relación  $K_{AB} \cdot C_{AB} = K_{BA} \cdot C_{BA}$  se mantiene.

Para determinar la rigidez y el valor de los coeficientes de ACB, se procede en igual forma a la descrita.

## Rigidez en torsión

Si introducimos un giro unitario (en sentido del momento de torsión) en el apoyo B, (Ver figura No. 10 y ecuaciones del No. 1 al No. 12), podemos determinar por medio de las ecuaciones presentadas en las páginas 19 y 20, los momentos de flexión y torsión en los extremos B y A; tendremos:

El valor del momento de torsión en el extremo B es el valor de la rigidez en torsión de la estructura BCA.

La relación del valor del momento de torsión en A al valor del momento de torsión en B será el coeficiente de transmisión por torsión de la estructura.

El valor de la relación del momento de flexión en B al momento de torsión en B será el coeficiente de relación  $t_{\text{mB}}$ .

El valor de la relación del momento de flexión en A al momento de torsión en B será el coeficiente de relación  $t_{\text{mA}}$ .

Para determinar el valor de la rigidez y los coeficientes para la estructura ACB, se procede en igual forma a la descrita.

*Rigidez flexional de las estructuras de B a C a A  
(Ver figura No. 10 y ecuaciones del No. 1 al No. 12)*

$\Phi$  = ángulo unitario en el apoyo B (en sentido del momento de flexión)  
 $\Delta = \Phi l_2$  = deflexión introducida por  $\Phi$

$$f_{1(0)} = 0$$

$$f_{2(0)} = 0$$

$$\phi_{1(0)} = 0$$

$$\phi_{2(0)} = 0$$

*sustituyendo estos valores tenemos:*

$$\Phi l_2 + f_2 = f_1 \quad (7')$$

$$\Phi + \phi_2 = \theta_1 \quad (9')$$

*Llevando a cabo las igualaciones:*

$$\Phi + \frac{R l_2^2}{2EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2}{EI_2} = \frac{X_2}{G_1} \cdot l_1 \quad (12')$$

$$-\frac{R l_1^2}{2EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1}{EI_1} = \frac{X_1}{G_2} \cdot l_2 \quad (11')$$

$$-\frac{R \cdot l_1^3}{3EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1^2}{2EI_1} = \Phi l_2 + \frac{R l_2^3}{3EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2^2}{2EI_2} \quad (10')$$

La resolución de este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas nos proporciona las siguientes fórmulas:

Valor de  $R$ :

$$R = \frac{\Phi l_2 \left[ E - \frac{l_2}{2 I_2 \left( \frac{l_2}{E I_2} + \frac{l_1}{G_1} \right)} \right]}{\left[ \frac{l_1^3}{I_1} \left[ \frac{\frac{l_1}{4 E I_1}}{\frac{l_1}{E I_1} + \frac{l_2}{G_2}} - \frac{1}{3} \right] + \frac{l_2^3}{I_2} \left[ \frac{\frac{l_2}{4 E I_2}}{\frac{l_2}{E I_2} + \frac{l_1}{G_1}} - \frac{1}{3} \right] \right]} \quad (13)$$

Valor de  $X_1$  en función de  $R$ :

$$X_1 = \frac{-\frac{R \cdot l_1^3}{2 E I_1}}{\left[ \frac{l_1}{E I_1} + \frac{l_2}{G_2} \right]} \quad (14)$$

Valor de  $X_2$  en función de  $R$ :

$$X_2 = \frac{\left[ \Phi + \frac{R \cdot l_2^2}{2 E I_2} \right]}{\left[ \frac{l_2}{E I_2} + \frac{l_1}{G_1} \right]} \quad (15)$$

Rigidez flexional de la estructura de A a C a B  
(Ver figura No. 10 y ecuaciones del No. 1 al No. 13)

$\Phi$  = ángulo unitario en el apoyo A (en sentido del momento de flexión)  
 $\Delta = \Phi \cdot L_1$

$$f_{1(0)} = 0$$

$$f_{2(0)} = 0$$

$$\Phi_{1(0)} = 0$$

$$\Phi_{2(0)} = 0$$

sustituyendo estos valores tenemos:

$$\Phi \cdot l_1 + \phi_1 = \phi_2 \quad (7')$$

$$\Phi + \phi_1 = \phi_2 \quad (8')$$

Llevando a cabo las igualaciones:

$$\Phi - \frac{R l_1^2}{2EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1}{EI_1} = \frac{X_1}{G_2} \cdot l_2 \quad (11')$$

$$\frac{R l_2^2}{2EI_2} - \frac{X_2 \cdot l_2}{EI_2} = \frac{X_2}{G_1} \cdot l_1 \quad (12')$$

$$\Phi l_1 - \frac{R l_1^3}{3EI_1} - \frac{X_1 l_1^2}{2EI_1} = \frac{R l_2^3}{3EI_2} - \frac{X_2 l_2^2}{2EI_2} \quad (10')$$

La resolución de este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas nos proporciona las siguientes fórmulas:

Valor de R:

$$R = \frac{\Phi l_1 \left[ E - \frac{l_1}{2I_1 \left( \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right)} \right]}{\left\{ \frac{l_1^3}{I_1} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\frac{l_1}{4EI_1}}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2}} \right] + \frac{l_2^3}{I_2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\frac{l_2}{4EI_2}}{\frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1}} \right] \right\}} \quad (16)$$

Valor de  $X_1$  en función de R:

$$X_1 = \frac{\left[ \Phi - \frac{R \cdot l_1^2}{2EI_1} \right]}{\left[ \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right]} \quad (17)$$

Valor de  $X_2$  en función de  $R$ :

$$X_2 = \frac{\frac{R \cdot l_2^2}{2EI_2}}{\left[ \frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1} \right]} \quad (18)$$

del estudio de las fórmulas presentadas se deduce lo siguiente:

Para un sistema de voladizos mutuamente soportados en que las características geométricas de ambos voladizos no sean exactamente iguales (es decir  $l_1 \neq l_2$  o  $I_1 \neq I_2$  o  $G_1 \neq G_2$ ), los valores de sus rigideces en ambos cantos son diferentes.

Esto complica el problema pues existen 2 rigideces para flexión, 2 rigideces para torsión, así como 2 coeficientes de transmisión para flexión y 2 para torsión, y de 8 coeficientes de relación de momentos flexionales y torsionales. -

Rigidez torsional de la estructura de B a C a A.  
(Ver figuras No. 10 y ecuaciones del No. 1 al No. 18)

$\varphi$  = ángulo unitario en el apoyo B (en sentido del momento de torsión)

$$f_1(0) = 0$$

$$f_2(0) = 0$$

$$\phi_1(0) = 0$$

$$\phi_2(0) = 0$$

sustituyendo estos valores tenemos:

$$f_1 = f_2 \quad (7')$$

$$\phi_1 = \theta_2 + \varphi \quad (8')$$

$$\phi_2 = \theta_1 \quad (9')$$

Llevando a cabo las igualaciones:

$$-\frac{R \cdot l_1^2}{2EI_1} - \frac{X_1 \cdot l_1}{EI_1} = \frac{X_1}{G_2} \cdot l_2 + \varphi \quad (11')$$

$$\frac{R l_2^2}{2EI_2} - \frac{K_2 l_2}{EI_2} = \frac{K_2 \cdot l_1}{G_1} \quad (12')$$

$$-\frac{R l_1^3}{3EI_1} - \frac{K_1 l_1^2}{2EI_1} = \frac{R l_2^3}{3EI_2} - \frac{K_2 l_2^2}{2EI_2} \quad (10')$$

La resolución de este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas nos proporciona las siguientes fórmulas:

Valor de R:

$$R = \frac{\frac{q \cdot l_1}{2} \left[ -\frac{l_1}{I_1 \left( \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right)} \right]}{\left\{ \frac{l_1^3}{I_1} \left[ \frac{\frac{l_1}{4EI_1}}{\frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2}} - \frac{1}{3} \right] + \frac{l_2^3}{I_2} \left[ \frac{\frac{l_2}{4EI_2}}{\frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1}} - \frac{1}{3} \right] \right\}} \quad (19)$$

Valor de  $K_1$  en función de R:

$$K_1 = \frac{-q - \frac{R l_1^2}{2EI_1}}{\left[ \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right]} \quad (20)$$

Valor de  $K_2$  en función de R:

$$K_2 = \frac{\frac{R l_2^2}{2EI_2}}{\left[ \frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1} \right]} \quad (21)$$

Rigidez torsional de la estructura de A a C a B.  
(ver figura No. 10 y ecuaciones del No. 1 al No. 13)

$\varphi$  = ángulo unitario en el apoyo A (con sentido del momento de torsión)

$$f_{1(0)} = 0$$

$$f_{2(0)} = 0$$

$$\phi_{1(0)} = 0$$

$$\phi_{2(0)} = 0$$

sustituyendo estos valores tenemos:

$$f_2 = f_1 \quad (7')$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (8')$$

$$\phi_2 = \theta_1 + \varphi \quad (9')$$

Hevando a cabo las igualaciones:

$$-\frac{R l_1^3}{2EI_1} - \frac{K_1 l_1}{EI_1} = \frac{K_1}{G_2} \cdot l_2 \quad (11')$$

$$\frac{R l_2^3}{2EI_2} - \frac{K_2 l_2}{EI_2} = \frac{K_2}{G_1} \cdot l_1 + \varphi \quad (12')$$

$$\frac{R l_2^3}{3EI_2} - \frac{K_2 l_2^2}{2EI_2} = -\frac{R l_1^3}{3EI_1} - \frac{K_1 l_1^2}{2EI_1} \quad (10')$$

La resolución de este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas nos proporciona las siguientes fórmulas:

Valor de R:

$$R = \frac{\varphi \cdot l_2}{2} \left[ -\frac{l_2}{I_2 \left( \frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1} \right)} \right] \quad (22)$$

$$\left\{ \frac{l_2^3}{I_2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\frac{l_2}{4EI_2}}{\left( \frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1} \right)} \right] + \frac{l_1^3}{I_1} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\frac{l_1}{4EI_1}}{\left( \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right)} \right] \right\}$$

Valor de  $X_1$  en función de  $R$ :

$$X_1 = \frac{-R \cdot l_1^2}{2EI_1} \left[ \frac{l_1}{EI_1} + \frac{l_2}{G_2} \right] \quad (23)$$

Valor de  $X_2$  en función de  $R$ :

$$X_2 = \frac{R \cdot l_2^2}{2EI_2} - U \left[ \frac{l_2}{EI_2} + \frac{l_1}{G_1} \right] \quad (24)$$

Ejemplo de aplicación. (ver figura No. 10)

Longitud voladizo No. 1 = 15.42' =  $l_1$

Longitud voladizo No. 2 = 21.00' =  $l_2$

relación entre longitudes:

$$l_1/l_2 = 15.42/21 = 0.735 \approx 0.75$$

$$l_2/l_1 = 21.0/15.42 = 1.36$$

$$\text{peralte voladizos} = 1.00 \text{ mts} \approx 39.37''$$

$$\text{ancho voladizos} = 0.20 \text{ mts} \approx 7.87''$$

$$\text{Relación } d/b = 1.00/0.20 = 5$$

cargas uniformemente distribuidas para ambos voladizos

$$w_1 = 1.174 \text{ K/pie} ; w_2 = 0.600 \text{ K/pie}$$

Utilizando las tablas No. 2 a.- Para voladizo No. 2;  $d/b=5$  y  $l_1/l_2=0.75$

$$R_2 = 0.2635 w_2 l_2 = (0.2635)(0.60)(21) = 3.32 \text{ Kips (hacia arriba)}$$

$$X_1 = 0.0026 w_2 l_2^3 = (0.0026)(0.60)(21)^2 = 0.687 \text{ Kpie} = M_{R_2}$$

$$X_2 = 0.0042 w_2 l_2^2 = (0.0042)(0.60)(21)^2 = 1.110 \text{ Kpie} = M_{T_2}$$

Para el voladizo No.1.-

$$R_1 = -3.32 \text{ Kips (hacia abajo)}$$

$$M_{F1} = X_2 = 1.11 \text{ Kpió}$$

$$M_{F2} = X_1 = 0.687 \text{ Kpió}$$

Para voladizo No.1.-  $l_2/l_1 = 1.36$  y  $d/b = 5$   
(se extrapolará en las tablas en forma aproximada)

$$R_1 = (0.1028)w_1 l_1 = (0.1028)(1.174)(15.42) = 1.86 \text{ Kipo (hacia arriba)}$$

$$X_1 = (0.00482)w_1 l_1^2 = (0.00482)(1.174)(15.42)^2 = 1.348 \text{ Kpió} = M_{F1}$$

$$X_2 = (0.00573)w_1 l_1^2 = (0.00573)(1.174)(15.42)^2 = 1.600 \text{ Kpió} = M_{F2}$$

para voladizo No.2.-

$$R_2 = -1.86 \text{ Kipo (hacia abajo)}$$

$$M_{F2} = X_2 = 1.600 \text{ Kpió}$$

$$M_{F1} = X_1 = 1.348 \text{ Kpió}$$

Por superposición:

$$R_2 = 3.32 - 1.86 = 1.46 \text{ K (hacia arriba)}$$

$$M_{F2} = 0.687 + 1.60 = 2.287 \text{ Kpió}$$

$$M_{F1} = 1.110 + 1.348 = 2.458 \text{ Kpió}$$

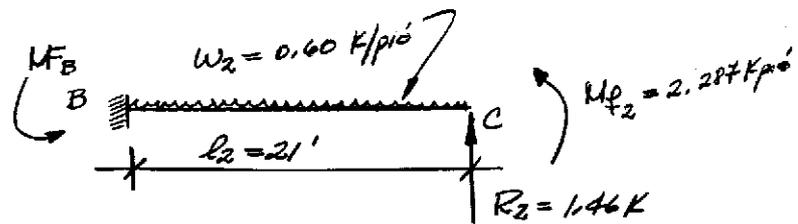
$$R_1 = -3.32 + 1.86 = -1.46 \text{ K (hacia abajo)}$$

$$M_{F1} = 1.348 + 1.11 = 2.458 \text{ Kpió}$$

$$M_{F2} = 1.600 + 0.687 = 2.287 \text{ Kpió}$$

de terminación de los momentos fijos de empotramiento y cortantes en los extremos A y B.-

Voladizo No.2.-



$$M_B = (2.287) + (1.46)(21.0) - (0.60)(21)^2/2 = -99.26 \text{ Kpis}'$$

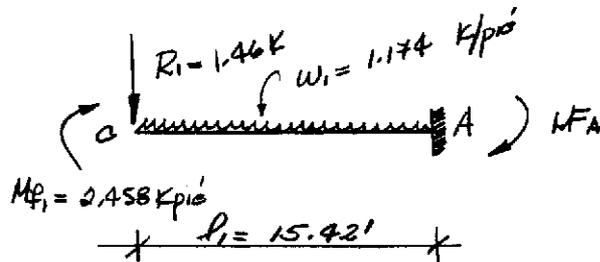
$$\underline{M_B = -99.0 \text{ Kpis}'}$$

$$V_B = 1.46 - (0.60)(21) = -11.14 \text{ K}$$

$$\underline{V_B = -11.0 \text{ K}}$$

$$\underline{M_{\text{Torsión(B)}} = 2.458 \text{ Kpis}' \approx 2.5 \text{ Kpis}'}$$

Vola dizo No. 1.-



$$M_A = -2.458 + (1.46)(15.42) + (1.174)(15.42)^2/2 = 159.64 \text{ Kpis}'$$

$$\underline{M_A = 160.0 \text{ Kpis}'}$$

$$V_A = -1.46 - (1.174)(15.42) = -19.56 \text{ K}$$

$$\underline{V_A = -20.0 \text{ K}}$$

$$\underline{M_{\text{Torsión(A)}} = 2.287 \text{ Kpis}' \approx 2.30 \text{ Kpis}'}$$

determinación de las rigideces, coeficientes de transmisión y coeficientes de relación entre momentos de torsión y flexión.-

$$\text{Valor de } I_1 = I_2 = 40700 \text{ pulg.}^4$$

$$E = 2.35 \text{ G}$$

$$G_1 = G_2 = (0.291)(6^3)(d)(G) = 5600 \text{ G} \approx 2333 \text{ E}$$

Con base en las fórmulas del No. 13 al No. 24, se determinarán los siguientes valores:

$$\text{Rigidez absoluta en flexión de BaCaA} = 112020 \text{ Kpulg.}$$

$$\text{Coeficiente de transmisión por flexión de BaCaA} = 0.4216$$

Coefficiente de relación  $M_B T_B = + 0.015$

Coefficiente de relación  $M_B T_A = - 0.003$

Rigidez absoluta en flexión de  $A a C a B = 63092 \text{ K-pulg.}$

Coefficiente de transmisión por flexión de  $A a C a B = 1.3793$

Coefficiente de relación  $M_A T_A = 0.0481$

Coefficiente de relación  $M_A T_B = 0.0253$

Rigidez absoluta en torsión de  $B a C a A = 2865 \text{ K-pulg.}$

Coefficiente de transmisión por torsión de  $B a C a A = -0.022$

Coefficiente de relación  $T_B M_B = 0.6253$

Coefficiente de relación  $T_B M_A = 0.5567$

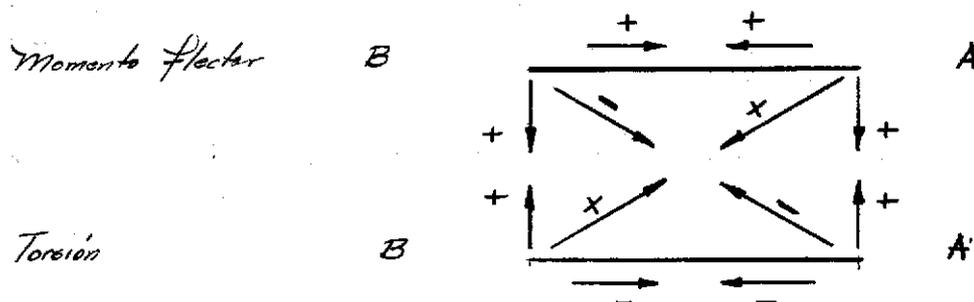
Rigidez absoluta en torsión de  $A a C a B = 3891.0 \text{ K-pulg.}$

Coefficiente de transmisión por torsión de  $A a C a B = -0.016$

Coefficiente de relación  $T_A M_A = +0.78$

Coefficiente de relación  $T_A M_B = -0.084$

Convención de signos determinados para el ejemplo para aplicar a los coeficientes en ambos extremos.



Los valores de torsión; rigideces, coeficientes de transmisión y de relación, así como los valores de los momentos de torsión obtenidos en el ejemplo son pequeños a causa de la enorme relación de  $d/b$ .

Si consideramos una relación  $d/b$  menor se puede observar en la tabla No. 2a que los valores de  $K_1$  y  $K_2$  aumentan considerablemente, así como la rigidez torsional y los coeficientes de transmisión y de relación, haciéndose en esta forma más importantes los efectos de la torsión.

Forma de proceder para el análisis de continuidad de la estructura:

- 1) Determinar momentos fijos (flexionales y torsionales) para los voladizos mutuamente soportados y para el resto de miembros de la estructura.
- 2) Determinar rigideces y coeficientes de transmisión y de relación para los voladizos mutuamente soportados y para el resto de miembros de la estructura.
- 3) Determinación de los factores de distribución y distribución de momentos no balanceados en los nudos.

Se lleva a cabo primero la distribución de momentos de flexión y se determinan los cambios en los momentos debido al giro de los nudos. Estos cambios producirán momentos de torsión determinados con base en los coeficientes de relación. Estos valores se suman a los momentos fijos de torsión.

Se lleva a cabo la distribución de momentos de torsión y se determinan los cambios en los momentos debido al giro de los nudos. Estos cambios producirán momentos de flexión determinados con base en los coeficientes de relación. Estos nuevos valores constituirán momentos no balanceados en los nudos y se hará necesario llevar a cabo otra distribución. El proceso se repite hasta que los valores transmitidos sean insignificantes.

El resultado final se obtiene por la suma de las distribuciones parciales. Una vez se conocen los valores de los momentos en los apoyos, por estática se determina el resto de valores necesarios para el diseño.

El método es similar al mostrado en el ejemplo de aplicación de las vigas curvas planas. (Ver pág. 59).

## 3.2 Sistemas Rectilíneos en el espacio

### 3.2.1 Marcos rectangulares en el espacio

La torsión rara vez es importante en marcos regulares en el espacio a causa de la baja rigidez torsional de la mayor parte de las vigas.

El momento torsional que actúa en un nudo de una estructura tridimensional es producido por el giro diferencial entre dos nudos consecutivos. Este valor puede ser causado por cargas verticales o bien por cargas horizontales, pero su magnitud casi siempre es pequeña. Sin embargo, en estructuras irregulares en el espacio la torsión puede ser un efecto secundario importante.

Se desarrollará un ejemplo para demostrar lo antes indicado.

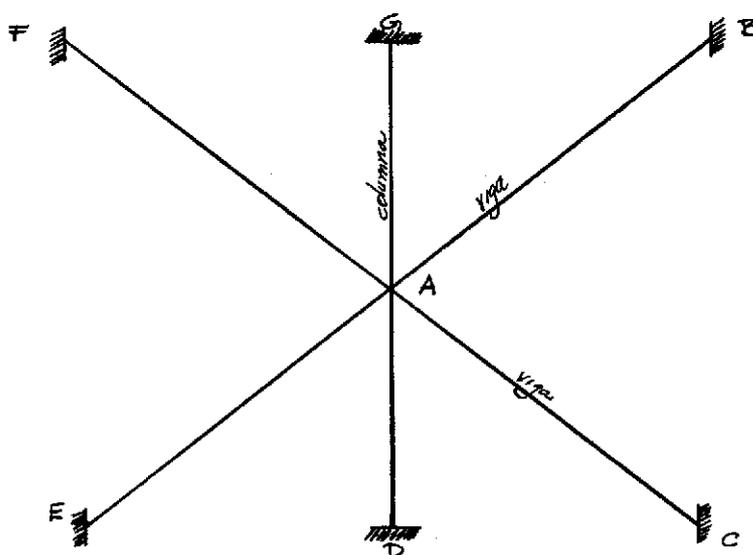


Figura A. Muestra los miembros que se interceptan en un nudo de un marco rectangular espacial. Se considerarán los miembros empotrados en sus extremos.

Consideremos el nudo A y los miembros que se interceptan en él.

AG y AD = columnas de 10' de altura. Todas las vigas se considerarán de 20'.

Todas las secciones transversales se considerarán iguales y cuadradas para así proporcionar mayores rigideces torsionales.

$$b = d = 20''$$

Actúa sobre el nudo A un momento torsional de 100 Kpie, alrededor del eje representado por las vigas EA y AB.

El momento de torsión que absorben las vigas EA y AB se determina por medio de la distribución de momentos basados en las rigideces de los miembros que llegan al nudo.

$$\text{Rigidez flexional columnas} = 4EI/L = 4E (1/12)(20)^4/12.10 = 444 E$$

$$\text{Rigidez flexional de las vigas} = 4EI/L = 4E (1/12)(20)^4/(12)(20) = 222 E$$

$$\text{Rigidez torsional de las vigas} = \beta b^3 d G/L = (0.141)(20)^4(E)/(2.4)(12)(20) = 39 E$$

$$\text{Momento de torsión que absorbe cada viga} = (100) \left[ \frac{39}{(2)(444) + (2)(222) + (2)(39)} \right] = 2.77 \text{ Kpie}$$

Es decir que con base al resultado obtenido se concluye que no es necesario considerar los efectos de la torsión para el análisis de un marco espacial regular.

### 3.2.2 Escaleras de Apoyo Libre

El incremento en el uso de las escaleras denominadas en voladizo o escaleras de apoyo libre (ver figura No. 11), hace necesario considerar la forma de diseñarlas adecuadamente.

Se describirán someramente los principales artículos consultados.

Liebenberg, ref. 23, en su estudio considera las escaleras como placas que se interceptan en el espacio, considerando la estructura como estáticamente indeterminada bajo la suposición que los efectos de la torsión son despreciables.

Siev, ref. 24, considera que por causa de la condición de compatibilidad en la intersección entre los tramos de las escaleras y el descanso, se desarrollan esfuerzos secundarios de torsión. Sin embargo, para los casos comunes en la práctica se pueden despreciar dichos esfuerzos.

Fuchssteiner, ref. 25, considera la estructura como un marco rígido espacial. Los tramos de las escaleras los considera como voladizos inclinados y el descanso como una viga semicircular horizontal que conecta ambos voladizos, ver figura No. 11.

La estructura se reduce a un marco espacial compuesto de elementos lineales y curvos, bajo la suposición de que cada losa de la escalera se comporta como un elemento lineal.

Fuchssteiner basa su método en la aplicación del principio de trabajo mínimo para la determinación de las deformaciones. El cálculo de las redundantes se determinará al resolver las ecuaciones elásticas.

Fuchssteiner considera la estructura empotrada, solución que raras veces se presenta en la realidad.

Franz Sauter, ref. 7, utiliza el método de Fuchssteiner, pero ataca el problema de la resolución de las redundantes en otra forma. Presenta el análisis de la estructura como perfectamente empotrada y como simplemente apoyada.

Sauter proporciona en su artículo gráficas para la determinación de los coeficientes necesarios para la resolución de este tipo de estructuras.

Sauter considera que la viga semicircular horizontal representa la estructura del descanso adecuadamente.

A.R. Cusens y Jing-Gwo Kuang, ref. 8, consideran que la solución dada por Fuchssteiner y Sauter a la estructura del descanso no representa la realidad.

Por lo tanto, ellos introducen en el marco espacial en vez de una viga semicircular, otro elemento recto representativo del descanso. Ver figura No. 11.

Gould, ref. 6, y Taleb, ref. 26, presentan métodos simplificados para el análisis de este tipo de estructuras, pero incurren en el error de no considerar los momentos de flexión que actúan en el elemento representativo del descanso.

Todos los métodos descritos con excepción del de Liebenberg, son simplificaciones del problema, e incurren en el error de despreciar el efecto de la deformación de la sección transversal de las placas al igualar su sección transversal a un elemento lineal concentrado en el centroide de ésta.

Sauter considera que el método de Cusens y Jing-Gwo Kuang incurre en el siguiente error: "El método presentado considera al elemento representativo del descanso con su línea central en la línea de intersección del descanso y los tramos de escalera. Ciertamente, la intersección forma un elemento rígido como en el caso de las placas plegadas y actuará como una especie de soporte, pero no se puede suponer como la línea central de los miembros que se conectan, como tampoco es el caso para el análisis de las placas plegadas."

Sauter considera que sería más lógico mover paralelamente al centro del descanso el elemento representativo del mismo. Y aduce las diferencias encontradas entre ambos métodos a este factor.

Se incluye en el presente trabajo un resumen del método presentado por Cusens-Kuang (ver pág. siguiente), ya que se ha comprobado experimentalmente que es adecuado para el diseño de este tipo de estructuras (ver página 41).

El análisis de la estructura se lleva a cabo por el método de las acciones de la siguiente manera:

1. Se escoge una estructura primaria estáticamente determinada y estable. Se introducen tantas acciones como redundantes tiene el problema, una acción en dirección de cada redundante.
2. Se deducen las ecuaciones para los momentos torsionales y flexionales y para las fuerzas axiales y cortantes.
3. Se aplica el método de la energía de deformación para determinar los valores de las acciones.
4. Los momentos, cortes y empujes pueden ser determinados en todos los miembros de la estructura al determinarse los valores de las acciones.

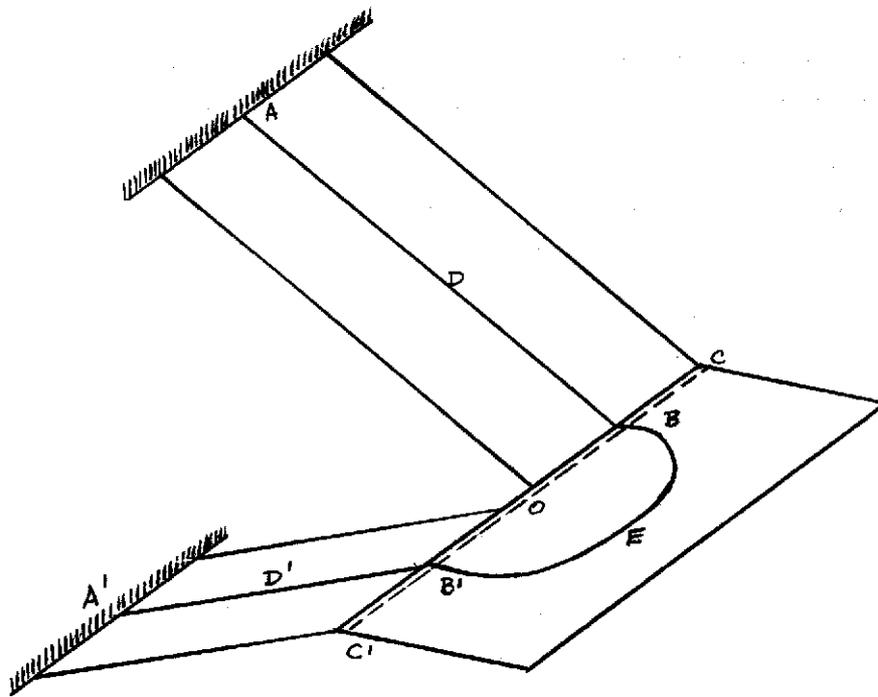


Figura No. 11 - Bosquejo isométrico de una escalera de apoyo libre.

El marco rígido espacial  $A' B' E B A$  es la forma como Fuchssteiner considera la estructura de la escalera de apoyo libre.

El marco rígido  $A' B' O B A$  es la forma como Cusens y Kuang consideran la estructura de la escalera de apoyo libre.

Método de análisis de Cusens -Kuang

Se considera una sección en el punto O (punto medio de B'-B), actúa en las dos partes de la estructura la fuerza horizontal H y el momento Mo.

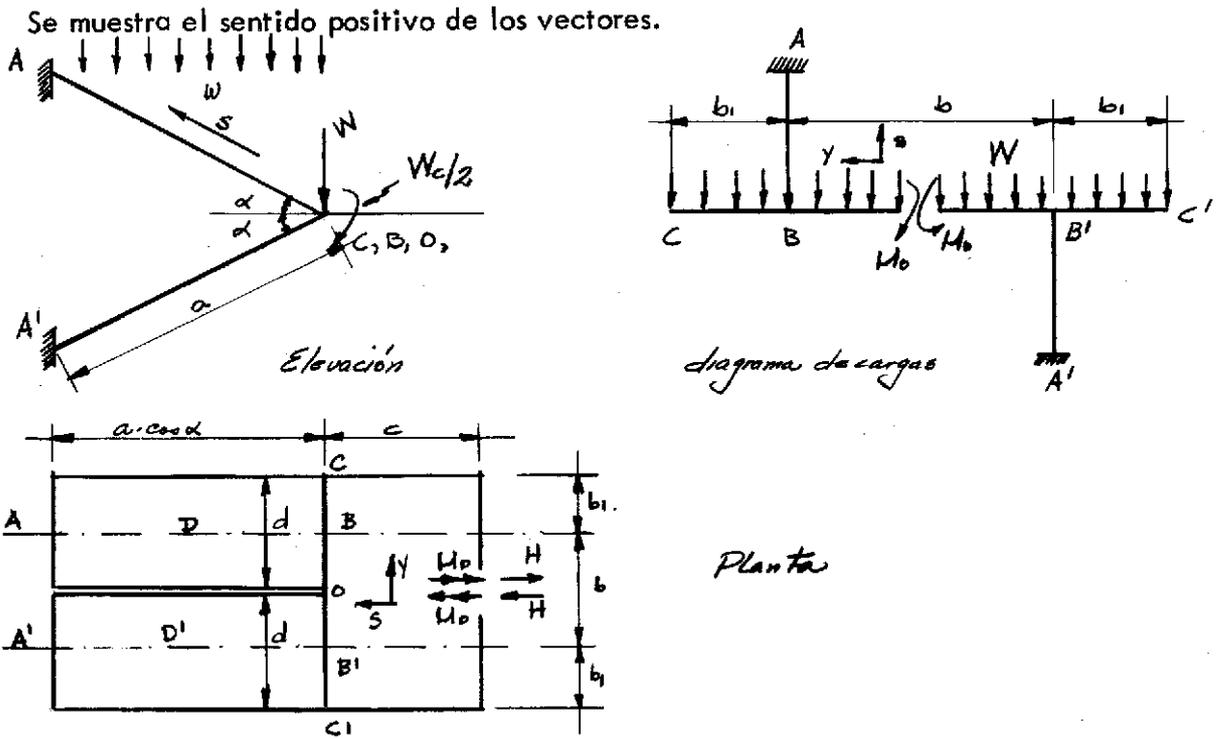


Figura No. 12 - Vistas de la escalera.

Los momentos flectores y torsionantes a lo largo de los miembros de la parte media superior del marco son:

Miembro OB

$$M_r = -M_o - \frac{W y^2}{2} \tag{1}$$

$$M_s = -H y \tag{2}$$

$$M_t = -\frac{W c y}{2} \tag{3}$$

Miembro BC

$$M_r = -\frac{W}{2} \left( \frac{b}{2} + b_1 - y \right)^2 \tag{4}$$

$$M_s = 0 \tag{5}$$

$$M_t = -\frac{W c}{2} \left( \frac{b}{2} + b_1 - y \right) \tag{6}$$

Miembro AB

$$M_r = H \cdot s \cdot \sin \alpha - W \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) s \cdot \cos \alpha - \frac{Wc}{2} (b/2 + b_1) - \frac{w \cdot s^2 \cos^2 \alpha}{2} \dots\dots (7)$$

$$M_s = -\frac{H \cdot b}{2} \cdot \cos \alpha - M_o \cdot \sin \alpha + W \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \cdot 1/2 \left\{ (b_1 + b/2) - b \right\} \sin \alpha \dots\dots (8)$$

$$M_t = -\frac{H \cdot b}{2} \cdot \sin \alpha + M_o \cdot \cos \alpha - W \left( \frac{b}{2} + b_1 \right) \cdot 1/2 \left\{ (b_1 + b/2) - b \right\} \cos \alpha \dots\dots (9)$$

donde  $w$  y  $W$  son las cargas por unidad de longitud de los tramos de escaleras y el descanso respectivamente.

Utilizando el método de la Energía de formación y considerando que  $\frac{\partial U}{\partial H} = 0$  y  $\frac{\partial U}{\partial M_o} = 0$  se determinan 2 ecuaciones con 2 incógnitas ( $H$  y  $M_o$ ).

Al conocerse los valores de  $H$  y  $M_o$ , se pueden determinar los momentos y cortantes y empujes para los diferentes miembros de la estructura.

Planteamiento de las diferenciaciones

$$\frac{\partial U}{\partial H} = \int_0^{b/2} \frac{M_s}{EI_1'} \cdot \frac{\partial M_s}{\partial H} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_r}{EI_2} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial H} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_s}{EI_2'} \cdot \frac{\partial M_s}{\partial H} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_t}{GJ_2} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial H} \cdot ds$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial M_o} = \int_0^{b/2} \frac{M_r}{EI_1} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial M_o} \cdot dy + \int_0^a \frac{M_s}{EI_2'} \cdot \frac{\partial M_s}{\partial M_o} \cdot ds + \int_0^a \frac{M_t}{GJ_2} \cdot \frac{\partial M_t}{\partial M_o} \cdot ds = 0$$

donde:

$I_1, I_1'$  = momento de inercia del área de la sección del descanso alrededor de un eje horizontal y vertical respectivamente

$I_2, I_2'$  = momento de inercia del área de la sección del tramo de escaleras alrededor de un eje horizontal y vertical respectivamente

$J_1, J_2$  = momentos polares del descanso y del tramo de escalera respectivamente.

A.R. Cusens y Jing-Gwo Kuang, llevaron a cabo un estudio experimental con el objeto de comparar los distintos métodos de análisis de las escaleras de apoyo libre y comprobar su ajuste a la realidad.

El prototipo de la escalera fue analizado por los métodos de Siev (incluyendo los esfuerzos torsionales), Sauter y Cusens-Kuang.

Se comprobó que existe poca diferencia entre los resultados obtenidos por el método de Siev y el de Cusens-Kuang, para el caso tratado. La estructura fue diseñada con base en los resultados del método de Siev.

Los resultados obtenidos por el método de Sauter discrepan de los obtenidos por los métodos de Siev y Cusens-Kuang.

El modelo utilizado para el experimento era una escalera a media escala del prototipo. Para mayor información acerca del diseño y construcción del modelo, se refiere al lector a la ref. No. 8.

De los resultados obtenidos del experimento a la ruptura de la escalera podemos concluir lo siguiente:

Se trazaron perfiles de desplazamientos de las partes de la escalera, mostrando claramente el comportamiento estructural de la misma bajo carga. Se muestra una interesante isométrica de la estructura deflectada bajo las cargas de diseño.

Los resultados de las deformaciones determinadas en el experimento se acercan razonablemente a los valores calculados por el método presentado por Cusens-Kuang. Mientras que discrepan de los obtenidos mediante el método de Siev.

Para el diseño se consideró la escalera como perfectamente empotrada. En la práctica, a pesar de que se intentó empotrar sus extremos, se determinaron desplazamientos horizontales en ambas direcciones, en el apoyo superior. Para valores altos de cargas ocurrieron en el apoyo superior desplazamientos horizontales en dirección del tramo inferior.

En general las deformaciones fueron menores que las calculadas. El efecto probable introducido por los desplazamientos del apoyo superior en el comportamiento de la estructura consistió en incrementar las deflexiones en la línea de intersección de los tramos con el descanso. Introdujeron también momentos negativos en el tramo superior y momentos torsionales y transversales en el descanso, afectando así los momentos flectores en el centro de los tramos de las escaleras.

La falla de la estructura se inició por combinación de flexión y torsión, llamando así la atención a la dificultad que existe en diseñar y proporcionar refuerzo para resistir torsión y flexión en secciones tan poco peraltadas como las usadas en las escaleras.

Las primeras fallas aparecieron bajo cargas un poco bajas (2.05 veces las cargas del diseño), lo cual se atribuye parcialmente a los desplazamientos del soporte del tramo superior.

A pesar de que las primeras fisuras aparecieron en los tramos de las escaleras, el colapso de la escalera ocurrió en el descanso, que falló como un voladizo.

El factor de carga encontrado fue de 6.48, pero el autor aconseja disminuir el ancho del descanso lo más posible. La forma de las fisuras transversales que aparecieron en el descanso demuestran en forma aproximada que la hipótesis de considerar como efectiva la mitad del ancho del descanso como parte del marco rígido es conveniente.

San recomendables los métodos de Siev y de Cusens-Kuang para el diseño de escaleras de apoyo libre.

Para el caso estudiado el método de Cusens-Kuang da resultados más aproximados que los del método de Siev para los efectos en la intersección de los tramos de escaleras con el descanso.

A causa de que se presentan momentos torsionales altos en los tramos de escaleras, es necesario proporcionar una sección adecuada de concreto para absorber los momentos torsionales.

El autor del artículo, sugiere un límite máximo para el desplazamiento horizontal igual  $a = (a + c)/5000$ , ver figura No. 12; se trata de evitar los desplazamientos horizontales grandes, pues producen una sensación de inseguridad en el usuario.

Se considera que las concentraciones de refuerzo cerca de la línea de intersección, de los tramos de escaleras con el descanso ayudarán a controlar las fisuras en dicha zona, aumentando también la rigidez y reduciendo los efectos torsionales en los tramos de escaleras.

### 3.3 Miembros curvos planos

#### Vigas curvas:

El uso de vigas curvas en un plano horizontal como elementos estructurales se ha intensificado últimamente, tanto en el campo arquitectónico para edificios, así como en puentes de planta curva plana.

Tales miembros en su mayoría son parte de una estructura, siendo continuos con otros miembros y monolíticos con columnas en el caso de edificios. O bien continuos pero no monolíticos con sus apoyos en el caso de los puentes continuos.

Las vigas curvas se usan en edificios de planta curva y en edificios de planta rectangular como ochavos curvos en las esquinas para poder evitar la columna esquinera.

En cuanto al análisis de una viga curva, este difiere del análisis ordinario de miembros rectos, a causa de los momentos torsionales que son inducidos por las cargas verticales aunque éstas coincidan con el eje longitudinal del miembro.

Por consiguiente, en el diseño de miembros curvos se deben considerar momentos de flexión, de torsión y cortante transversal.

El análisis de una estructura que comprenda miembros curvos, se puede llevar a cabo por cualquier método de distribución de momentos, una vez se conozcan los momentos de empotramiento del miembro curvo, sus coeficientes de transmisión de flexión y torsión, sus rigideces de flexión y torsión, y los coeficientes de relación entre los momentos flectores y torsionales del miembro.

Los métodos que se han usado para el análisis de vigas curvas horizontales, varían desde el uso del método de pendiente-deflexión, hasta el método de la energía de deformación, siendo este último tal vez el más usado. Por medio del método de la energía de deformación es posible analizar cualquier viga de curvatura horizontal, aunque ésta no sea circular, a condición de que su curvatura sea matemáticamente definible.

Es el interés de esta sección del trabajo presentar un bosquejo de la forma cómo se analizan las vigas curvas.

Existen una gama de artículos referentes al análisis de vigas curvas horizontales, sujetas a distintos tipos de cargas, entre los cuales se encuentran los descritos en las referencias Nos. 1, 2, 9, 10, 11 y 12.

De estos artículos, he escogido tres de ellos para referirme un poco al contenido de los mismos. El resto son menos importantes, ya que consideran el problema desde el punto de vista de un miembro independiente de la estructura y además como un elemento perfectamente simétrico en carga, caso que no siempre es común en la realidad.

El basarse en una viga curva perfectamente simétrica tanto la disposición de sus cargas como en su geometría y propiedades, elimina dos de las redundantes del problema, ya que al analizar la sección central de la viga, el momento torsional es nulo y el valor del cortante transversal es fácilmente determinable.

Para el análisis de cargas sobre una viga curva utilizaremos el artículo "Circular Curved Beams Transversally Loaded", de Panayiotis Spyropoulos; el autor del artículo considera la viga cargada asimétricamente y empotrada en sus extremos, constituyendo así un sistema estáticamente indeterminado en tercer grado. Del análisis mostrado se determinan los valores de las tres redundantes que actúan en el centro de la viga, valores necesarios para determinar los momentos de empotramiento de la viga, los cuales se usarán para el análisis de continuidad de la estructura.

NOTA: todos los artículos considerados incurren en el mismo error, al considerar los valores de los momentos de inercia ( $I, J$ ) por medio de las fórmulas deducidas específicamente para miembros rectos. Para mayor información acerca del error probable que esta omisión acarrea, el autor del presente trabajo refiere al lector al libro de S. Timoshenko en el No. 7 de la bibliografía.

A causa de lo complicado y laborioso que resulta el diseñar una viga curva, el autor del artículo en mención ha elaborado tablas de coeficientes para la resolución de las redundantes. Estas tablas están dadas para valores de la relación altura/ancho ( $d/b$ ) y desplazamiento angular de la viga, proporcionando valores de coeficientes para el caso de cargas concentradas situadas a intervalos de 15 grados a partir del centro de la viga, y valores de coeficientes para el caso de carga uniformemente distribuida.

Las tablas de coeficientes se muestran en el presente trabajo, y a pesar de no incluir muchos tipos de carga, ni datos para carga concentradas a menores intervalos angulares, son de gran ayuda para el diseño.

Para la determinación de los coeficientes de transmisión, determinación de las rigideces de la viga y los coeficientes de relación entre momentos flectores y torsionales, utilizaremos el artículo "Analysis of Continuous Circular Curved Beams", de Becla Velutini. Lo interesante del artículo citado estriba en que considera la viga como parte de un conjunto de elementos de una estructura, y desarrolla las ecuaciones necesarias para determinar los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de continuidad con el resto de la estructura.

Al igual que el artículo mencionado anteriormente, y por la complejidad de los cálculos a realizar para determinar los valores de los coeficientes, el autor del mismo ha elaborado tablas con dichos valores basadas en las propiedades geométricas de la sección y en el ángulo subtendido por la viga curva. En la misma forma el autor del mencionado artículo analiza el caso de una viga curva cargada uniformemente, pero desde el punto de vista de considerar los momentos de empotramiento como las redundantes del sistema.

Ha elaborado una tabla con coeficientes para determinar los valores de los momentos de empotramiento para cargas uniformes, tabla que proporciona mayores ventajas que la presentada por Spyropoulos, ya que da directamente los momentos de empotramiento necesarios para el análisis de continuidad.

NOTA: aunque estos artículos no consideran la excentricidad de cargas en la viga respecto a su línea central, es necesario tomarla en cuenta. Si la viga es monolítica con la losa, ésta le transmite torsión a la viga.

La curvatura de la viga produce excentricidad de cargas respecto a la línea central, aún cuando la carga se encuentre uniformemente distribuida. Su valor está dado por la siguiente expresión:

$$e = \frac{b^2}{12R}$$

donde  $b$  es el ancho de la viga y  $R$  es el radio de curvatura.

Del tercer artículo seleccionado "Simplified Method for the Analysis of Torsional Moment as an Effect of a Horizontally Curved Multispan Continuous Bridge" de A. A. Wittecki (ref. 6), se consideran particularmente interesantes los aspectos siguientes:

El autor considera dentro del análisis de cargas de la viga, la excentricidad de las cargas, la cual produce un momento de torsión uniformemente distribuido a lo largo de la viga. Este aspecto generalmente olvidado por los autores de los artículos anteriores es importante, ya que no solamente se presenta en puentes sino que también en las vigas curvas de los edificios.

Otro aspecto importante del artículo en cuestión es que el autor saca en conclusión que para el caso del diseño de puentes en carreteras (donde las curvaturas no pasan de 20 grados), los efectos de la torsión en los valores del momento de flexión son muy pequeños y pueden ser despreciados. Por lo tanto él recomienda que la determinación de los momentos de flexión se lleve a cabo considerando la viga curva como un miembro recto de longitud equivalente a la de la curva.

Presenta el autor una receta para la determinación del valor de los momentos torsionales en la viga, así como un ejemplo de aplicación para un puente de tres tramos continuos.

El autor introdujo un aspecto ilustrativo de la forma de determinar el diagrama de los momentos de torsión, al considerar que únicamente los apoyos exteriores del puente restringían los momentos torsionales.

## Análisis de vigas curvas planas

Carga concentrada en cualquier posición vertical

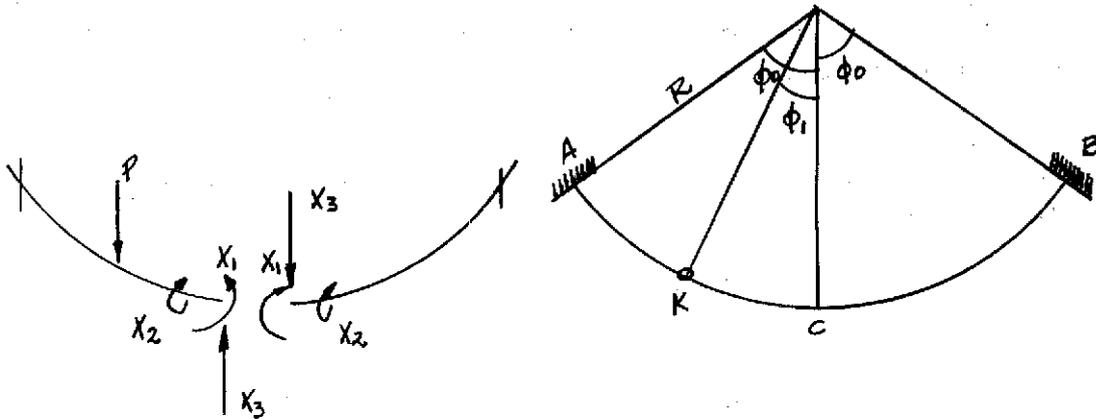


Figura No. 13 Viga circular horizontal, sujeta a una carga vertical concentrada  $P$  en cualquier punto  $K$ .  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  son respectivamente el momento flector, el momento torsional y la fuerza cortante en el punto medio.

Consideremos la viga circular mostrada con ángulo central  $2\phi_0$ , sujeta a una carga concentrada  $P$  a un ángulo  $\phi$ , del centro de la viga.

En el punto  $C$  tenemos:

- $X_1$  = Momento de flexión, considerado positivo cuando produce tensión en la fibra inferior
- $X_2$  = Momento torsional, considerado positivo actuando en dirección contra el reloj
- $X_3$  = Fuerza vertical, considerada positiva cuando actúa hacia arriba en la parte cargada de la viga y hacia abajo en la parte no cargada de la viga.

En la figura estos valores se muestran positivos.

Determinación de los momentos flectores y torsionales para las partes  $AC$  y  $CB$  de la viga. Para la parte  $CB$  de la viga, en una sección donde  $0 \leq \phi \leq \phi_0$

$$M_f = X_1 \cdot \cos \phi + X_2 \cdot \sin \phi - X_3 \cdot R \cdot \sin \phi \quad (1)$$

$$M_t = -X_1 \cdot \sin \phi + X_2 \cdot \cos \phi + X_3 \cdot R (1 - \cos \phi) \quad (2)$$

donde:

$M_f$  = Momento de flexión

$M_t$  = Momento torsional.

Para la parte CA en la sección CK donde  $0 \leq \theta \leq \phi_1$

$$M_f = X_1 \cdot \cos \theta - X_2 \cdot \sin \theta + X_3 \cdot R \sin \theta \quad (3)$$

y

$$M_t = X_1 \cdot \sin \theta + X_2 \cdot \cos \theta + X_3 \cdot R (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

Para la parte CA en la sección KA donde  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$

$$M_f = X_1 \cdot \cos \theta - X_2 \cdot \sin \theta + X_3 \cdot R \cdot \sin \theta - P \cdot R \sin (\theta - \theta_1) \quad (5)$$

y

$$M_t = X_1 \cdot \sin \theta + X_2 \cdot \cos \theta + X_3 \cdot R (1 - \cos \theta) - P \cdot R \cdot [1 - \cos (\theta - \theta_1)] \quad (6)$$

Para calcular los valores de las redundantes  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  haremos uso del Teorema de Castigliano. El teorema establece que la distribución de fuerzas internas en una viga es tal que su trabajo es un mínimo.

El valor de este trabajo se representa por:

$$U = \int \frac{(M_f)^2}{2EI} \cdot R \cdot d\theta + \int \frac{(M_t)^2}{2GJ_t} \cdot R \cdot d\theta \quad (7)$$

La integración se determina a todo lo largo de la viga.

Donde:

$I$  = Momento de inercia de la sección transversal del miembro.

$J_t$  = Momento polar de inercia de la sección transversal del miembro.

$E$  = Módulo de elasticidad en tensión o compresión.

$G$  = Módulo de rigidez.

Al diferenciar la ecuación 7, con respecto a  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  e igualarlos a cero las ecuaciones, el trabajo  $U$  se vuelve un mínimo.

Por lo tanto

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0 \quad (7a)$$

o sea

$$\int \frac{M_f}{EI} \frac{dM_f}{dX_i} \cdot R \cdot d\theta + \int \frac{M_t}{GJ_t} \frac{dM_t}{dX_i} \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (8)$$

donde  $i = 1, 2$  y  $3$

de esta ecuación se determinan 3 ecuaciones de primer grado de las cuales se obtienen los valores de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ .

A causa de lo complicado y tedioso que significa resolver este tipo de problemas utilizando las fórmulas derivadas de la ecuación No. 8, Spyropoulos elaboró tablas de coeficientes para determinar los valores de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ .

Estas tablas proporcionan los coeficientes para diversos valores de: relaciones de  $d/b$ , ángulo central de la viga y para diferentes intervalos angulares donde actúa la carga.

La forma de determinar los valores de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  con base en estos coeficientes es la siguiente:

Momento flexionante:

$$X_1 = K_1 \cdot P \cdot R$$

Momento torsional:

$$X_2 = K_2 \cdot PR$$

Fuerza cortante:

$$X_3 = K_3 \cdot P$$

Los esfuerzos en cualquier otra sección se pueden determinar por medio de las ecuaciones del No. 1 al No. 6, una vez determinados los valores de  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ .

Las tablas que se incluyen fueron tomadas del artículo de Panayiotis J. Spyropoulos.

TABLA No.3 - COEFICIENTES DE  $X_1$ ,  $X_2$ , y  $X_3$  PARA VARIAS RELACIONES DE  $d/b$  Y ANGULOS CENTRALES DE LAS VIGAS SUJETAS A CARGAS CONCENTRADAS A INTERVALOS DE 15 GRADOS

Angular span $2\phi_0 = 60$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 0$ deg						
$K_1$	0.1270	0.1258	0.1235	0.1210	0.1187	0.1150
$\phi_1 = 15$ deg						
$K_1$	0.0304	0.0294	0.0282	0.0270	0.0258	0.0236
$K_2$	0.106	0.039	0.083	0.076	0.074	0.0736
$K_3$	0.197	0.163	0.120	0.098	0.049	-0.022
Angular span $2\phi_0 = 90$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 0$ deg						
$K_1$	0.191	0.1805	0.1765	0.1724	0.1690	0.1636
$\phi_1 = 15$ deg						
$K_1$	0.074	0.067	0.060	0.054	0.049	0.042
$K_2$	0.130	0.119	0.112	0.108	0.108	0.113
$K_3$	0.307	0.252	0.209	0.157	0.108	0.010
Angular span $2\phi_0 = 90$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 30$ deg						
$K_1$	0.038	0.034	0.030	0.027	0.024	0.015
$K_2$	0.054	0.053	0.0495	0.048	0.048	0.0505
$K_3$	0.095	0.069	0.050	0.027	0.003	-0.044
Angular span $2\phi_0 = 120$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 0$ deg						
$K_1$	0.236	0.230	0.225	0.221	0.217	0.212
$\phi_1 = 15$ deg						
$K_1$	0.123	0.118	0.113	0.109	0.106	0.102
$K_2$	0.161	0.139	0.131	0.130	0.132	0.141
$K_3$	0.376	0.323	0.276	0.232	0.191	0.115
$\phi_1 = 30$ deg						
$K_1$	0.048	0.045	0.042	0.040	0.038	0.035
$K_2$	0.099	0.097	0.100	0.106	0.113	0.1265
$K_3$	0.187	0.152	0.114	0.073	0.034	-0.041
$\phi_1 = 45$ deg						
$K_1$	0.010	0.009	0.008	0.007	0.0065	0.0055
$K_2$	0.038	0.033	0.031	0.031	0.032	0.034
$K_3$	0.054	0.040	0.028	0.016	0.005	-0.015

TABLA No. 3 - COEFICIENTES DE  $X_1$ ,  $X_2$  Y  $X_3$  PARA VARIAS RELACIONES DE  $d/b$  Y ANGULOS CENTRALES DE LAS VIGAS SUJETAS A CARGAS CONCENTRADAS A INTERVALOS DE 15 GRADOS

Angular span $2\phi_0 = 150$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 0$						
$K_1$	0.281	0.276	0.272	0.269	0.267	0.264
$\phi_1 = 15$ deg						
$K_1$	0.164	0.160	0.156	0.153	0.152	0.149
$K_2$	0.177	0.156	0.1505	0.152	0.152	0.166
$K_3$	0.418	0.377	0.320	0.282	0.250	0.196
$\phi_1 = 30$ deg						
$K_1$	0.081	0.077	0.075	0.073	0.071	0.0695
$K_2$	0.108	0.094	0.091	0.092	0.093	0.103
$K_3$	0.252	0.215	0.184	0.157	0.134	0.096
$\phi_1 = 45$ deg						
$K_1$	0.028	0.025	0.025	0.024	0.023	0.022
$K_2$	0.056	0.049	0.048	0.049	0.050	0.056
$K_3$	0.116	0.095	0.077	0.061	0.047	0.023
$\phi_1 = 60$ deg						
$K_1$	0.005	0.0044	0.004	0.0035	0.003	0.003
$K_2$	0.020	0.018	0.0175	0.018	0.0185	0.021
$K_3$	0.032	0.024	0.017	0.012	0.006	-0.002
Angular span $2\phi_0 = 180$ deg						
$d/b$	1	1.5	2	2.5	3	4
$\phi_1 = 0$						
$K_1$	0.3183	0.3183	0.3183	0.3183	0.3183	0.3183
$\phi_1 = 15$ deg						
$K_1$	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$K_2$	0.193	0.175	0.169	0.171	0.175	0.184
$K_3$	0.454	0.406	0.369	0.325	0.315	0.280
$\phi_1 = 30$ deg						
$K_1$	0.109	0.109	0.109	0.109	0.109	0.109
$K_2$	0.120	0.108	0.105	0.108	0.112	0.120
$K_3$	0.300	0.264	0.234	0.202	0.195	0.164
$\phi_1 = 45$ deg						
$K_1$	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484
$K_2$	0.0645	0.058	0.0574	0.060	0.063	0.069
$K_3$	0.170	0.145	0.126	0.106	0.098	0.078
$\phi_1 = 60$ deg						
$K_1$	0.0153	0.0153	0.0153	0.0153	0.0153	0.0153
$K_2$	0.027	0.025	0.025	0.027	0.0285	0.032
$K_3$	0.074	0.062	0.052	0.042	0.037	0.027
$\phi_1 = 75$ deg						
$K_1$	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
$K_2$	0.006	0.006	0.006	0.007	0.007	0.008
$K_3$	0.018	0.014	0.012	0.009	0.007	0.004

Carga uniformemente distribuida a lo largo de la viga.

En este caso con carga simétrica y propiedades simétricas de la viga, las redundantes  $X_2$  y  $X_3$  se anulan, solamente el valor del momento flexión  $X_1$  hay que determinar.

La forma de analizar la estructura es similar a la descrita anteriormente para el caso de la carga concentrada.

Debido a lo complicado de aplicar las fórmulas obtenidas del análisis, Spyropoulos presenta tablas que proporcionan coeficientes para determinar el valor de los momentos  $M_f$  y  $M_t$ . Las tablas proporcionan coeficientes para diversos valores de: relación  $d/b$  y ángulo central de la viga.

La forma de determinar los valores de los momentos flexionales y torsionales con base en estos coeficientes es la siguiente:

$p$  = carga uniformemente distribuida

Momento de flexión máximo en el centro de la viga

$$M_f = v_1 \cdot p \cdot R^2$$

Momento de flexión mínimo en los apoyos A y B

$$M_f = v_2 \cdot p \cdot R^2$$

Momento de torsión mínimo en los apoyos A y B

$$M_t = v_3 \cdot p \cdot R^2$$

Momento de torsión máximo a un ángulo  $\theta_t$  del centro de la viga

$$M_t = v_4 \cdot p \cdot R^2$$

Las tablas proporcionan el valor de  $\theta_t$  para  $M_t$  máximo.

Las tablas que se incluyen fueron tomados del artículo de Panayiotis J. Spyropoulos.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central

TABLA No. 4 - COEFICIENTES PARA VARIAS RELACIONES DE  $d/b$  Y ANGULO CENTRAL DE LAS VIGAS SUJETAS A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

$\phi_0$ deg	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$\phi_1$ for maximum $M_1$ , deg-min
$\frac{d}{b} = 1$					
30	-0.0434	-0.0964	-0.0019	+0.0083	16-35
45	0.0920	-0.2278	-0.0132	0.0251	23-41
60	0.1507	-0.4247	-0.0507	0.0518	29-39
75	0.2134	-0.6840	-0.1370	0.0851	34-25
90	0.2733	-1.0000	-0.2975	0.1207	38-15
$\frac{d}{b} = 1.5$					
30	0.0424	-0.0973	-0.0024	+0.0080	16-14
45	0.0886	-0.2303	-0.0157	0.0240	23-16
60	0.1445	-0.4278	-0.0561	0.0487	29-06
75	0.2069	-0.6877	-0.1433	0.0814	34-03
90	0.2733	-1.000	-0.2975	0.1207	38-15
$\frac{d}{b} = 2$					
30	0.0412	-0.0983	-0.0030	+0.0077	16-11
45	0.0846	-0.2331	-0.0185	0.0224	22-47
60	0.1390	-0.4305	-0.0608	0.0460	28-37
75	0.2015	-0.6891	-0.1485	0.0784	33-40
90	0.2733	-1.000	-0.2975	0.1207	38-15
$\frac{d}{b} = 2.5$					
30	+0.0400	-0.0994	-0.0036	+0.0074	15-57
45	0.0814	-0.2353	-0.0207	0.0211	22-22
60	0.1336	-0.4332	-0.0655	0.0434	28-6
75	0.1961	-0.6904	-0.1537	0.0773	33-17
90	0.2733	-1.0000	-0.2975	0.1207	38-15
$\frac{d}{b} = 3$					
30	0.0388	-0.1004	-0.0042	+0.0071	15-42
45	+0.0785	-0.2374	-0.0228	+0.0200	22-0
60	0.1311	-0.4345	-0.0677	0.0423	27-45
75	0.1947	-0.6908	-0.1550	0.0748	33-10
90	0.2733	-1.000	-0.2975	0.1207	38-15
$\frac{d}{b} = 4$					
30	+0.0370	-0.1055	-0.0051	+0.0065	14-26
45	0.0705	-0.2713	-0.0567	0.0176	20-55
60	0.1254	-0.4373	-0.0726	0.0396	27-18
75	0.1907	-0.6918	-0.1589	0.0724	32-53
90	0.2733	-1.0000	-0.2975	0.1207	38-15

Determinación de las ecuaciones para el caso de una viga circular cargada uniformemente considerando como redundantes los momentos de empotramiento

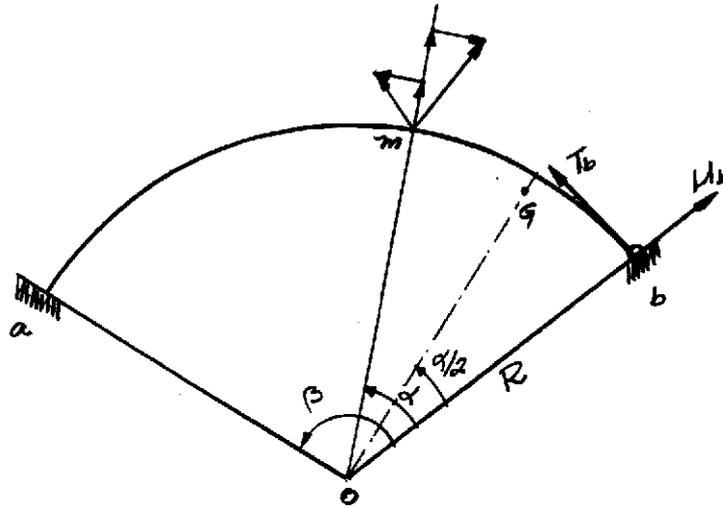


Figura No. 14. Viga curva en planta empotrada en ambos apoyos.

En el punto b, un momento de flexión  $M_b$ , un momento de torsión  $T_b$  y una fuerza vertical  $F_b$  actúan sobre la viga como se indica por los vectores.

Se consideran las fuerzas verticales como positivas cuando actúan hacia arriba.

$q$  = carga uniformemente distribuida

por simetría el valor de  $F_b$  es igual a  $= \frac{q \cdot R \cdot \beta}{2}$

La distancia  $OG$  del centro de curvatura al centro de gravedad del arco  $bm$  es

$$OG = \frac{R \cdot \text{sen } \alpha/2}{\alpha/2}$$

Momentos en un punto a  $R\alpha$  de b:

$$M_\alpha = M_b \cdot \cos \alpha + T_b \cdot \text{sen } \alpha - F_b \cdot R \cdot \text{sen } \alpha + q \cdot R \cdot \alpha \left( \frac{R \cdot \text{sen } \alpha/2}{\alpha/2} \right) \cdot \text{sen } \alpha/2 \quad (1)$$

y

$$T_\alpha = T_b \cdot \cos \alpha - M_b \cdot \text{sen } \alpha + F_b \cdot R (1 - \cos \alpha) - q \cdot R \cdot \alpha \left( R - \frac{R \cdot \text{sen } \alpha/2}{\alpha/2} \cdot \cos \alpha/2 \right) \quad (2)$$

La energía de formación debido a las fuerzas actuando en la viga (despreciando el corte vertical), es:

$$U = \int_0^\beta \frac{M_\alpha^2 \cdot R \cdot d\alpha}{2EI} + \int_0^\beta \frac{T_\alpha^2 \cdot R \cdot d\alpha}{2GJ} \quad (3)$$

La rotación  $w_b$  producida por el momento flexionante  $M_b$  en b es igual a cero (empotrado). Por el teorema de Castigliano tenemos:

$$w_b = \frac{\partial u}{\partial M_b} = 0$$

La rotación  $\theta_b$  producida por el momento torsional  $T_b$  en b es igual a cero (empotrado). Por el teorema de Castigliano tenemos:

$$\theta_b = \frac{\partial u}{\partial T_b} = 0$$

Llevando a cabo estas diferenciaciones se determinan 2 ecuaciones con 2 incógnitas, las que al resolverse determinan los valores de  $M_b$  y  $T_b$ .

Donde:

$$M_b = q \cdot R^2 \cdot C_m$$

y

$$T_b = q \cdot R^2 \cdot C_t$$

el valor de los coeficientes  $C_m$  y  $C_t$  se encuentran en la tabla No. 5, presentada por Becla Velutini y tomada de su artículo.

Los valores que influyen en  $C_m$  y  $C_t$  son:  $k$  y  $\beta$

donde:

$$k = \frac{EI}{GJ} = 0.671 \left( 1 + \frac{d^2}{b^2} \right)$$

$\beta$  = ángulo subtendido por la viga.

Si es necesario interpolar valores, debe trazarse gráficas con estos valores para poder obtener resultados exactos.

TABLA No. 5 - COEFICIENTES PARA MOMENTOS FIJOS PRODUCIDOS POR CARGA UNIFORME

	$\beta$	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$k = 1$	$C_m$	-0.02316	-0.09601	-0.22676	-0.42300	-0.66501	-1.00000
	$C_t$	-0.00007	-0.00169	-0.01216	-0.04782	-0.13346	-0.29756
$k = 2$	$C_m$	-0.02325	-0.09711	-0.23004	-0.42742	-0.66744	-1.00000
	$C_t$	-0.00011	-0.00233	-0.01544	-0.05547	-0.14253	-0.29756
$k = 3$	$C_m$	-0.02335	-0.10135	-0.23244	-0.43097	-0.66879	-1.00000
	$C_t$	-0.00014	-0.00478	-0.01784	-0.06162	-0.14755	-0.29756
$k = 4$	$C_m$	-0.02343	-0.09857	-0.23428	-0.43211	-0.66964	-1.00000
	$C_t$	-0.00017	-0.00336	-0.01968	-0.06360	-0.15073	-0.29756
$k = 10$	$C_m$	-0.02390	-0.10209	-0.23999	-0.43712	-0.69163	-1.00000
	$C_t$	-0.00034	-0.00523	-0.02539	-0.07227	-0.15617	-0.29756

determinación de los coeficientes de transmisión de flexión y torsión, de las rigideces de flexión y torsión, y los coeficientes de relación entre los momentos flectores y torsionales de una viga curva.

Consideremos la misma viga curva de la figura No. 14, pero tomando al apoyo " b " como sin restricciones de ninguna clase.

En una sección cualquiera a una distancia angular  $\alpha$  de b, los momentos de flexión  $M_\alpha$  y de torsión  $T_\alpha$  son iguales a:

$$M_\alpha = M_b \cdot \cos\alpha + T_b \cdot \sin\alpha - F_b \cdot R \sin\alpha$$

y

$$T_\alpha = -M_b \cdot \sin\alpha + T_b \cdot \cos\alpha + F_b \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha)$$

La energía de deformación producida por las fuerzas actuando en la viga (despreciando el efecto del corte vertical), es:

$$U = \int_0^\beta \frac{M_\alpha^2 \cdot R \cdot d\alpha}{2EI} + \int_0^\beta \frac{T_\alpha^2 \cdot R \cdot d\alpha}{2GJ}$$

Por el teorema de Castigliano tenemos que:

La rotación  $w_b$  en b producida por  $M_b$  es igual a:

$$w_b = \frac{\partial U}{\partial M_b}$$

La rotación  $\phi_b$  en b producida por  $T_b$  es igual a:

$$\phi_b = \frac{\partial U}{\partial T_b}$$

El desplazamiento vertical  $\Delta_b$  en b producido por  $F_b$  es igual a:

$$\Delta_b = \frac{\partial U}{\partial F_b}$$

diferenciando, se obtienen 3 ecuaciones y los valores de  $M_b$ ,  $T_b$  y  $F_b$  pueden determinarse para cualquier valor conocido de los desplazamientos y rotaciones en b.

Si el apoyo "a" se considera empotrado y "b" se considera restringido para las deformaciones por torsión y fuerza vertical ( $\phi_b = 0$  y  $\Delta_b = 0$ ), entonces para cualquier rotación  $w_b = 1$ , el valor de  $M_b$  obtenido será el coeficiente de rigidez por flexión de la viga,  $S_m$ .

En igual forma si se hace  $\Delta_b = 0$  y  $w_b = 0$  para cualquier rotación  $\phi_b = 1$ , el valor de  $T_b$  obtenido será el coeficiente de rigidez torsional de la viga,  $S_t$ .

Llevando a cabo estas substituciones en las 3 ecuaciones mencionadas anteriormente, se llega a los valores de los coeficientes:

$S_m$  = Coeficiente de rigidez por flexión de la viga.

$S_t$  = Coeficiente de rigidez por torsión de la viga.

$m, t_1$  = Coeficiente de relación del momento de torsión producido en el apoyo 1 al introducir un momento de flexión en el apoyo 1.

$t, m_1$  = Coeficiente de relación del momento de flexión producido en el apoyo 1 al introducir un momento de torsión en el apoyo 1.

$m, m_2$  = Coeficiente de relación del momento de flexión producido en el apoyo 2 al introducir un momento de flexión en el apoyo 1 = Coeficiente de transmisión por flexión.

$m, t_2$  = Coeficiente de relación del momento de torsión producido en el apoyo 2 al introducir un momento de flexión en el apoyo 1.

$t, m_2$  = Coeficiente de relación del momento de flexión producido en el apoyo 2 al introducir un momento de torsión en el apoyo 1.

$t, t_2$  = Coeficiente de relación del momento de torsión producido en el apoyo 2 al introducir un momento de torsión en el apoyo 1 = Coeficiente de transmisión por torsión.

El autor del artículo, Becla Velutini, elaboró tablas de los coeficientes de una viga curva, pues las fórmulas finales de los coeficientes son laboriosas y tediosas de aplicar.

La tabla de los coeficientes presentada en este trabajo se tomó del artículo de Becla Velutini.

Los datos que afectan los valores de los coeficientes son:  $k$  y  $\beta$

donde:

$$k = EI/GJ$$

$\beta$  = ángulo subtendido por la viga.

TABLA No. 6 - COEFICIENTES DE RIGIDEZ Y TRANSMISION  
PARA VIGAS CURVAS

	$\beta$	10°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
k = 1	$S_{11}$	22.86083	7.41104	3.42554	1.99862	1.25228	0.80802	0.53523
	$S_{12}$	5.79035	2.07669	1.27918	1.08037	0.99707	0.93085	0.85354
	$m_{11}$	0.04366	0.13088	0.25134	0.38898	0.50368	0.59847	0.63662
	$m_{12}$	-0.50225	-0.52031	-0.58184	-0.68148	-0.80936	-0.93667	-1.00000
	$m_{21}$	0.00012	0.00234	0.01991	0.07046	0.17648	0.36211	0.63662
	$t_{11}$	0.17238	0.46677	0.69978	0.71960	0.63637	0.51950	0.39921
	$t_{12}$	0.98494	0.87724	0.62582	0.41074	0.28170	0.23428	0.25414
	$t_{21}$	-0.00021	-0.00861	-0.03342	-0.13034	-0.22160	-0.31432	-0.39921
k = 2	$S_{11}$	22.83125	7.36013	3.32045	1.88369	1.14889	0.72190	0.46170
	$S_{12}$	2.92279	1.12266	0.78133	0.70820	0.66626	0.61785	0.55848
	$m_{11}$	0.04362	0.13033	0.25713	0.37716	0.49639	0.57766	0.63662
	$m_{12}$	-0.50317	-0.52559	-0.60297	-0.71400	-0.83933	-0.94954	-1.00000
	$m_{21}$	0.00015	0.00347	0.02789	0.09116	0.20500	0.38931	0.63662
	$t_{11}$	0.34072	0.85443	1.09272	1.00319	0.83873	0.67495	0.52330
	$t_{12}$	0.97028	0.77717	0.43755	0.23929	0.16879	0.14903	0.24006
	$t_{21}$	-0.00105	-0.02286	-0.11855	-0.24248	-0.35893	-0.44694	-0.52630
k = 3	$S_{11}$	22.81008	7.30222	3.22500	1.78679	1.06515	0.65348	0.40593
	$S_{12}$	1.96742	0.80228	0.60448	0.56164	0.52599	0.48162	0.42978
	$m_{11}$	0.04357	0.12977	0.25345	0.36820	0.47325	0.56604	0.63662
	$m_{12}$	-0.50396	-0.53299	-0.62137	-0.73867	-0.85873	-0.95671	-1.00000
	$m_{21}$	0.00017	0.00462	0.03483	0.10887	0.22857	0.40448	0.63662
	$t_{11}$	0.50515	1.18116	1.35210	1.17137	0.95834	0.76804	0.60130
	$t_{12}$	0.95601	0.69469	0.32864	0.16862	0.14176	0.18189	0.25936
	$t_{21}$	-0.00236	-0.04176	-0.18590	-0.33999	-0.46284	-0.54917	-0.60130
k = 4	$S_{11}$	22.78493	7.23254	3.13791	1.70278	0.90464	0.59733	0.36219
	$S_{12}$	1.48989	0.64000	0.50951	0.47692	0.44231	0.40030	0.35369
	$m_{11}$	0.04357	0.12925	0.25021	0.36117	0.46405	0.55862	0.63662
	$m_{12}$	-0.50478	-0.53877	-0.63758	-0.75802	-0.87232	-0.96130	-1.00000
	$m_{21}$	0.00024	0.00360	0.01953	0.11919	0.24291	0.41413	0.63662
	$t_{11}$	0.66825	1.44084	1.54099	1.29950	1.04281	0.83294	0.65191
	$t_{12}$	0.94202	0.62551	0.25597	0.13406	0.13920	0.19620	0.28002
	$t_{21}$	-0.00354	-0.06303	-0.25230	-0.42556	-0.54582	-0.61757	-0.65191
k = 10	$S_{11}$	22.66817	6.87742	2.73088	1.34019	0.71937	0.39532	0.21996
	$S_{12}$	0.63004	0.33880	0.30333	0.27616	0.24402	0.21089	0.17885
	$m_{11}$	0.04343	0.12647	0.23673	0.33830	0.43933	0.54113	0.63662
	$m_{12}$	-0.50652	-0.56939	-0.70507	-0.81295	-0.90882	-0.97211	-1.00000
	$m_{21}$	0.00032	0.01108	0.05645	0.15123	0.28139	0.43703	0.63662
	$t_{11}$	1.59234	2.36723	2.13124	1.65277	1.29512	1.01433	0.78294
	$t_{12}$	0.86488	0.37214	0.09528	0.12522	0.19354	0.27170	0.35282
	$t_{21}$	-0.01816	-0.22412	-0.56425	-0.77799	-0.82951	-0.81922	-0.78294

Si es necesario interpolar valores, debe trazarse gráficas con estos valores para poder obtener resultados exactos.

Como existen 2 juegos de coeficientes de distribución y transmisión, uno para flexión y otro para torsión, se hace necesario tener una convención de signos que pueda ser aplicada a los extremos de cada viga.

Los momentos de flexión se consideran positivos cuando, al mirar hacia afuera del centro de curvatura, producen una rotación en el sentido del reloj en la sección.

Los momentos torsionales se consideran positivos cuando, al mirar a lo largo de la tangente de la viga en un sentido contrario al reloj, producen una rotación en sentido del reloj en la sección.

Se consideran como positivas las fuerzas verticales cuando estén dirigidas hacia arriba.

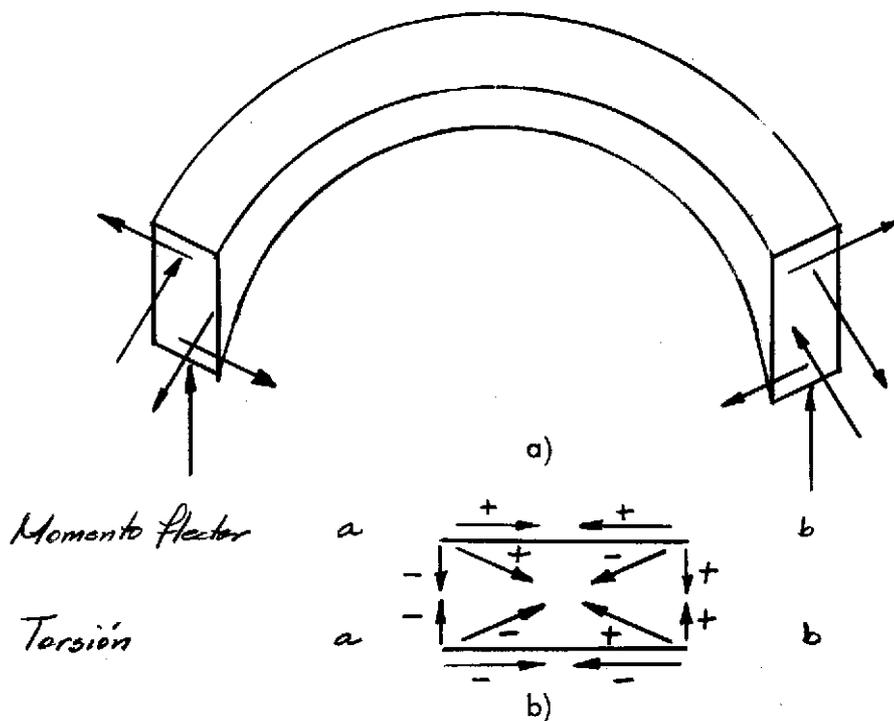
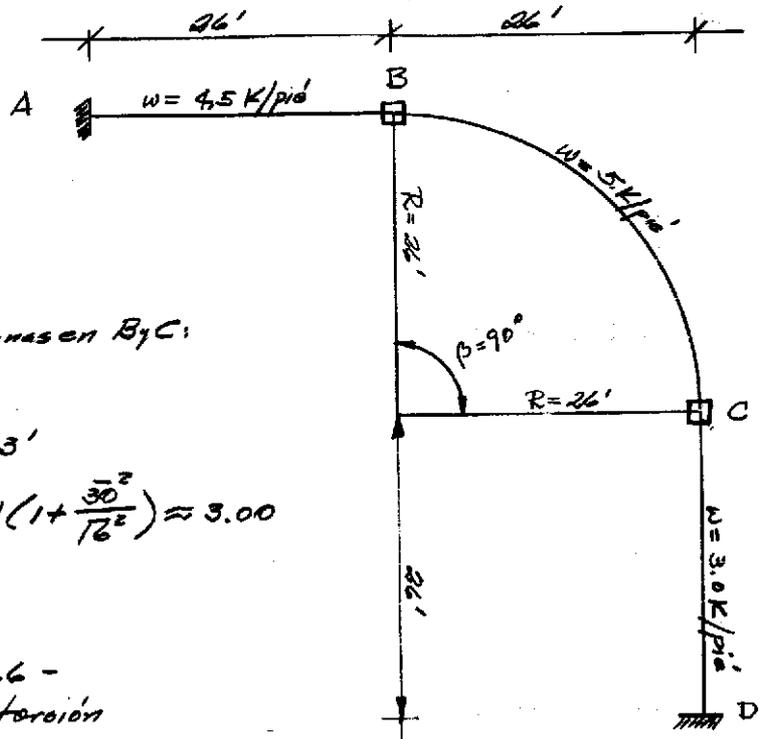


Figura No. 15: a) Convención de signos para aplicar a los extremos de las vigas curvas.  
b) Signos para aplicar los coeficientes de transmisión.

Ejemplo de aplicación: Viga curva continua con elementos rectos de un edificio

Consideremos la viga curva y los elementos rectos mostrados en la figura. Se considerará a la viga continua en los apoyos B y C (columnas) y empotrada en los apoyos A y D. Se muestran las cargas actuando en las vigas y los datos geométricos de la estructura.



Sección transversal de las vigas:

$$b = 16''$$

$$d = 30''$$

Sección transversal de las columnas en B y C:

$$b = d = 20''$$

Longitud de las columnas  $h = 13'$

$$\therefore k_c = 0.671 \left(1 + \frac{d^2}{b^2}\right) = 0.671 \left(1 + \frac{30^2}{16^2}\right) \approx 3.00$$

$$\beta = 90^\circ$$

Utilizando las tablas No. 5 y No. 6 -

flexión

torsión

$$C_m = -0.23344$$

$$S_m = 1.78679$$

$$m_1 t_1 = 0.36820$$

$$m_2 = -0.73867$$

$$m_1 t_2 = 0.10687$$

$$C_t = -0.01784$$

$$S_t = 0.56164$$

$$t_1 m_1 = 1.17137$$

$$t_2 = 0.16862$$

$$t_1 m_2 = -0.33999$$

Valores de Momentos, Rigideces y Coeficientes:

$$M_{BC} = -M_{CB} = q \cdot R^2 \cdot C_m = -(5.0)(26)^2(0.23344) = 786 \text{ Kpie}'$$

$$T_{BC} = T_{CB} = q \cdot R^2 \cdot C_t = -(5.0)(26)^2(0.01784) = -60 \text{ Kpie}'$$

$$M_{AB} = -M_{BA} = w l^2 / 12 = (4.5)(26)^2 / 12 = 254.0 \text{ Kpie}'$$

$$M_{CD} = -M_{DC} = w l^2 / 12 = (3.0)(26)^2 / 12 = 169.0 \text{ Kpie}'$$

Rigideces en flexión

$$I_{\text{vigas rectas}} = (1/12)(b)(h^3) = 36000 \text{ pulg.}^4$$

$$I_{\text{columnas}} = (1/12)(h^3) = 13333 \text{ pulg.}^4$$

$$\text{Rigidez vigas rectas} = K_v = \frac{4EI}{L} = 462 E$$

$$\text{Rigidez columnas} = K_{\text{col.}} = \frac{4EI}{L} = 342 E$$

$$\text{Rigidez viga curva} = K_{pc} = 5 \sin \frac{EI}{R} = 206 E$$

Σ Rigideces en flexión

$$\Sigma K_f = 462 + 342 + 206 = 1010 \text{ Kin}$$

Rigideces en torsión

$$\text{Rigidez vigas rectas } K_{T_v} = (36^3) dG/L = 36 E$$

$$\rho = 0.222$$

$$\text{Rigidez columna (flexión)} = 342 E$$

$$\text{Rigidez viga curva} = K_{pc} = 5 \rho \frac{EI}{R} = 65 E$$

Σ Rigideces en torsión

$$\Sigma K_t = 65 + 342 + 36 = 443 \text{ Kin}$$

distribución de momentos para flexión:

La distribución de momentos se lleva a cabo como si se tratara de vigas rectas, pero se separa el valor de las correcciones por rotación. Estas correcciones por rotación en los momentos flexionales sirven para determinar su efecto en los momentos torsionales.

Los valores producidos de momento torsional por los cambios en el momento flector se suman a los valores fijos determinados previamente antes de distribuir los momentos torsionales.

Factores de distribución por flexión:

$$\text{vigas rectas} = 462/1010 = 0.46$$

$$\text{columnas} = 342/1010 = 0.34$$

$$\text{vigas curvas} = 206/1010 = 0.20$$

$$\Sigma = 1.00$$

Factores de distribución por torsión:

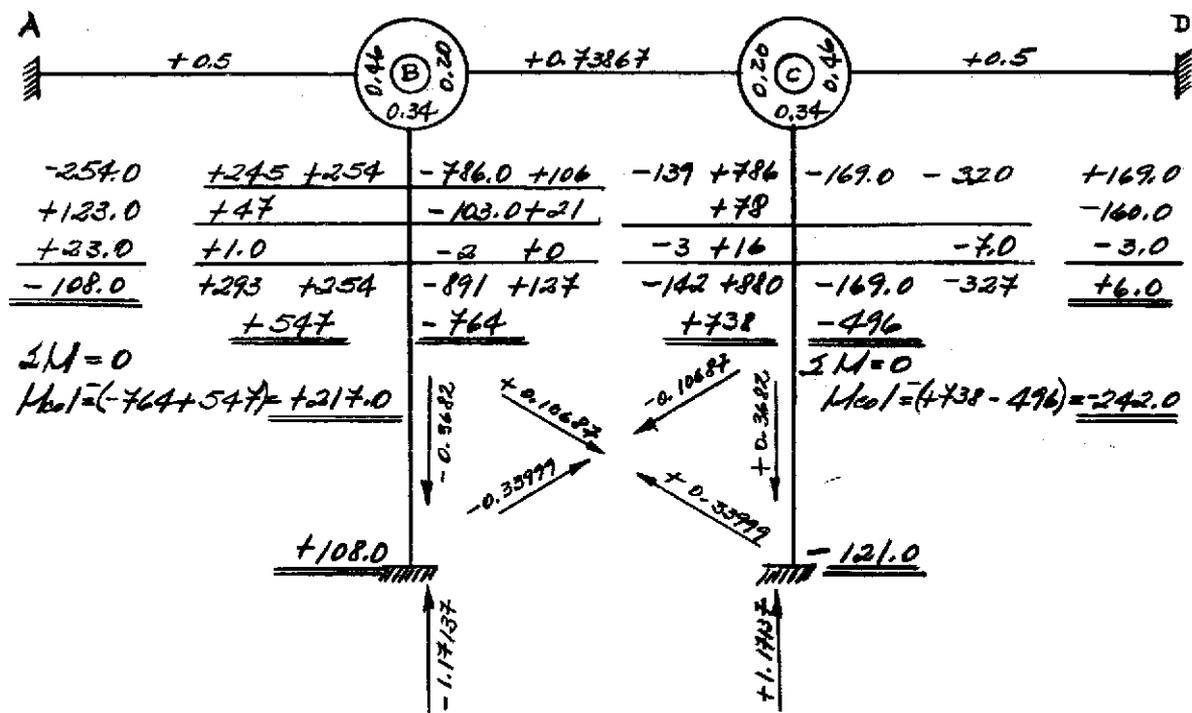
$$\text{viga rectas} = 36/443 = 0.08$$

$$\text{columnas} = 342/443 = 0.77$$

$$\text{viga curva} = 65/443 = 0.15$$

$$\Sigma = 1.00$$

distribución de momentos para flexión



Torque producido en extremo B por cambio de momento de flexión en B.

$$T_B = 127(-0.3682) = -47 \text{ Kpie'}$$

Torque producido en extremo C por cambio de momento flector en B.

$$T_C = 127(0.10687) = 14.0 \text{ Kpie'}$$

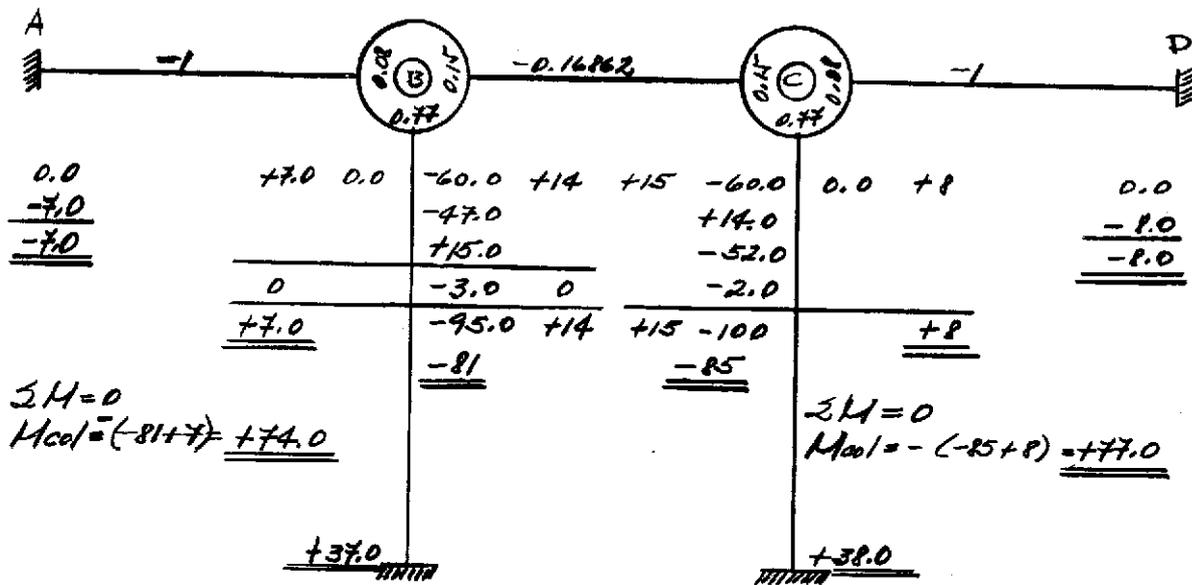
Torque producido en extremo C por cambio de momento flector en C.

$$T_C = -142(+0.3682) = -52.0 \text{ Kpie'}$$

Torque producido en extremo B por cambio de momento flector en C.

$$T_B = -142(-0.10687) = +15 \text{ Kpie'}$$

distribución de momento para torsión:



Los cambios en los valores del momento torsional a causa del giro, producen cambios en los valores de momentos flexionales en el mismo extremo como en el opuesto. Su valor se determina en igual forma como se determinaron los cambios en los momentos torsionales debido a los cambios en momentos de flexión.

Se muestran los coeficientes de relación y sus respectivos signos.

Para este caso en particular los momentos flexionales producidos por los cambios en los valores de torsión son pequeños comparados con los momentos de flexión.

Si ameritara calcular dichos valores de flexión se tendría que llevar a cabo otra distribución de momentos de flexión y se volvería a proceder en la misma forma.

Los resultados finales se determinan al sumar algebraicamente los resultados parciales.

Los esfuerzos en la viga curva se determinan al sustituir estos valores en las ecuaciones Nos. 192.

### 3.4 Sistemas Curvos en el Espacio

#### Escaleras Helicoidales

De los varios estudios sobre el análisis y diseño de las escaleras helicoidales, existen cuatro que se compararán y discutirán en esta sección. Únicamente se tratará el caso más común de la escalera helicoidal cuya proyección en planta es una viga circular sujeta a cargas uniformemente distribuidas.

Los estudios consultados acerca de este problema, se encuentran en las referencias Nos. 13, 14, 15 y 16, los cuales se refieren a escaleras empotradas en sus extremos.

Los métodos de Morgan, Holmes y Scordelis, se basan en el análisis del eje elástico longitudinal de la viga helicoidal, considerando a ésta como una estructura tridimensional indeterminada al sexto grado. Al hacer uso de la simetría dada por la carga uniformemente distribuida y seleccionando la sección para analizar en el punto medio, las redundantes se vuelven cero con excepción de dos. Las dos redundantes que no se anulan, son la fuerza horizontal en la dirección radial ( $X_x$ ), y el momento flector que actúa en un plano tangencial en dicho punto ( $X_r$ ), ver página No. 69 y 70.

Holmes en su análisis (ref. 18), presupone que las resultantes de las cargas actúan a lo largo de la línea central de las escaleras, es decir a lo largo de la hélice.

Utiliza el teorema de Castigliano para deducir las expresiones de los desplazamientos en la sección del centro de la escalera, los cuales son igualados a cero y determinados los valores de las redundantes.

La teoría presentada por Morgan (ref. 19), difiere ligeramente de la de Holmes en lo siguiente: Morgan considera que las cargas sobre la escalera actúan a lo largo de una paralela pero no coincidente con la línea central de la escalera.

Morgan presupone que las cargas se encuentran distribuidas a lo largo de esta línea, pero que las fuerzas en cualquier sección actúan en un punto que se encuentra entre las dos líneas pero nunca coincidiendo con alguna de las dos. Esto introduce una excentricidad de carga con respecto a la línea central de las escaleras. Su utilizan ecuaciones de energía de deformación para determinar los desplazamientos en la dirección de las redundantes; al igualar los desplazamientos a cero son determinadas las redundantes.

Scordelis en su método presupone que la línea central de cargas coincide con la línea central de la viga, pero que el centro de gravedad de las fuerzas actuando en cada sección individual no coincide con la misma línea.

Sin embargo, Scordelis determina que se debe considerar la excentricidad de la línea central de las cargas respecto a la línea central de la helicoide, cuando la relación del ancho de las escaleras (o de la viga helicoidal), al radio de la línea central es mayor

que un tercio. Esto hace que los métodos de Morgan y Scordelis sean parecidos.

Bergman, hace un análisis aproximado en el cual reduce el problema al de una viga circular horizontal (proyectando la helicoidal), cayendo así en el error fundamental de no considerar la resistencia estructural inherente de la viga helicoidal. Se refiere al lector a la Ref. No. 22, donde se trata de dicha resistencia inherente.

El análisis por el método de Bergman utiliza menos cálculos por la eliminación de la tercera dimensión. Sin embargo, se ha demostrado que el método es extremadamente conservador comparado con los anteriores.

El artículo presentado por Scordelis, "Internal Forces in Uniformly Loaded Helicoidal Girders", Ref. 15, tiene especial interés, ya que no solamente presenta la teoría del caso, sino presenta además tabulaciones de los valores de las redundantes en la sección media; estas tabulaciones se elaboraron para 510 diferentes casos, siendo las variantes: el ángulo horizontal, el ángulo de pendiente y las relaciones ancho - profundidad de las secciones. Con los valores determinados en esta tabulación, Scordelis trazó gráficas con el objeto de analizar la forma cómo los valores de las redundantes se ven afectados por los cambios de valores del ángulo horizontal subtendido, la pendiente y la relación de ancho - profundidad de la viga.

Se analizaron casos donde el ángulo horizontal se varió desde 30 hasta 360 grados. Cinco valores para la pendiente se usaron, desde 0 grados (representando el caso de una viga horizontal) hasta 40 grados. Seis valores de  $b/h$  son incluidos, desde 0.5 hasta 16.

Por medio de la interpolación de los valores de las redundantes, se puede llegar a los valores necesarios para casi todos los casos comunes de diseño.

De las gráficas presentadas, se puede sacar las siguientes conclusiones importantes:

En cuanto a los valores del ángulo horizontal se puede apreciar que entre los 150 y los 270 grados se presenta un rápido cambio en los valores de  $X_r$  (momento actuando alrededor del eje radial "X"). El efecto que la pendiente tiene sobre los valores de  $X_r$  es pequeño al comparar las curvas que corresponden a pendientes de 10 grados y 30 grados para iguales valores de  $b/h$ .

Además se puede notar que el efecto sobre  $X_r$ , de un cambio en  $b/h$ , disminuye cuando  $b/h$  tiene valores arriba de 4.

Finalmente se demuestra que el valor de  $X_x$ , la fuerza horizontal en la dirección del eje radial "X", se ve seriamente influenciado por el valor del ángulo de la pendiente, especialmente para vigas con valores grandes de  $b/h$ . También se puede notar que para una pendiente de 30 grados, el cambio en valores de  $b/h$  desde 4 hasta 16 no tiene mayor influencia en  $X_x$ .

Scordelis presenta en forma gráfica los valores máximos de los momentos de flexión y torsión para los casos indicados, analizando el efecto de las variables en estos valores máximos. Se concluye de estas comparaciones que:

Un cambio en los valores de  $b/h$  tiene poco efecto sobre los valores máximos de momentos ( $M_r$  y  $M_t$ ) para una viga horizontal curva. Un cambio en los valores de  $b/h$  tiene un marcado efecto en los valores máximos de  $M_r$  y  $M_t$  en helicoides cuya inclinación varía de 10 a 30 grados. Los valores de  $M_r$  y  $M_t$  son mucho menores para  $b/h$  igual a 16 que para  $b/h$  igual a 1. (Ver página 72).

Aunque los valores de las redundantes ( $X_r, X_x$ ) en la sección media para valores de  $b/h$  igual a 16 son enormemente diferentes para pendientes de 10 grados y de 30 grados los valores máximos de  $M_r$  y  $M_t$  son prácticamente iguales. Lo cual indica que para vigas con valores altos de la relación  $b/h$ , el ángulo de pendiente de la viga tiene poco efecto en estas dos fuerzas internas; sin embargo, existe un marcado efecto en el valor de  $M_s$ , el momento flector en sentido transversal.

Se demuestra que el valor de la pendiente se hace más importante mientras la relación  $b/h$  disminuye. Se comprueba que para valores de  $b/h$  igual a 1, vigas con pendientes iguales a 0 y 10 grados se comportan similarmente.

**CONCLUSION:** el estudio de los momentos máximos de flexión y torsión indica que las secciones con valores altos de la relación ancho-profundidad se deben usar en los diseños de las escaleras helicoidales, ya que ellas pueden soportar las cargas aplicadas en una forma más eficiente.

**Consideraciones sobre las Condiciones supuestas en el Análisis.**

El método "exacto" presentado por Scordelis, presupone que las rigideces flexionales y torsionales se determinan como para un miembro recto y que se consideran concentradas a lo largo del eje longitudinal, mientras que en la realidad la escalera helicoidal es un miembro de curvatura cerrada.

Experimentos llevados a cabo por Scordelis y Young, en modelos de plexiglás (ref. No. 20), concluyen que "para vigas con sección rectangular que tengan una relación de ancho-profundidad entre 1 y 16 y una relación del radio de la curva al ancho de la escalera entre 3 e infinito, se obtienen resultados suficientemente exactos para las reacciones finales por el análisis de la elástica definida por el eje centroidal longitudinal de la viga, eliminando así el efecto de losa."

El problema que existe en la práctica, es que la mayor parte de las escaleras helicoidales construidas tienen una relación del radio de curvatura al ancho de la losa tan bajo como 1.5 ó 1. Por esta razón para este tipo de escaleras se hace necesario definir las rigideces flexionales y torsionales considerando el miembro como curvo. Se pueden considerar estos valores como para miembros rectos, únicamente cuando la curvatura no es pronunciada.

Para poder determinar el error introducido en los cálculos al no considerar este efecto en el análisis, se refiere al lector a la Ref. No. 17. En esta, Timoshenko propone que cuando las dimensiones de la sección transversal de una viga curva no se consideran pequeñas comparadas con su radio de curvatura, se deben de considerar también las energías de deformación de las fuerzas longitudinales y transversales del miembro, además la de los momentos de flexión.

Esto únicamente se aplica a miembros que son cargados en su plano de mayor rigidez y no a una escalera helicoidal que se encuentra cargada normalmente a su plano de mayor rigidez.

Scordelis comprobó que el error introducido en el análisis al considerar las rigideces como las de un miembro rectilíneo, no es de importancia.

También comprobó que para el caso de una escalera helicoidal, los efectos del cortante y cargas axiales en la determinación de las deformaciones y por lo tanto en las redundantes es completamente insignificante, aún para casos donde la relación de ancho-radio de curvatura es grande.

Otro problema que aparece al querer llevar a cabo un análisis exacto, es la introducción del efecto de los peldaños de la escalera, ya que el análisis se lleva a cabo tomando en cuenta una sección de peralte constante sin considerar los peldaños. La presencia de los peldaños aumenta considerablemente el peralte de la losa, modificando las rigideces flexionales y torsionales.

De lo concluido por Scordelis en su artículo, estas modificaciones introducidas por los aumentos en rigideces a causa de los peldaños es importante, ya que se demostró que un cambio en la relación  $b/h$  tiene un efecto grande en los valores máximos de  $M_r$  y  $M_t$ .

Scordelis ha llegado a la conclusión de que, para las escaleras helicoidales con relación ancho-radio de curvatura mayores de  $1/3$ , se debe incluir el efecto de la excentricidad de carga, ya que su contribución es importante y se le debe tomar en cuenta en la determinación total de las fuerzas y momentos internos. Estos momentos torsionales uniformes por unidad de longitud de proyección horizontal, resultan de que una carga uniforme como la carga muerta distribuida a través del ancho de la viga, tiene una excentricidad con respecto a la línea central de la misma, cuyo valor está dado por:

$$e = \frac{b^2}{12.R}$$

Scordelis elaboró una tabulación para la determinación de las redundantes  $X_x$  y  $X_r$ , producidas por el momento de torsión uniformemente distribuido.

Estos valores multiplicados por "e" pueden ser sumados a los valores obtenidos al sólo considerar la carga vertical.

A. R. Cusens y Supachai Trirojna (ref. No. 16), llevaron a cabo un estudio para comparar los distintos métodos de análisis de las escaleras helicoidales, y comprobar su ajuste a la realidad, por medio de un estudio experimental bajo carga uniformemente distribuida.

El estudio se llevó a cabo en dos modelos de media escala, de una escalera helicoidal de 80 grados de curvatura. Se utilizaron para el diseño los métodos de análisis de Holmes, Scordelis, Morgan y Bergman.

Analizada la escalera por los métodos anteriormente citados se construyeron gráficas con los resultados. En ellas se puede observar que el método de Bergman es extremadamente conservador. Asimismo, podemos observar que los resultados obtenidos de los métodos de Holmes, Scordelis y Morgan son por lo menos para el caso estudiado, prácticamente iguales, al considerar los efectos de la excentricidad de carga en el método de Scordelis. Se diseñó la estructura basándose en los resultados del método de Morgan.

Para los detalles del diseño estructural de la escalera se refiere al lector al artículo citado.

El primer modelo probado fue reforzado con porcentaje mínimo para absorber el momento flector en el centro y se proveyó refuerzo necesario para el momento flector transversal en las orillas de la losa. Para el momento torsional y el cortante transversal no se necesitó refuerzo, pero se incluyeron estribos para el armado.

Las pruebas de este modelo indicaron que la estructura tenía un factor de carga de 4.8.

El segundo modelo, se reforzó considerando únicamente la cantidad necesaria para absorber el momento flector en el centro y se consideró únicamente el 50% del refuerzo para el momento flector transversal.

La prueba a la rotura de este modelo demostró que la estructura tenía un factor de carga de 3.65.

De la medición de las deformaciones obtenidas de las pruebas en ambos modelos, se puede concluir:

La falla de la estructura ocurrió en el plano tangente a la hélice y no existieron rajaduras en sentido longitudinal.

De las gráficas de las deformaciones obtenidas bajo las distintas cargas, se puede apreciar que existe acción de losa en las escaleras helicoidales. Este factor se puede atribuir a que las suposiciones del método de diseño consideran una sección uniforme con respecto al refuerzo y en los modelos se concentró gran cantidad de refuerzo en las orillas, mientras que en el centro se colocó refuerzo mínimo distribuido. Estas concentraciones de refuerzo aumentaron la rigidez de las orillas, actuando como vigas, mientras que la

parte central actuaba como losa, induciendo en el sistema diferentes deflexiones en la sección.

Para el diseño se consideró la escalera como perfectamente empotrada. En la práctica, a pesar de que se intentó empotrar sus extremos, se determinó el desplazamiento hacia afuera de la curvatura en la parte superior; éste fue casi nulo para cargas menores que la del diseño.

De la comparación de las deformaciones obtenidas de los experimentos con las obtenidas del cálculo, se concluye que:

En la sección del medio concuerdan en forma razonable para ambos casos.

En el modelo 2, las deformaciones en la parte superior exterior, obtenidas del experimento son mayores que las calculadas, mientras que en la parte inferior exterior las deformaciones del experimento son considerablemente menores que las calculadas.

Se atribuyen estas diferencias, al no considerar en el cálculo de las deformaciones el posible ladeo de la estructura y principalmente, al no considerar los efectos del corte y de la torsión.

Otra causa que influye en la discrepancia entre las deformaciones calculadas y las obtenidas en el experimento, así como en el alto factor de carga obtenido, radica en el hecho de que el experimento se llevó a cabo con una escalera que incluía los peldaños en forma monolítica, mientras que el análisis se hizo basado en una sección que no consideraba el efecto de los mismos.

Scordelis llevó a cabo una comparación entre el diseño de una escalera helicoidal de 180 grados de curvatura considerándola como estructura tridimensional y por el método propuesto por Bergman.

De los resultados de esta comparación se puedan sacar las siguientes conclusiones para este caso particular, pero que comprueban y refuerzan las conclusiones generales derivadas anteriormente.

1. Si la estructura es analizada como viga plana curva, las redundantes y por lo tanto las reacciones finales son independientes de las relaciones de rigideces.
2. De los resultados para la escalera helicoidal, se puede observar que los valores de las reacciones finales varían al incrementar la relación ancho-profundidad de la sección transversal.

De los resultados podemos observar que los esfuerzos obtenidos al analizar la estructura como una viga helicoidal son mucho menores que los obtenidos en el análisis de la viga curva. Además, al aumentar la relación ancho-profundidad, los momentos de flexión

alrededor del eje X y los torsionales se hacen más pequeños, mientras que los momentos flectores alrededor del eje transversal aumentan. Estas curvas demuestran que la viga helicoidal tiene más resistencia que la indicada por el análisis de la viga plana curva.

Esta es la razón por la cual el método de Bergman es demasiado conservador, pues al no considerar la alta capacidad de la viga helicoidal, es necesario sobre-diseñar la estructura.

El problema que presentan estos estudios sobre la escalera helicoidal, es que están basados en la suposición de una estructura perfectamente empotrada, caso que no se presenta con mucha frecuencia en la práctica. No se pudo obtener ningún estudio que considere otro tipo de apoyo, pero se refiere al lector a las referencias 19 y 21, en las cuales se han obtenido envolventes de momentos máximos para los casos de empotramiento perfecto y para el caso de una estructura simplemente soportada.

#### Análisis de Escaleras Helicoidales:

Consideremos la escalera helicoidal presentada en la Figura. Su geometría puede definirse por su radio a la línea media  $R$ ; ángulo horizontal,  $2\phi$ ; ángulo de pendiente  $\alpha$ ; ancho,  $b$ ; y profundidad,  $h$ . La escalera puede girar en sentido del reloj o contra el reloj.

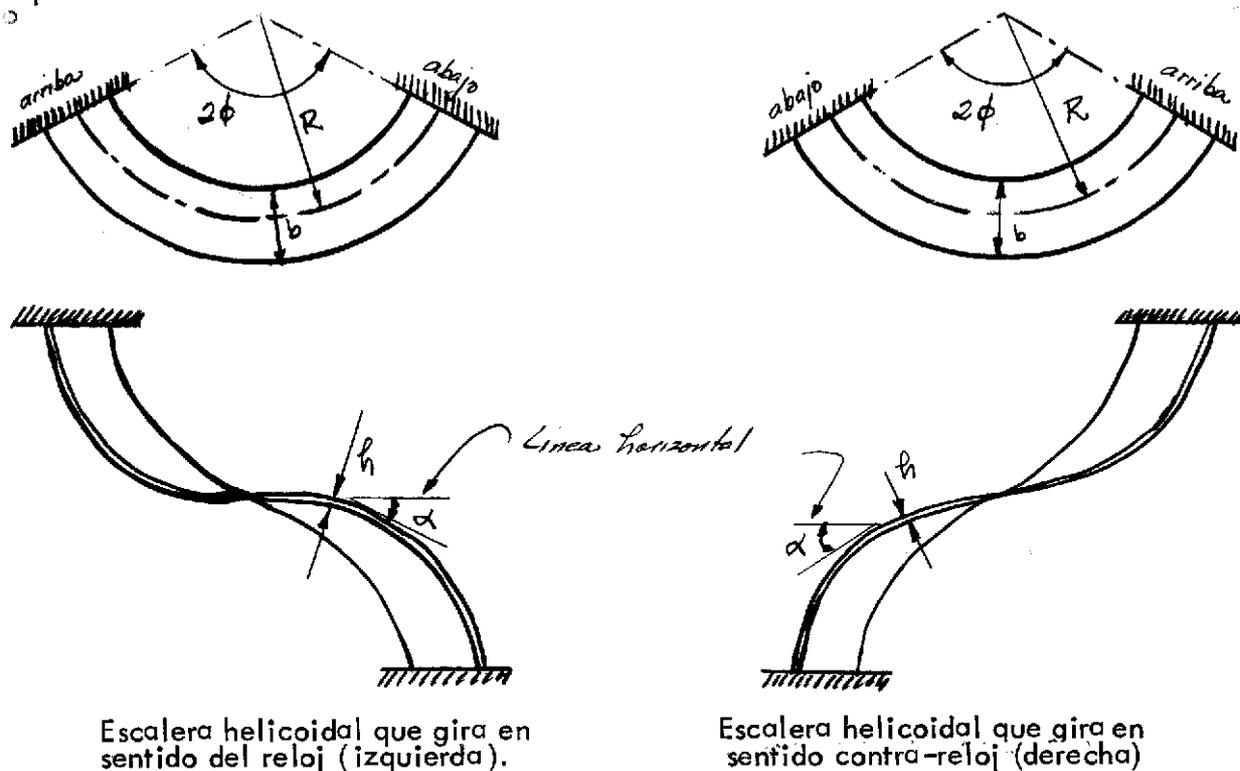


Figura No. 16. Geometría de la escalera helicoidal.

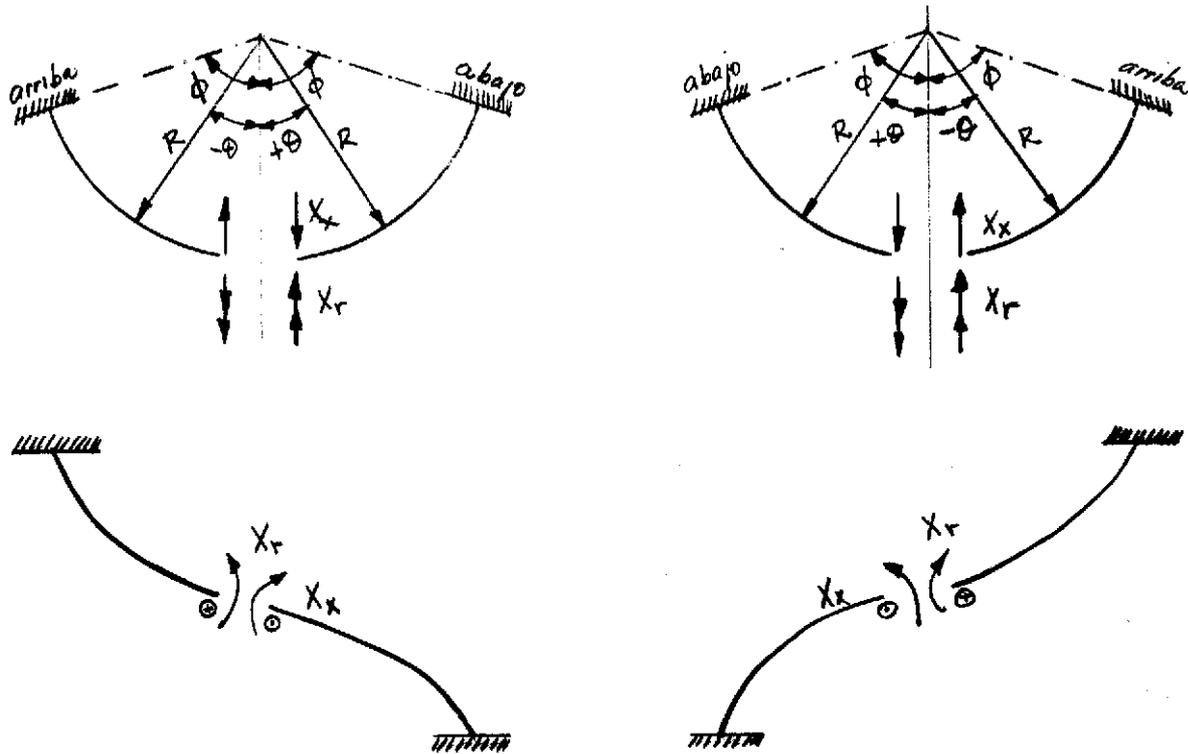


Figura No. 17. Dirección positiva de las redundantes.

Carga uniformemente distribuida verticalmente de 1 #/pie lineal en proyección horizontal a lo largo del eje longitudinal.

Al seleccionar las redundantes en el punto medio y usando principios de simetría de las 6 redundantes del sistema, sólo 2 no se vuelven cero.

$X_x$ , una fuerza horizontal en la dirección del eje "X"

$X_r$ , un momento actuando alrededor del eje "X" o radial.

Los vectores de momentos se indican con flecha de doble cabeza.

Los vectores indican el eje alrededor del cual el momento actúa, se aplica la regla de la mano derecha para determinar la dirección del momento.

Basándonos en el Principio de Superposición, los desplazamientos en la dirección de las redundantes pueden escribirse así:

$$\delta_{kw} + X_x \cdot \delta_{kx} + X_r \cdot \delta_{kr} = 0 \quad (1)$$

$$\delta_{rw} + X_x \cdot \delta_{rx} + X_r \cdot \delta_{rr} = 0 \quad (2)$$

En las ecuaciones anteriores los términos  $\delta$  indican desplazamientos relativos de los 2 extremos de la helicoide en la sección del medio.

Donde:

$\delta_{kw}$  = desplazamiento lineal relativo en la dirección del eje "X" debido a la carga uniforme de 1 #/pie lineal de proyección horizontal con las redundantes iguales a cero.

$\delta_{rw}$  = desplazamiento angular relativo alrededor del eje "X" debido a la carga uniforme de 1 #/pie lineal de proyección horizontal con las redundantes iguales a cero.

$\delta_{kk}$  = desplazamiento lineal relativo en la dirección del eje "X" debido a  $X_k = 1$ .

$\delta_{rk}$  = desplazamiento angular relativo alrededor del eje "X" debido a  $X_k = 1$ .

$\delta_{kr}$  = desplazamiento lineal relativo en la dirección del eje "X" debido a  $X_r = 1$ .

$\delta_{rr}$  = desplazamiento angular relativo alrededor del eje "X" debido a  $X_r = 1$ .

Con base en la ley de Maxwell del desplazamiento recíproco  $\delta_{rk} = \delta_{kr}$ .

Para resolver las ecuaciones 1 y 2 para las redundantes, es necesario determinar 5 desplazamientos:

$$\delta_{kw}, \delta_{rw}, \delta_{kk}, \delta_{rr} \text{ y } \delta_{rk} = \delta_{kr}$$

Una vez determinados los valores de  $X_k$  y  $X_r$  de las ecuaciones 1 y 2, los momentos finales de flexión y torsión en cualquier sección de la helicoide se pueden determinar por superposición. (Ver figura siguiente página).

$$M_r = m_{rw} + X_k \cdot m_{rk} + X_r \cdot m_{rr} \quad (12)$$

$$M_s = m_{sw} + X_k \cdot m_{sk} + X_r \cdot m_{sr} \quad (13)$$

$$M_t = m_{tw} + X_k \cdot m_{tk} + X_r \cdot m_{tr} \quad (14)$$

donde:

$m_{rw}$ ,  $m_{sw}$  y  $m_{tw}$  representan los momentos de flexión y torsión en la helicoide debido a la carga uniforme de 1 #/pie lineal de proyección horizontal con las redundantes iguales a cero.

Para cualquier sección a  $\theta$  del centro se pueden determinar estos valores así: (ver figuras Nos. 16, 17 y 18).

$$m_{rw} = -R^2(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$m_{sw} = -R^2(\theta - \sin \theta) \text{ per } \alpha \quad (4)$$

$$m_{tw} = -R^2(\theta - \sin \theta) \cos \alpha \quad (5)$$

$m_{rx}$ ,  $m_{sx}$  y  $m_{tx}$  representan los momentos de flexión y torsión en la helicoide debido a  $X_x = 1$ :

$$m_{rx} = -R(\theta \operatorname{sen} \theta) \operatorname{tg} \alpha \quad (6)$$

$$m_{ox} = R(\operatorname{sen} \theta) \cos \alpha + R(\theta \cos \theta) \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

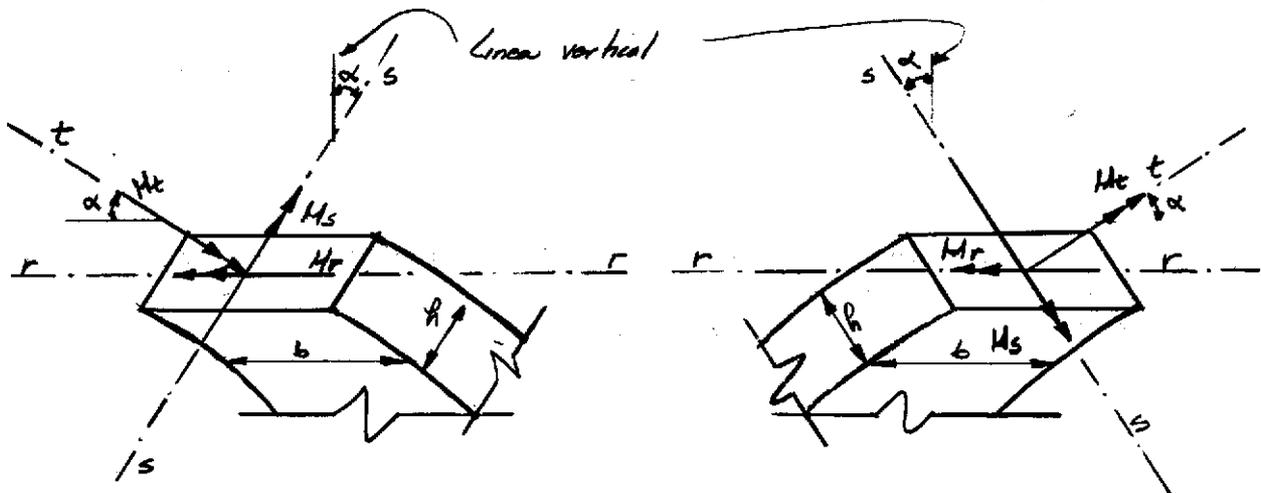
$$m_{tx} = -R(\operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \alpha + R(\theta \cdot \cos \theta) \operatorname{sen} \alpha \quad (8)$$

$m_{rr}$ ,  $m_{sr}$  y  $m_{tr}$  representan los momentos de flexión y torsión en la helicoide debido a  $X_r = 1$ :

$$m_{rr} = \cos \theta \quad (9)$$

$$m_{sr} = \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (10)$$

$$m_{tr} = \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \alpha \quad (11)$$



Helicoide izquierda

Helicoide derecha

Figura No. 18. Dirección positiva de los momentos de flexión y torsión.

Scordelis presenta en su artículo tabulaciones con coeficientes para determinar  $X_r$  y  $X_x$ .

Los valores que influyen en  $X_r$  y  $X_x$  son: ángulo horizontal  $\theta$ , relación  $b/h$ , ángulo  $\alpha$ .

Se presentan las tablas tomadas del artículo de Scordelis para el caso en que no se considera excentricidad de cargas respecto a la línea central de la helicoide. (Ver página siguiente).

Scordelis determina necesario considerar la excentricidad de cargas respecto a la línea central de la helicoide, cuando la relación del ancho de las escaleras (b) al radio de la línea central es mayor que 1/3.

El valor de la excentricidad "e" es:

$$e = \frac{b^2}{12 \cdot R}$$

Scordelis presenta una tabulación de valores de  $X_r$  y  $X_x$  para el caso de un momento torsional de 1 #-pie/pie lineal de proyección horizontal. Se muestra la tabla tomada del artículo de Scordelis en las siguientes páginas.

Para introducir la contribución del momento torsional en los valores determinados sólo para carga vertical, se multiplican las redundantes  $X_r$  y  $X_x$  por "e", y se adicionan a los valores obtenidos para carga vertical de 1 #-pie lineal de proyección horizontal.

Los momentos totales debidos a ambos efectos se pueden obtener por:

$$M_r = m_{rw} + e \cdot m_{re} + K_x \cdot m_{rx} + K_r \cdot m_{rr} \quad (16)$$

$$M_s = m_{sw} + e \cdot m_{se} + K_x \cdot m_{sx} + K_r \cdot m_{sr} \quad (17)$$

$$M_t = M_{tw} + e \cdot m_{te} + K_x \cdot m_{tx} + K_r \cdot m_{tr} \quad (18)$$

las ecuaciones de 3 al 11 deben de usarse conjuntamente con las 19, 20 y 21 en las ecuaciones 16, 17 y 18.

$$m_{re} = -R (1 - \cos \theta) \quad (19)$$

$$m_{se} = R \sin \theta \cdot \sin \alpha \quad (20)$$

$$m_{te} = R \sin \theta \cdot \cos \alpha \quad (21)$$

$m_{re}$ ,  $m_{se}$  y  $m_{te}$  representan los momentos de flexión y torsión en la helicoide debido a un momento torsional de 1 #-pie/pie lineal de proyección horizontal con las redundantes iguales a cero.

A lo largo de la línea central longitudinal de la helicoide actúa este momento torsional alrededor de un eje horizontal tangente a la línea central.

REDUNDANTES EN EL PUNTO MEDIO DE UNA VIGA HELICOIDAL, EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS, SOPORTANDO UNA CARGA UNIFORME DE 1 LB POR PIE LINEAL DE PROYECCION HORIZONTAL

Table with columns for angle (alpha) and height (b/h), and rows for various values of alpha (0, 10, 20, 30, 40 degrees) and b/h (0.5, 1, 2, 4, 8, 16). Each cell contains numerical data representing structural parameters.

TABLA No. 8 - REDUNDANTES EN EL PUNTO MEDIO DE UNA VIGA HELICOIDAL, EMPOTRADA EN SUS EXTREMOS, SOPORTANDO UN MOMENTO TORSIONAL UNIFORME DE 1 LB-PIE POR PIE LINEAL DE PROYECCION HORIZONTAL

φ, deg	b/h	α = 0 deg		α = 10 deg		α = 20 deg		α = 30 deg		α = 40 deg	
		X <sub>r</sub> /R	X <sub>s</sub>								
45	4	-0.0461773	---	-0.0582804	-0.510508	-0.0801842	-0.754166	-0.0929678	-0.759314	-0.0920795	-0.652014
45	8	-0.0353201	---	-0.0718869	-1.24188	-0.106089	-1.27664	-0.111486	-0.994948	-0.0982644	-0.727412
45	16	-0.0279339	---	-0.106231	-2.49468	-0.126535	-1.68124	-0.119251	-1.11193	-0.0965328	-0.754420
60	4	-0.0906781	---	-0.121831	-0.742637	-0.165462	-0.944844	-0.180496	-0.845619	-0.160288	-0.674789
60	8	-0.0732117	---	-0.157928	-1.72390	-0.206115	-1.42991	-0.201271	-1.02230	-0.173064	-0.724448
60	16	-0.0611893	---	-0.206739	-2.87479	-0.225535	-1.68739	-0.204638	-1.08703	-0.169457	-0.737890
75	4	-0.156775	---	-0.216412	-0.990381	-0.278112	-1.07720	-0.287355	-0.880627	-0.251648	-0.673958
75	8	-0.133306	---	-0.274373	-2.06899	-0.320699	-1.46408	-0.303388	-1.09310	-0.260227	-0.706524
75	16	-0.116979	---	-0.326716	-2.97414	-0.332713	-1.62515	-0.301218	-1.04181	-0.252565	-0.714777
90	4	-0.247161	---	-0.337803	-1.21581	-0.404800	-1.14259	-0.402754	-0.877731	-0.362782	-0.658759
90	8	-0.220217	---	-0.405338	-2.25097	-0.439401	-1.43130	-0.410899	-0.962791	-0.355586	-0.682120
90	16	-0.201105	---	-0.448011	-2.91728	-0.443218	-1.53693	-0.403740	-0.989480	-0.344349	-0.689154
105	4	-0.360778	---	-0.474592	-1.38909	-0.533231	-1.15338	-0.519227	-0.851917	-0.468382	-0.635904
105	8	-0.333956	---	-0.539235	-2.30147	-0.555903	-1.36635	-0.519619	-0.914258	-0.456251	-0.655318
105	16	-0.314737	---	-0.566028	-2.78585	-0.553003	-1.44176	-0.508789	-0.935985	-0.442341	-0.663009
120	4	-0.491837	---	-0.613564	-1.49713	-0.656115	-1.12720	-0.633071	-0.813741	-0.576226	-0.609138
120	8	-0.468820	---	-0.663713	-2.26430	-0.667674	-1.28814	-0.627618	-0.863413	-0.560748	-0.627794
120	16	-0.452235	---	-0.678290	-2.62418	-0.660323	-1.34753	-0.614665	-0.863723	-0.545270	-0.637011
135	4	-0.636808	---	-0.744953	-1.54124	-0.770829	-1.07766	-0.743251	-0.768612	-0.685683	-0.579643
135	8	-0.613986	---	-0.779535	-2.17341	-0.774443	-1.20470	-0.734519	-0.811841	-0.663803	-0.592408
135	16	-0.601861	---	-0.784676	-2.45095	-0.764948	-1.25572	-0.721006	-0.832409	-0.653006	-0.610502
150	4	-0.767116	---	-0.864123	-1.52818	-0.877409	-1.01164	-0.850025	-0.717532	-0.736953	-0.546347
150	8	-0.757028	---	-0.866125	-2.24563	-0.876864	-1.11602	-0.840671	-0.757959	-0.780825	-0.563209
150	16	-0.749782	---	-0.885993	-2.80913	-0.867297	-1.16333	-0.828101	-0.779418	-0.766039	-0.581194
165	4	-0.892007	---	-0.970112	-1.46222	-0.976535	-0.929822	-0.953588	-0.658361	-0.909933	-0.506112
165	8	-0.887723	---	-0.984532	-1.88739	-0.975346	-1.02028	-0.946134	-0.697531	-0.896887	-0.530271
165	16	-0.884663	---	-0.982783	-2.07081	-0.967481	-1.06379	-0.935934	-0.719752	-0.884560	-0.544797
180	4	-1.00000	---	-1.06313	-1.34253	-1.06787	-0.828660	-1.05266	-0.586399	-1.02255	-0.454282
180	8	-1.00000	---	-1.07485	-1.68905	-1.06885	-0.907560	-1.04928	-0.624343	-1.01493	-0.479930
180	16	-1.00000	---	-1.07417	-1.84127	-1.06408	-0.947868	-1.04271	-0.646434	-1.00651	-0.495124

## RESUMEN

Para llevar a cabo el análisis de los momentos torsionales que son absorbidos por una viga perimetral, se considera como aproximado a la realidad considerar la viga perimetral empotrada en sus extremos.

No se considera necesario tomar en consideración en dicho análisis la disminución de los mismos causada por los siguientes factores:

- 1) Restricción que ofrece la losa al momento torsional transmitido.
- 2) Deflexiones verticales de la viga perimetral cuando estos valores sean pequeños.
- 3) Grado de empotramiento de los extremos de la viga perimetral.

El método presentado para analizar los voladizos mutuamente soportados es práctico y fácil de aplicar. Con base en las ecuaciones desarrolladas en el análisis de las acciones, es posible determinar fácilmente los valores de los coeficientes de transmisión y las rigideces del sistema estructural, pudiendo en esa forma considerar la continuidad del sistema con el resto de la estructura.

A causa de la baja rigidez torsional de la mayor parte de las vigas, los efectos de la torsión en marcos regulares en el espacio son considerablemente pequeños. Por consiguiente los marcos regulares en el espacio pueden ser analizados como marcos planos sin incurrir en errores de consideración.

Se considera aceptable el método de análisis para escaleras de apoyo libre presentado por Cusens y Kuang, ya que fue comprobado experimentalmente en un modelo a media escala. A pesar de que un solo experimento no da suficientes valores como para aseverar que el método es completamente exacto o válido, no existe mayor número de pruebas experimentales sobre el diseño y construcción de este tipo de escaleras.

El método utilizado para analizar las vigas curvas planas, presenta la ventaja que sirve para determinar los coeficientes de transmisión flexionales y torsionales, así como las rigideces flexionales y torsionales y los coeficientes de relación entre momentos de flexión y de torsión. Esto nos permite considerar a la viga curva como parte de una estructura continua.

Cuando la viga curva es muy ancha se hace necesario considerar la excentricidad de la carga distribuida a lo ancho de la sección transversal con respecto a la línea central de la viga.

Se debe considerar también el aspecto del monolitismo de la viga con el sistema de losa, ya que este factor le introduce torsión adicional.

Para una viga curva plana los valores de los momentos finales son independientes de la relación del ancho al peralte de la sección transversal, razón por la cual es necesario considerar este factor al proporcionar la sección de la viga con el objeto que sea adecuada al diseño para resistir la torsión.

Se determina que para el diseño de vigas curvas con curvaturas menores de 20 grados, los efectos de la torsión sobre la flexión son despreciables, por lo que los momentos flexionales pueden ser determinados considerando a la viga como recta con una longitud equivalente a la longitud de la curva.

Para el diseño de las escaleras helicoidales es necesario considerar la estructura en forma tridimensional con el objeto de aprovechar la resistencia estructural inherente de la viga helicoidal.

Vigas helicoidales con valores altos de la relación  $b/h$  tienden a reducir los valores de los momentos de flexión alrededor del eje radial y el momento de torsión, pero aumentan el valor del momento de flexión transversal.

Como la mayor dimensión de la sección transversal de la escalera helicoidal es su ancho, la sección tiene una enorme capacidad de absorber momento flexional en el sentido transversal, pero poca capacidad para absorber momentos flexionales que actúan alrededor del eje radial y momentos torsionales. Es por esta razón que para poder obtener menos esfuerzos inducidos en la sección transversal de la escalera helicoidal a causa de las cargas exteriores que actúan sobre la misma, es conveniente hacer uso de una sección transversal con valor grande de la relación  $b/h$ .

Se debe considerar la excentricidad de carga con respecto al eje longitudinal de la helicoide, cuando la relación ancho-radio de curvatura es mayor que  $1/3$ .

## RECOMENDACION

A causa de la gran importancia que tiene el estudio de este tipo de estructuras, se hace necesario incluirlo como parte de un curso de diseño estructural.

## BIBLIOGRAFIA

1. H. J. Cowan., DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO SUJETAS A TORSION, Editora Técnica, S. A. México, 1967.
2. La Londe and Janes., CONCRETE ENGINEERING HANDBOOK, McGraw-Hill Book Company, first edition, 1961.
3. M. A. Gouda., DISTRIBUTION OF TORSION AND BENDING MOMENTS IN CONCRETE BEAMS AND SLABS, Journal of the American Concrete Institute, February, 1960, Title No. 56-43, and discussion, publi, Journal, Sept. 1960, part. 2.
4. Robert A. Shoobred and Eugene P. Holland., INVESTIGATION OF SLAB RESTRAINT ON TORSIONAL MOMENTS IN FIXED-ENDED SPANDREL GIRDERS, ACI Publication SP-18, Torsion of Structural Concrete, American Concrete Institute, 1968.
5. Panayiotis J. Spyropoulos., FLEXURE OF PERPENDICULAR MUTUALLY SUPPORTED CANTILEVERS, Journal of the American Concrete Institute, February 1964, Title No. 61-14, and discussion, publi. Journal, Sept. 1964.
6. Phillip L. Gould., ANALYSIS AND DESIGN OF A CANTILEVER STAIRCASE, Journal of the American Concrete Institute, July 1963, Title No. 60-45.
7. Franz Sauter, FREE-STANDING STAIRS, Journal of the American Concrete Institute, July 1964, Title No. 61-48, and discussion publi. Journal, March 1965, Part 2.
8. A.R. Cusens and Jing-Gwo Kuang., EXPERIMENTAL STUDY OF A FREE-STANDING STAIRCASE, Journal of the American Concrete Institute, May 1966, and discussion, publi. Journal Dec. 1966.
9. Martin Schulz and Mauricio Chedraui., TABLES FOR CIRCULARY CURVED HORIZONTAL BEAMS WITH SYMMETRICAL UNIFORM LOADS, Journal of the American Concrete Institute, May 1957, Title No. 53-58, and discussion, publi. Journal december 1957, Part. 2.
10. Panayiotis J. Spyropoulos., CIRCULARY CURVED BEAMS TRANSVERSELY LOADED. Journal of the American Concrete Institute, October 1963, Title No. 60-63.
11. Becla Velutini., ANALYSIS OF CONTINUOUS CIRCULAR CURVED BEAMS., Journal of the American Concrete Institute, November 1950, Title No. 47-15.
12. A. A. Witecki., "SIMPLIFIED METHOD FOR THE ANALYSIS OF TORSIONAL MOMENT AS AN EFFECT OF A HORIZONTALLY CURVED MULTISPAN CONTINUOUS BRIDGE", ACI Publication SP-23, Concrete Bridge Desing, American Concrete Institute, 1969.

13. Martin Schulz, CIRCULARY STAIRWAY FOR UNIVERSITY CITY, Journal of the American Concrete Institute, February 1958, Title No. 54-8.
14. Victor R. Bergman., HELICOIDAL STAIRCASES OF REINFORCED CONCRETE, Journal of the American Concrete Institute, October 1956, Title No. 53-22. and discussion, publi. Journal, June 1957.
15. A.C. Scordelis., INTERNAL FORCES IN UNIFORMLY LOADED HELICOIDAL GIRDERS, Journal of the American Concrete Institute, April 1960, Title 56-50. and discussion publi. Journal, Dec. 1960, Part 2.
16. A.R. Cusens and Supachai Trirojna, HELICOIDAL STAIRCASE STUDY, Journal of the American Concrete Institute, Jan. 1964, Title No. 61-5, and discussion publi. Journal, Sept. 1964.
17. Timoshenko, S., STRENGTH OF MATERIALS, Part II, D. Van Nostrand Co., Ing., New York, 2nd Edition, pp. 83-84.
18. Holmes, A.M.C. ANALYSIS OF HELICAL BEAMS UNDER SYMMETRICAL LOADING., Proceedings, ASCE, V. 83, ST6, Nov. 1957, pp. 1437-1 to 1437-37.
19. Morgan V. A. COMPARISON OF ANALYSIS OF HELICAL STAIRS., Concrete and Constructional Engineering (London), V. 55, No. 3, Mar. 1960, pp. 127-132.
20. Young, Y. F., and Scordelis, A.C., AN ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF HELICOIDAL GIRDERS., Proceedings, ASCE, V, 84, No. ST5, 29 pp.
21. Mattock, A. H., DESIGN AND CONSTRUCTION OF A HELICAL STAIRCASE., Concrete and Constructional Engineering (London), V. 52, No. 3, Mar. 1957, pp. 99-105.
22. Beton-Kalender, Part II, 1955, p. 193, Section 6.2 THE STAIR FIXED IN BOTH ENDS., Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.
23. Liebenberg, A. C., THE DESIGN OF SLAB TYPE REINFORCED CONCRETE STAIRWAYS, The Structural Engineer (London), V. 38, No. 5, May 1960, pp. 156-164.
24. Siev, A. ANALYSIS OF FREE STRAIGHT MULTIFLIGHT STAIRCASES, Proceedings, ASCE, V. 88 ST3, June 1962, pp. 207-232.
25. Fuchssteiner, W., DIE FREITRAGENDE WENDELSTREPPPE, Beton- und Stahlbetonbau (Berlin), V. 49, No. 11, Nov. 1954, pp. 256-258.
26. Taleb N.J., THE ANALYSIS OF STAIR WITH UNSUPPORTED INTERMEDIATE LANDINGS, Concrete and Constructional Engineering (London), V. 59, No. 9, Sept. 1964. pp. 315-320.

  
Jorge Mario Vettorazzi Gándara

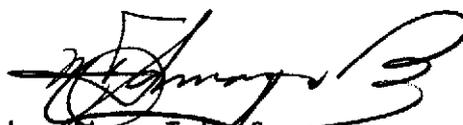
Vo. Bo.:

  
(f) Ing. Roberto Solís Hegel  
A s e s o r

Vo. Bo.:

  
(f) Ing. Joaquín Lottmann E.  
Jefa del Departamento  
de Estructuras

IMPRÍMASE:

  
(f) Ing. Marco Tulio Samayoa  
Decano en funciones.