



*Universidad de San Carlos de Guatemala*  
*Facultad de Ingeniería*

JOSE FERNANDO DIAZ PEREZ

*“Consideraciones sobre el método de la  
Analogía de la columna y su aplicación en  
el análisis de Arcos Elásticos”*

*Guatemala, enero de 1971*

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERIA

República de Guatemala, Centro América

"CONSIDERACIONES SOBRE EL METODO DE LA ANALOGIA DE LA COLUMNA  
Y SU APLICACION EN EL ANALISIS DE ARCOS ELASTICOS"



Al conferírsele el título de

INGENIERO CIVIL

TESIS DE REFERENCIA

NO

SE PUEDE SACAR DE LA BIBLIOTECA  
BIBLIOTECA CENTRAL-USAC.

Guatemala, Enero de 1971

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con lo establecido por los reglamentos de la Universidad de San Carlos de Guatemala, tengo el honor de someter a vuestra consideración mi trabajo de tesis titulado:

"CONSIDERACIONES SOBRE EL METODO DE LA ANALOGIA DE LA COLUMNA  
Y SU APLICACION EN EL ANALISIS DE ARCOS ELASTICOS"

Tema que me fuera asignado por la Junta Directiva de la Facultad de Ingenieria

**DEDICO ESTE ACTO**

**A MIS PADRES:**

**Lic. Vicente Díaz Samayoa**

**Ofelia Pérez Vásquez**

**A:**

**La Facultad de Ingeniería**

**La Universidad de San Carlos de Guatemala**

**La Dirección General de Caminos**

**RECONOCIMIENTO:**

**Al Ing. Antonio Meneses Cruz**

**por su valiosa asesoría**

**JUNTA DIRECTIVA**  
**DE LA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA**  
**DE LA**  
**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**

Decano	Ing. Mauricio Castillo Contoux
Vocal Primero	Ing. Marco Antonio Cuevas
Vocal Segundo	Ing. Rodolfo González Morasso
Vocal Tercero	Ing. Adolfo Behrens
Vocal Cuarto	Br. Gustavo Adolfo Sierra
Vocal Quinto	Br. Guido Cocenza
Secretario	Ing. Héctor Centeno Bolaños

**TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN**  
**GENERAL PRIVADO**

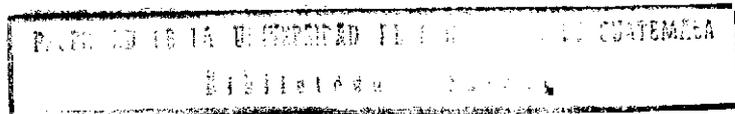
Decano	Ing. Amando Vides Tobar
Examinador	Ing. Carlos Solares B.
Examinador	Ing. Jorge Erdmenger
Examinador	Ing. Joaquín Lottmann E.
Secretario	Ing. Héctor Centeno Bolaños

## INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es presentar una exposición general sobre el método de la Analogía de la Columna, el cual a pesar de no tener la aceptación de otras técnicas de análisis resulta muy importante en el campo de las Estructuras Estáticamente Indeterminadas, particularmente en el análisis de Arcos Elásticos, siendo tal situación la que se estudiará más detenidamente, aunque también serán considerados algunas vigas en las que el método presenta ventajas apreciables.

En el capítulo inicial se tratarán ciertos tópicos que guardan bastante relación con el método de la Analogía de la Columna, como por ejemplo la viga conjugada, el Centro Elástico, flexión en columnas cortas, etc. seguidamente como ilustración se expondrán algunos conceptos sobre el Arco Elástico, sus características y ventajas. En los capítulos posteriores se entrará al estudio del método de la Analogía de la Columna, así como su aplicación en el análisis de ciertas vigas y diversas clases de arcos, desarrollando varios ejemplos sobre el particular, con el objeto de aclarar todos los aspectos relativos al funcionamiento de dicho método en este tipo de estructuras, haciendo finalmente una comparación con otros métodos de análisis.

Siendo la Analogía de la Columna un método de análisis poco conocido en nuestro medio, al que por razones de tiempo no puede dedicársele mucha atención en los cursos de Análisis, y tomando en cuenta la importancia de las Estructuras Estáticamente Indeterminadas en la actualidad, así como el uso continuo del Arco Elástico en obras de la Ingeniería moderna, se pretende que este trabajo pueda resultar de alguna utilidad al estudiante de Ingeniería que se inicia en la rama de las estructuras y esté interesado en el conocimiento de estos temas, esperando que tal finalidad se cumpla aunque sea en mínima parte.



# C O N T E N I D O

## INTRODUCCION

### CAPITULO 1

#### CONCEPTOS BASICOS PRELIMINARES

1

1.1	Métodos de Análisis	1
1.2	La Viga Conjugada	2
1.3	La Estructura Conjugada	6
1.4	El Centro Elástico	10
1.5	Consideraciones sobre Columnas	14
1.5.1	Generalidades	15
1.5.2	Columna Corta Simétrica, Cargada Excéntricamente	15
1.5.3	Flexocompresión en Columnas Cortas Asimétricas	17
1.5.3.1	Ecuación General para Flexión en Columnas Cortas	17
1.5.3.2	Eje Neutro	20
1.5.3.3	Ejes Principales	20
1.5.3.4	Círculo de Inercia	21

### CAPITULO 2

#### EL ARCO ELASTICO

23

2.1	Definiciones Generales	23
2.2	Clasificación	23
2.3	Ventajas y Usos del Arco Elástico	26
2.4	Características del Arco	27
2.4.1	Línea de Presiones	28
2.4.2	El Arco Ideal	29
2.4.3	Curvaturas	29
2.4.4	Peralte	35

## CAPITULO 3

LA ANALOGIA DE LA COLUMNA	39
3.1 Generalidades	39
3.2 Desarrollo del Método	39
3.2.1 Deducción Partiendo del Método del Centro Elástico	39
3.2.2 Derivación Directa del Método	44
3.2.3 Miembros Articulados	48
3.3 Aplicación a Vigas de Sección Constante	49
3.4 Aplicación a Vigas de Sección no Constante	56
3.5 Cálculo de Rigideces y Factores de Transporte	71

## CAPITULO 4

ANALISIS DE ARCOS POR MEDIO DE LA ANALOGIA DE LA COLUMNA	75
4.1 Generalidades	75
4.2 Análisis de Arcos	75
4.3 Marcos Rígidos	76
4.3.1 Marcos Simétricos	76
4.3.2 Marcos Asimétricos	88
4.4 Arcos Simétricos	101
4.4.1 Arcos no Articulados Simétricos	101
4.4.2 Arcos Articulados Simétricos	111
4.5 Arcos Asimétricos	114
4.5.1 Arcos Asimétricos no Articulados	114
4.5.2 Arcos Asimétricos Articulados	120
4.6 Líneas de Influencia en Arcos	123
4.7 Efectos de Temperatura, Acortamiento por Carga Axial y Otros Factores	132

## CAPITULO 5

LA ANALOGIA DE LA COLUMNA COMPARADA CON OTROS METODOS DE ANALISIS	137
5.1 Vigas	137
5.2 Arcos	141
CONCLUSIONES	147

## CAPITULO 1

### CONCEPTOS BASICOS PRELIMINARES

Las estructuras pueden agruparse bajo diferentes y muy variados puntos de vista, pero la clasificación más importante es la que divide a estas en dos grupos:

- 1) Estructuras Estáticamente Determinadas, cuyas reacciones pueden ser establecidas por la aplicación de las tres ecuaciones de Estática, que son:

$$F_x = 0 \quad (1.1)$$

$$F_y = 0 \quad (1.2)$$

$$M = 0 \quad (1.3)$$

- 2) Estructuras Estáticamente Indeterminadas o Hiperestáticas en las que las ecuaciones de equilibrio estático no son suficientes para establecer las componentes de reacción y esfuerzos. El grado de indeterminación de una estructura es el número en que las incógnitas exceden a las ecuaciones de que se dispone para la resolución del problema.

#### 1.1 METODOS DE ANALISIS

Son las formas o conjuntos de normas para evaluar los esfuerzos axiales, esfuerzos de corte o momentos flexionantes que tienen lugar en una estructura por la acción de diversos sistemas de cargas aplicados. Los métodos de análisis pueden clasificarse en dos grupos:

- 1) Cuando los miembros de la estructura a ser analizada están sujetos a diversas clases de cargas y se deben tomar en cuenta todos los efectos, se usan los métodos basados en la conservación de energía, como por ejemplo el método de "Trabajo Virtual" y el de Castigliano.
- 2) Para el análisis de miembros estructurales sujetos a momentos flexionantes, en los cuales se desprecian otros efectos por ser éste el más importante, tienen cavida diversos métodos entre los que se cuentan el de "Area-momento" que es muy empleado en estructuras curvas o arcos. A partir del método Area-momento, se origina el de "Pendiente-deflexión" que ha vuelto a cobrar importancia con el auge de las computadoras electrónicas. Además se tienen los métodos de Cross: "Distribución de momentos" y "Analogía de la Columna".

A continuación se tratarán brevemente algunos temas que tienen mucha relación con la Analogía de la Columna.

## 1.2 LA VIGA CONJUGADA

Recibe el nombre de viga conjugada, una viga que se supone cargada con el diagrama de momento  $M$  sobre  $EI$ , provocado en una viga real, por determinado sistema de cargas. El método se basa en dos principios fundamentales:

- 1) La pendiente en cualquier punto de una viga sujeta a un sistema de cargas determinado, relativa al origen de la misma es igual al corte en la viga conjugada, para el punto o sección correspondiente.
- 2) La deflexión en un punto de la viga considerada con relación a su posición original, es igual al momento flexionante en la sección correspondiente de la viga conjugada.

Suponiendo que la viga de la Fig. 1.1 soporta el sistema de cargas indicado y se plotea el correspondiente diagrama de momentos sobre  $EI$ . A continuación se carga una segunda viga de iguales características ( $L$ ,  $E$  e  $I$ ) con el diagrama  $M/EI$  de la viga anterior, tal como se muestra en la Fig. 1.2. Considerando a toda la viga rígida, menos el segmento  $dx$  resultará la viga deformada como se indica en la Fig. 1.3

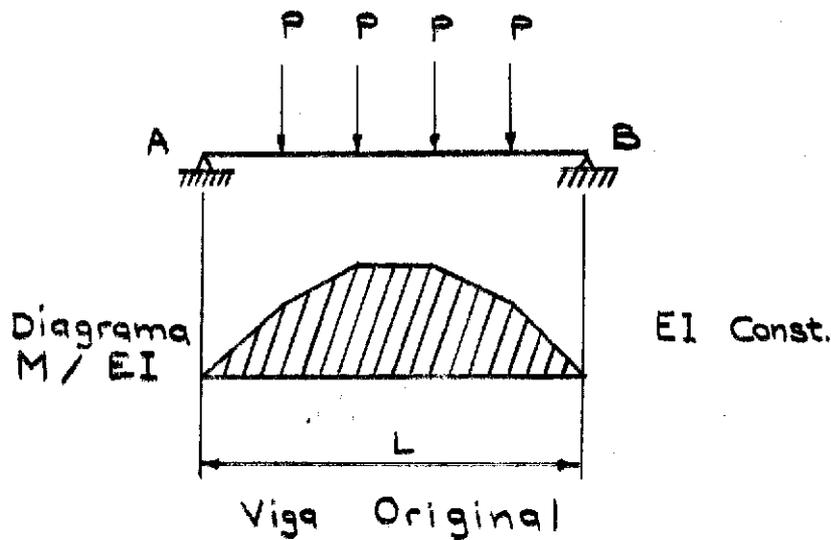
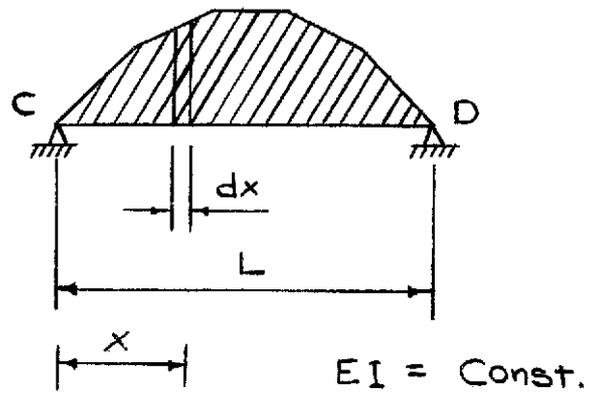
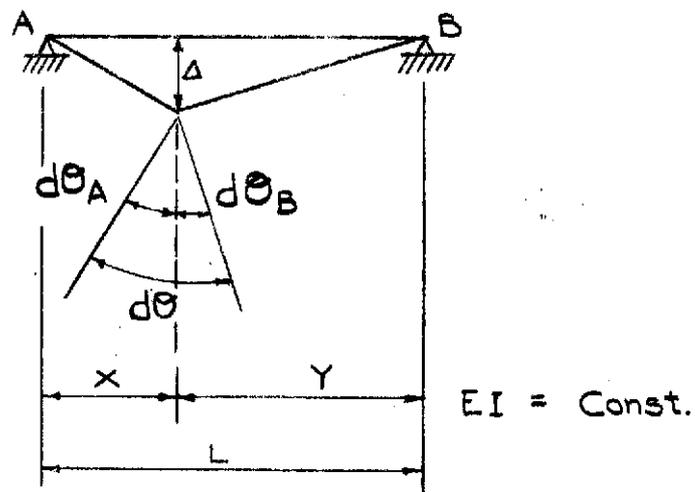


Fig. 1.1



Viga Conjugada.

Fig. 1.2.



Viga Real, elástica en  $dx$

Fig. 1.3

En las figuras 1.2 y 1.3, de acuerdo al método de Area-momento:

$$d.\theta_A + d.\theta_B = d\theta$$

$$d\theta = \frac{Mx.dx}{EI}$$

$$\therefore d.\theta_A + d.\theta_B = \frac{Mx.dx}{EI} \quad (1.4)$$

Suponiendo que la deflexión  $\Delta$  sea muy pequeña:

$$\Delta = X.d.\theta_A = Y.d.\theta_B$$

$$\therefore d.\theta_A = \frac{Y}{X}.d.\theta_B$$

Sustituyendo el valor anterior en la ecuación 1.4 tendremos:

$$\frac{Y}{X}.d.\theta_B + d.\theta_B = \frac{Mx.dx}{EI}$$

$$\therefore d.\theta_B = \left(\frac{X}{X+Y}\right) \frac{Mx.dx}{EI}$$

$$d.\theta_B = \left(\frac{X}{L}\right) \left(\frac{Mx.dx}{EI}\right) \quad (1.5)$$

En igual forma se puede evaluar el ángulo en el extremo izquierdo:

$$d.\theta_A = \frac{Y.Mx.dx}{L.EI} \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) representan las reacciones a la derecha y a la izquierda de una viga simplemente soportada, denominada "viga conjugada" y cargada con el diagrama de momento sobre la constante  $EI$  de la viga original. Si se considera elástica toda la viga y no solo al segmento  $dx$ , las pendientes en los extremos serán:

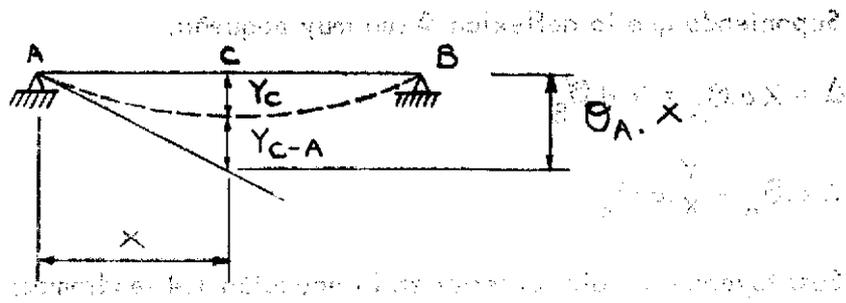
$$\theta_A = \int_0^L \frac{X}{L} \frac{Mx.dx}{EI} \quad (1.7)$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{(L-X)}{L} \frac{Mx.dx}{EI} \quad (1.8)$$

Las ecuaciones (1.7) y (1.8) son ahora las reacciones en la viga conjugada, o sea que las pendientes en los extremos de la viga real, son las reacciones en los extremos de la viga conjugada.

La pendiente en cualquier punto de la viga real, será la pendiente en un extremo, menos la diferencia de pendientes entre el extremo y el punto considerado, representada por el área del diagrama de momento sobre  $EI$  comprendido entre estos dos puntos, o sea la carga sobre la viga conjugada entre dichos puntos. Por lo tanto, la pendiente en un punto cualquiera de la viga real, equivale a la reacción en un extremo de la viga conjugada, menos la carga elástica entre el mismo y el punto considerado, que es el corte en esta sección de la viga con

jugada, lo que confirma el enunciado del primer principio del método.



Viga Real elástica en toda su longitud.

Fig. 1.4

Suponiendo ahora a la viga real, elástica en toda su longitud y deflectada en la forma que se indica en la Fig. 1.4

- Y.C = Deflexión del punto C.
- Y.C-A = Desviación tangencial de C respecto a la tangente a la curvatura en el soporte A.

De acuerdo al método de Area-Momento, Y.C-A será el momento del diagrama de  $M/EI$ , entre los puntos A y C, respecto a C.

$$Y.C = \theta_A \cdot X + Y.C-A \tag{1.9}$$

Recordando que  $\theta_A$  es la reacción de la izquierda en la viga conjugada, se puede deducir que la ecuación (1.9) constituye el momento interno de la viga conjugada en la sección C lo que confirma el enunciado del segundo principio.

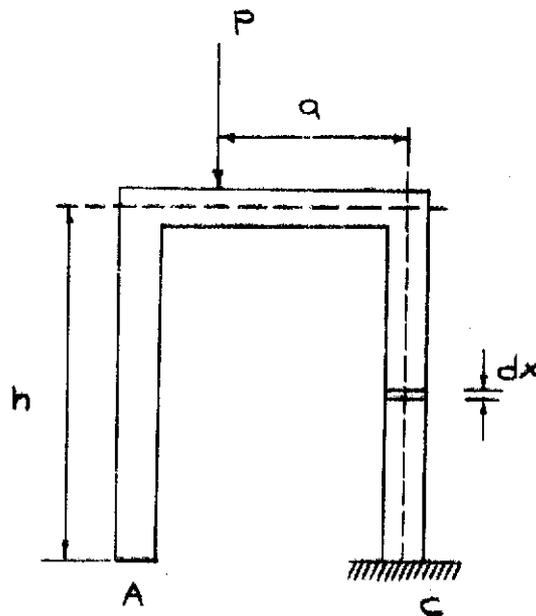
De acuerdo a lo anterior, se establecen las siguientes relaciones entre la viga real y la viga conjugada:

- 1) La luz libre de la viga conjugada es igual a la luz libre de la viga real.
- 2) La carga que actúa sobre la viga conjugada, es el diagrama  $M/EI$  de la viga real.
- 3) El corte en cualquier sección de la viga conjugada, es igual a la pendiente de la sección correspondiente de la viga real.
- 4) El momento en cualquier sección de la viga conjugada es igual a la deflexión en la sección correspondiente a la viga real.

Para que tales relaciones se cumplan debe existir congruencia entre los soportes de la viga real y los de la viga conjugada. Por ejemplo si la viga real tiene un soporte empotrado, el correspondiente en la viga conjugada debe ser un voladizo por no existir pendiente ni deflexión, lo cual se traduce en que no hay corte ni momento en la viga conjugada. Si el soporte en la viga real es simple, también lo será en la viga conjugada, ya que en la primera existe pendiente que se traduce en corte en la segunda.

### 1.3 LA ESTRUCTURA CONJUGADA

Los principios a demostrar en este método son muy similares a los de la viga conjugada. Considerando un marco en voladizo como el indicado en la Fig. 1.5



Marco en Voladizo

Fig. 1.5.

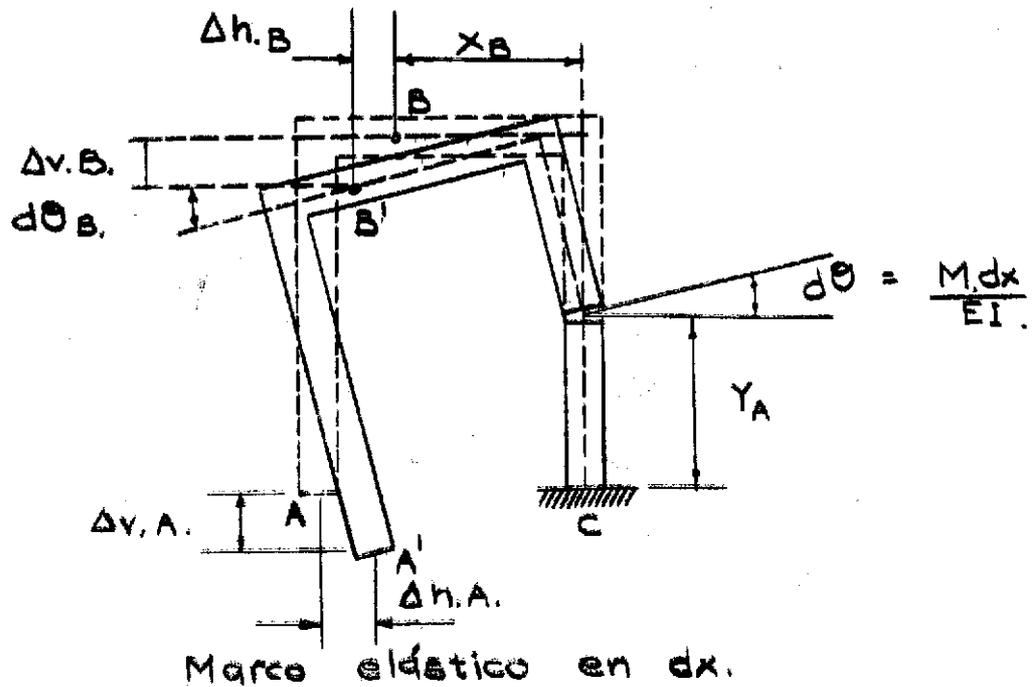


Fig. 1.6.

Bajo la acción de la carga  $P$ , y considerando rígida toda la estructura, con excepción del segmento  $dx$ , el marco se deflectará como se indica en la Fig. 1.6 (exagerando la escala de las deformaciones). El cambio de ángulo en la sección elástica será:

$$d\theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.10)$$

siendo  $M$  el momento producido por la carga  $P$ , en el segmento.

Para evaluar las deflexiones verticales y horizontales en los puntos  $A$  y  $B$ , puede hacerse pasar por los mismos, sistemas de ejes coordenados; de acuerdo al Método de Área-Momento, los desplazamientos serán:

1) En el punto  $A$ :

$$d\theta_A = d\theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.11)$$

$$\Delta v.A = X_a \cdot d\theta = X_a \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.11)$$

$$\Delta h.A = Y_a \cdot d\theta = Y_a \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.11)$$

2) En el punto B:

$$d\theta_B = d\theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.12)$$

$$\Delta_{v.B} = X_b \cdot d\theta = X_b \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.12)$$

$$\Delta_{h.B} = Y_b \cdot d\theta = Y_b \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.12)$$

En la Fig. 1.7 se representa una estructura con miembros de igual longitud e iguales posiciones a los del marco dado, pero situada en un plano horizontal y con el extremo A empotrado; a tal estructura se le denomina "Estructura Conjugada" y al igual que en el caso de la viga conjugada, se considera cargada con el diagrama  $M/EI$  de la estructura original.

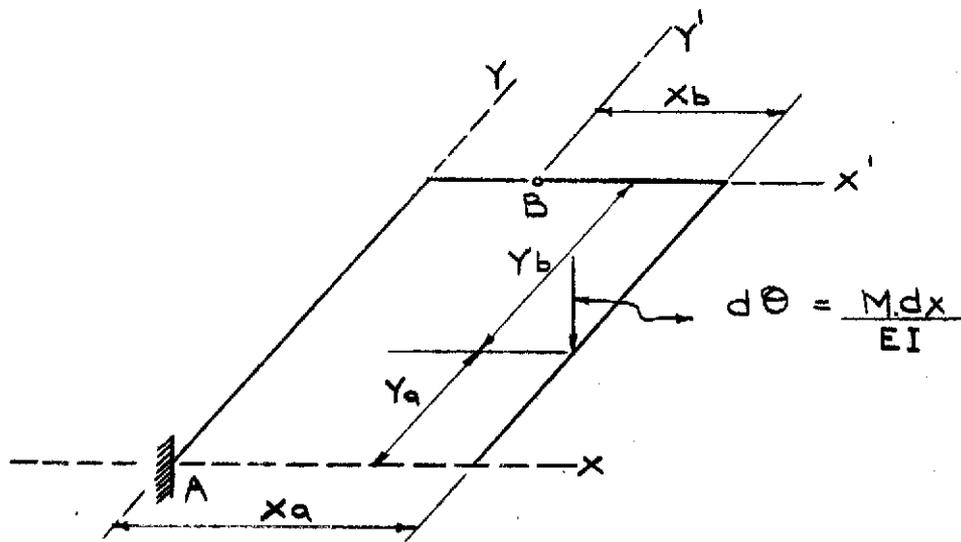


Fig. 1.7.

Si suponemos el cambio de ángulo como una carga concentrada en el punto que corresponde a la posición del segmento  $dx$  en la estructura original, al hacer pasar ejes coordenados por los puntos A y B, se originan los siguientes momentos respecto a los mismos:

1) En el punto A:

$$M_y = X_a \cdot d\theta = X_a \frac{M \cdot dx}{EI} = \Delta_{v.A} \quad (1.13)$$

$$M_x = Y_a \cdot d\theta = Y_a \frac{M \cdot dx}{EI} = \Delta_{h.A} \quad (1.13)$$

2) En el punto B:

$$M_y = X_b \cdot d\theta = X_b \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} = \Delta_{v.B} \quad (1.14)$$

$$M_x = Y_b \cdot d\theta = Y_b \cdot \frac{M \cdot dx}{EI} = \Delta_{h.B} \quad (1.14)$$

Los cortes en ambos puntos serán:

$$V_A = V_B = d\theta = \frac{M \cdot dx}{EI} \quad (1.15)$$

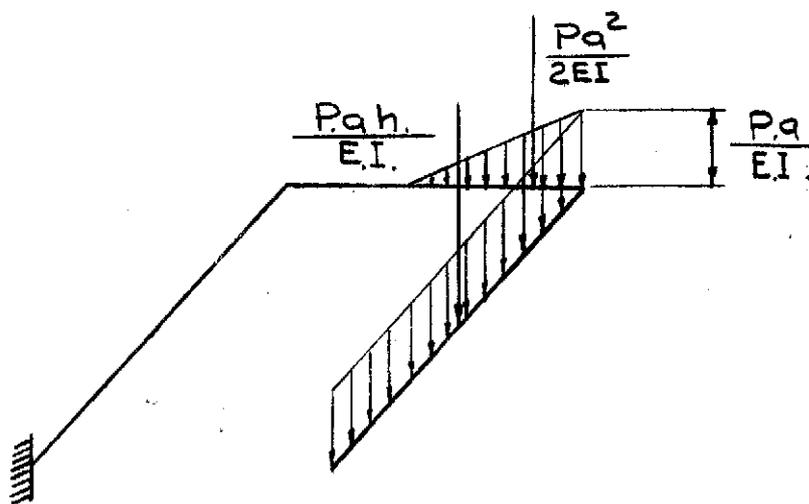


Fig. 1.8.

Al suponer elástico el marco en toda su longitud, y no solo en el segmento  $dx$ , el diagrama de momento sobre  $EI$  o carga elástica sobre la estructura conjugada, resultará como se indica en la Fig. 1.8. Puede verse que si la forma del diagrama  $M/EI$  permite determinar su centro de gravedad, toda el área puede suponerse actuando en el mismo.

Las discusiones anteriores nos llevan a establecer los principios básicos para definir la estructura conjugada:

- 1) La Estructura Conjugada para una estructura original, es exactamente igual a esta en lo que respecta a longitud de miembros y su posición relativa, considerándose a la primera colocada en un plano horizontal.
- 2) Puede suponerse a la estructura conjugada, compuesta de miembros representados por líneas y cargados con el diagrama de momento sobre  $EI$ , como en la viga conjugada; o bien considerar que los miembros de la estructura conjugada tienen un ancho igual al

valor  $1/EI$ , que es el criterio seguido en el método de la "Analogía de la columna" como se verá más adelante, es decir que en una longitud  $dx$  de un miembro, el área será  $dx/EI$  a la cual se le denomina área elástica y representa a la deformación elástica por flexión en la sección correspondiente de la viga real en una longitud  $dx$  y causada por un momento unitario. A la carga sobre la estructura conjugada se le denomina carga elástica.

- 3) La estructura Conjugada, debe estar en equilibrio bajo la acción de los diagramas de momento sobre  $EI$  de la estructura real, actuando como cargas.
- 4) El corte en cualquier sección de la estructura conjugada, es la pendiente en la sección correspondiente de la estructura real.
- 5) El momento interno en cualquier sección de la estructura conjugada, es la deflexión correspondiente de la estructura real en una dirección perpendicular al brazo de palanca usado para encontrar cualquier momento en particular.
- 6) El extremo de la estructura conjugada, correspondiente al extremo de la estructura real que se flexiona, tiene un soporte empotrado.

#### 1.4 EL CENTRO ELASTICO

Se define como "Centro Elástico" o punto neutral, al centroide de la sección de una estructura conjugada, la cual tiene un espesor en cualquier punto igual a  $1/EI$  como ocurre en el método de la Analogía de la Columna.

El método del Centro Elástico o punto neutral, presenta mucha semejanza al de la columna Análoga como se verá más adelante; en el primero se toman como redundantes: Momento ( $M_0$ ), reacción vertical ( $V_0$ ) y reacción horizontal ( $H_0$ ) en el centro elástico, las cuales se determinan inicialmente y con base en ellas se calcula el momento en cualquier punto de la estructura considerada; mientras que en el segundo, los momentos en una sección cualquiera de la estructura pueden ser calculados directamente.

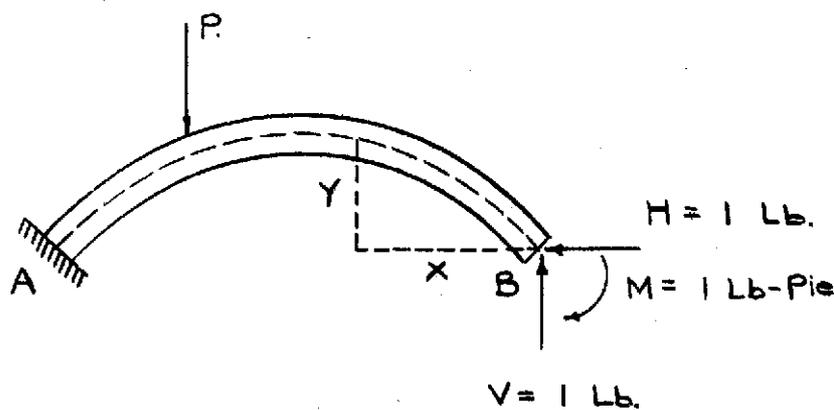


Fig. 1.9

Para desarrollar el método del centro elástico, considerar la estructura curva de la Fig. 1.9 doblemente empotrada, sometida a la acción de la carga  $P$  y cuyo soporte a la derecha ha sido sustituido por fuerzas virtuales  $H = 1$ ,  $V = 1$  y un momento unitario, transformándose en un cantiliver. Si el extremo libre es tomado como centro de coordenadas, los tres momentos virtuales producidos en cualquier punto de la estructura por las reacciones unitarias son:

$m' = 1$  lb.-pie, causado por  $M = 1$  lb.-pie.

$m' = x$  lb.-pie, causado por  $V = 1$  lb.

$m' = y$  lb.-pie, causado por  $H = 1$  lb.

Las deflexiones resultantes, cuando las redundantes toman su verdadero valor y no un valor unitario como en la Fig. 1.9 serán entonces;

$$\Delta X.(P) = H. [\delta_x(H = 1)] + V [\delta_x(V = 1)] + M [\delta_x(M = 1)] \quad (1.16)$$

$$\Delta Y.(P) = H. [\delta_y(H = 1)] + V [\delta_y(V = 1)] + M [\delta_y(M = 1)] \quad (1.17)$$

$$\theta.(P) = H. [\delta\theta(H = 1)] + V [\delta\theta(V = 1)] + M [\delta\theta(M = 1)] \quad (1.18)$$

La ecuación (1.16) puede interpretarse en la forma siguiente: el desplazamiento en sentido horizontal del extremo en voladizo  $B$ , debido a la acción de la carga  $P$  sobre la estructura, es igual al valor real de  $H$  por la deflexión horizontal cuando se supone la redundante  $H$  igual a la unidad, más el valor real de  $V$ , por la deflexión horizontal cuando se supone la redundante  $V$  igual a la unidad, más el valor real de  $M$  por la deflexión horizontal, cuando se supone a la redundante  $M$  igual a la unidad. En igual forma pueden interpretarse las ecuaciones (1.18) y (1.17).

Las deflexiones lineales y angulares en  $B$  cuando se supone a las redundantes con valores unitarios, pueden ser evaluadas en la forma siguiente:

- 1) La deflexión angular debida al momento unitario, es el área elástica de la estructura conjugada:

$$\delta\theta (M = 1) = \int \frac{1 \cdot ds}{EI} = \int \frac{ds}{EI} = A$$

- 2) La deflexión angular ocasionada por la reacción horizontal unitaria en  $B$ , es igual a la deflexión horizontal debida al momento unitario en  $B$  y ambas equivalen al momento estático respecto al eje  $X-X$ .

$$\delta\theta(H = 1) = \delta_x(M = 1)$$

$$= \int \frac{1 \cdot Y \cdot ds}{EI} = \int \frac{Y \cdot ds}{EI}$$

$$= Q_x.$$

- 3) La deflexión angular ocasionada por la reacción vertical unitaria en  $B$ , es igual a la deflexión vertical debida al momento unitario en  $B$  y ambas equivalen al momento es

tático respecto al eje Y-Y

$$\begin{aligned}\delta_{\theta} (V = 1) &= \delta_y (M = 1) \\ &= \int \frac{1 \cdot X \cdot ds}{EI} = \int \frac{X \cdot ds}{EI} \\ &= Q_y\end{aligned}$$

- 4) La deflexión horizontal, ocasionada por la reacción horizontal unitaria en B, equivale al momento de inercia respecto al eje X-X.

$$\begin{aligned}\delta_x (H = 1) &= \int \frac{Y \cdot Y \cdot ds}{EI} = \int \frac{Y^2 \cdot ds}{EI} \\ &= I_x.\end{aligned}$$

- 5) La deflexión vertical ocasionada por la reacción vertical unitaria en B, equivale al momento de inercia respecto al eje Y-Y.

$$\begin{aligned}\delta_y (V = 1) &= \int \frac{X \cdot X \cdot ds}{EI} = \int \frac{X^2 \cdot ds}{EI} \\ &= I_y.\end{aligned}$$

- 6) La deflexión vertical ocasionada por la reacción horizontal unitaria en B, es igual a la deflexión horizontal ocasionada por la reacción vertical unitaria en B y ambas equivalen al producto de inercia de las áreas elásticas de la estructura conjugada alrededor de los ejes X-X y Y-Y.

$$\begin{aligned}\delta_y (H = 1) &= \delta_x (V = 1) \\ &= \int \frac{X \cdot Y \cdot ds}{EI} \\ &= I_{xy}.\end{aligned}$$

En forma similar pueden ser evaluadas las deflexiones, lineales y angulares del extremo en voladizo, ocasionadas por el sistema de cargas que actúa sobre la estructura y que en este caso se constituye por la carga P:

- 1) La deflexión angular debida a la carga P, equivale al área total del diagrama  $M/EI$ , que se considera la carga elástica sobre la estructura conjugada:

$$\theta (P) = \int \frac{M \cdot ds}{EI} = \int \theta_S = W$$

- 2) La deflexión horizontal debida a la carga P, equivale al momento del área del diagra

ma  $M/EI$ , respecto al eje X-X.

$$\Delta X (P) = \int \frac{M \cdot Y \cdot ds}{EI} = \int \Theta_S \cdot Y$$

$$= M_x$$

- 3) La deflexión vertical debida a la carga P, equivale al momento del área del diagrama  $M/EI$ , respecto al eje Y-Y.

$$\Delta Y (P) = \int \frac{M \cdot X \cdot ds}{EI} = \int \Theta_S \cdot X$$

$$= M_y$$

Sustituyendo los valores de las deflexiones lineales y angulares, provocadas por las redundantes con valores unitarios y las que ocasiona la carga P, en las ecuaciones (1.16), (1.17), y (1.18) se obtienen los siguientes valores:

$$M_x = H [I_x] + V [I_{xy}] + M [Q_x] \quad (1.19)$$

$$M_y = H [I_{xy}] + V [I_y] + M [Q_y] \quad (1.20)$$

$$W = H [Q_x] + V [Q_y] + M [A] \quad (1.21)$$

Si el origen de coordenadas o punto de aplicación de las reacciones redundantes H, V y M es cambiada al centro elástico o centro de las cargas elásticas, siendo uno de los ejes XX o YY, eje de simetría, los momentos estáticos de la sección y el producto de inercia son cero, puesto que los primeros momentos son nulos respecto a ejes que pasan por el centroide de una sección y el producto de inercia también lo es para ejes principales, y un eje de simetría es siempre principal y el otro eje principal tiene dirección perpendicular al primero.

$$\therefore Q_x = 0$$

$$Q_y = 0$$

$$I_{xy} = 0$$

Sustituyendo los anteriores valores en las ecuaciones (1.19), (1.20) y (1.21), estas se reducen a la forma siguiente:

$$M_x = H_o [I_x]$$

$$M_y = V_o [I_y]$$

$$W = M_o [A]$$

Despejando  $H_o$ ,  $V_o$  y  $M_o$  que son los valores de las reacciones redundantes actuando ya no en el extremo supuesto en valadizo, sino en el centro elástico o punto neutral resultan los siguientes valores:

$$H_o = \frac{M_x}{I_x} \quad (1.22)$$

$$V_o. = \frac{My}{I_y} \quad (1.23)$$

$$M_o. = \frac{W}{A} \quad (1.24)$$

Uniendo el centro elástico o punto neutral O, con el extremo B supuesto en voladizo, por medio de un brazo o ménsula completamente rígida e inelástica, tal como se indica en la Fig. 1.10. se obtiene un punto de aplicación para las redundantes en el centro elástico.

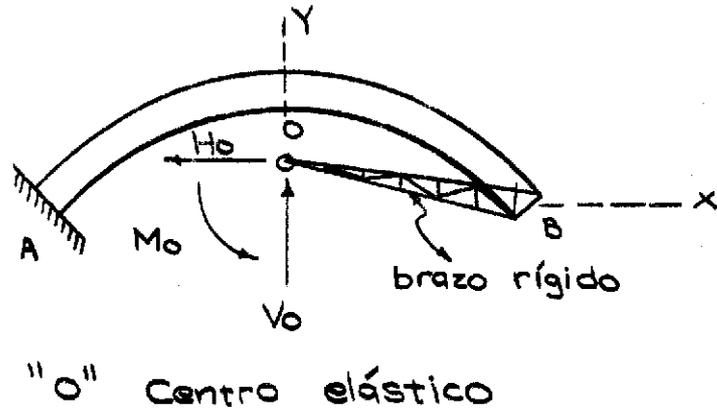


Fig. 1.10.

Si la estructura es simétrica, el centro elástico estará situado sobre el eje de simetría; para el caso considerado, el eje vertical Y-Y es de simetría, la altura sobre el X'-X' original que pasa por el soporte B, puede ser establecida dividiendo el momento estático respecto a este eje sobre el área elástica:

$$\bar{Y} = \frac{Qx'}{A} \quad (1.25)$$

Cuando la estructura es asimétrica, las coordenadas del centro elástico respecto a dos ejes coordenados cualesquiera, se obtienen dividiendo los primeros momentos o momentos estáticos respecto a estos ejes sobre el área elástica de la estructura conjugada:

$$\bar{Y} = \frac{Qx}{A} \quad (1.26)$$

$$\bar{X} = \frac{Qy}{A} \quad (1.27)$$

## 1.5 CONSIDERACIONES SOBRE COLUMNAS

Según se verá más adelante, el análisis de una columna corta cargada excéntricamente

te, es una situación que constantemente se presenta en el método de Analogía de la columna, por lo que es importante tener ciertos conocimientos al respecto, para poder comprender sin problemas dicho método.

### 1.5.1 GENERALIDADES

Las columnas son miembros estructurales, generalmente sometidas a compresión, aunque también se dá el caso que trabajen a tensión; pueden ser de sección transversal circular, cuadrada, rectangular, etc. Las columnas de acuerdo a su longitud se clasifican en dos grupos: columnas propiamente dichas y bloques a compresión o columnas cortas.

La Esbeltez de una columna, se define como la relación de su longitud al radio de giro de su sección transversal con respecto al eje centroidal que es perpendicular al plano en que la columna se flexiona o tiende a flexionarse. No hay un valor concreto de esbeltez que diferencie una columna corta de una común.

Las columnas pueden estar sometidas a dos clases de cargas que son:

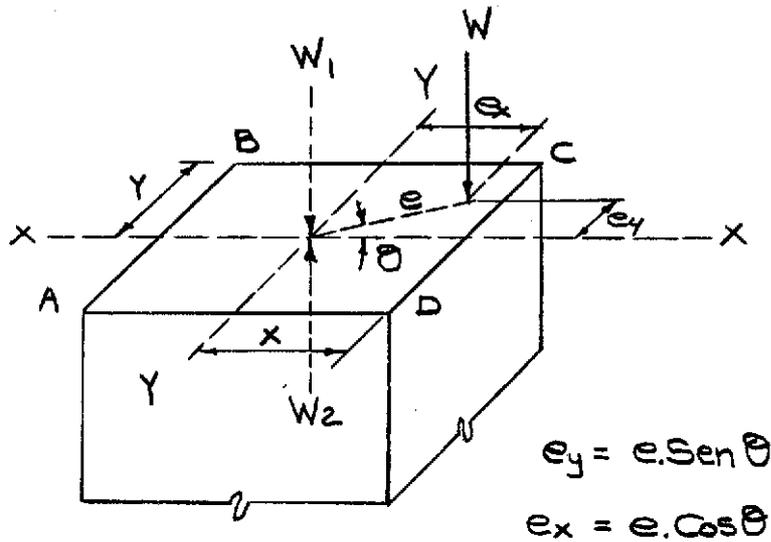
- 1) Cargas centrales o axiales: reciben este nombre aquellas cargas cuya línea de acción pasa por los centroides de las secciones extremas de la columna.
- 2) Cargas Excéntricas: son aquellas cuyo punto de aplicación, no coincide con los centroides de las secciones extremas.

### 1.5.2 COLUMNA CORTA SIMETRICA, CARGA EXCENTRICAMENTE

Considerando la columna corta de la Fig.1.11, bajo la acción de la carga  $W$ , se observa que dicha carga provocará en una sección transversal, esfuerzos de compresión y esfuerzos de flexión, debidos a los momentos inducidos alrededor de los ejes de simetría centroidales. La carga excéntrica  $W$  puede descomponerse en una carga axial  $W_1$  y un par motivado por las cargas  $W$  y  $W_2$ , cuyo momento será  $W.e$ , que puede descomponerse en las direcciones de los ejes de simetría, resultando los momentos respecto a los mismos así:

$$M_y = W.e \cdot \cos \theta \quad (1.28)$$

$$M_x = W.e \cdot \sin \theta \quad (1.29)$$



Columna corta simétrica con una carga excéntrica P

Fig. 1.11

Los esfuerzos debidos a un momento flexionante, son expresados por la conocida y familiar fórmula:

$$f = \frac{M \cdot c}{I} \quad (1.30)$$

siendo:

- f = Esfuerzo por flexión en Lbs/Pulg<sup>2</sup>
- M = Momento flexionante en Lb-Pulg.
- c = Distancia del punto considerado al eje neutro de la sección en Pulg.
- I = Momento de inercia de la sección en Pulg<sup>4</sup>, respecto al eje neutro.

En la Fig. 1.11, la máxima compresión ocurre en el punto c donde el esfuerzo resultante será:

$$f_c = \frac{W_1}{A} + \frac{M_x \cdot Y}{I_x} + \frac{M_y \cdot X}{I_y}$$

sustituyendo valores:

$$f_c = \frac{W}{A} + \frac{W \cdot e \cdot \text{sen } \theta \cdot Y}{I_x} + \frac{W \cdot e \cdot \text{cos } \theta \cdot X}{I_y}$$

$$\therefore f_c = \frac{W}{A} + \frac{W \cdot e_y \cdot Y}{I_x} + \frac{W \cdot e_x \cdot X}{I_y} \quad (1.31)$$

### 1.5.3 FLEXOCOMPRESION EN COLUMNAS CORTAS ASIMETRICAS

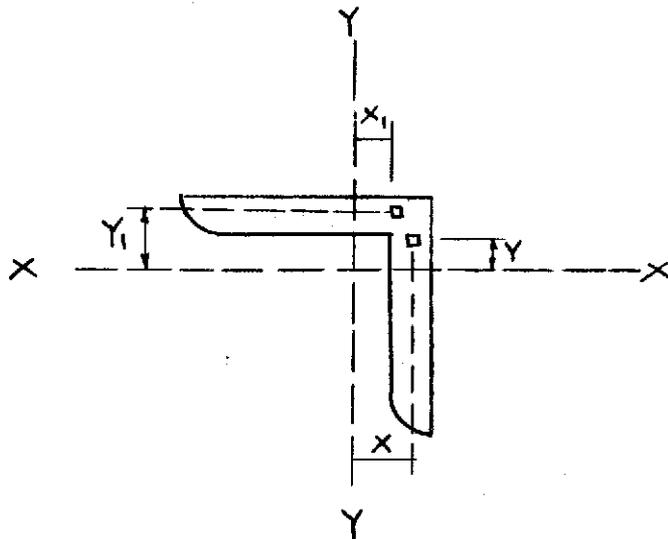
La discusión anterior se ajusta a columnas cortas, cuya sección transversal tiene como mínimo un eje de simetría utilizable, pero la situación se complica cuando no existe tal eje de simetría, debiendo hacerse algunas correcciones a la fórmula de esfuerzos por flexión  $Mc/I$ ; resulta un error bastante común el tratar de diseñar vigas o piezas estructurales empleando la fórmula anterior, lo que conduce a resultados inexactos.

#### 1.5.3.1 Ecuación General para Flexión en Columnas Cortas

La fórmula para flexocompresión, donde el esfuerzo total en una sección de columna es:

$$f = \frac{W}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

es un caso especial donde la sección transversal "A" sometida a una carga  $W$ , tiene un eje de simetría. Considerando ahora una columna de sección transversal asimétrica, como el angular de lados iguales, mostrado en la Fig. 1.12, sobre el que actúa una carga  $W$  en el punto de coordenadas  $X_1$  e  $Y_1$  en dirección perpendicular al plano del papel, siendo  $f$  el esfuerzo unitario en las fibras de la columna; como ejes de referencia se tomarán el X-X y el Y-Y paralelos a los lados del angular y que pasan por el centroide de la sección, no siendo ninguno eje de simetría. Las coordenadas  $Z$  normales al plano del papel, equivaldrán a los esfuerzos unitarios en cualquier punto de la sección y pueden representarse por la ecuación general de un plano al suponerlos en una distribución planar.



Columna con carga  
excéntrica.  
Fig. 1.12.

El esfuerzo en un punto de coordenadas X e Y será:

$$f = z = ax + by + c \quad (1.32)$$

La carga W que actúa sobre la columna originando esta distribución planar de esfuerzos, puede ser evaluada por integración del producto de las áreas diferenciales por el esfuerzo unitario en cada una de ellas. Los momentos respecto a los ejes coordenados se pueden evaluar multiplicando la integral anterior por las distancias y  $\delta x$  tal como se indica a continuación:

$$W = \int f.dA \quad (1.33)$$

$$M_x = \int f.y.dA \quad (1.33)$$

$$M_y = \int f.x.dA \quad (1.33)$$

Sustituyendo la ecuación 1.32 en las expresiones 1.33, se llega a los siguientes resultados:

$$W = \int (a.x + b.y + c).dA$$

$$\therefore W = a. \int x.dA + b. \int y.dA + c. \int dA \quad (1.34)$$

$$M_x = \int (a.x + b.y + c).y.dA$$

$$M_x = a \int x.y.dA + b. \int y^2.dA + c. \int y.dA \quad (1.35)$$

$$M_y = \int (ax + by + c).x.dA$$

$$M_y = a \int x^2.dA + b. \int x.y.dA + c \int x.dA \quad (1.36)$$

Las propiedades de la columna corta son las siguientes:

$$\int dA = A = \text{Area de la sección transversal.}$$

$$\int x.dA = Q_y = \text{Momento estático respecto al eje Y-Y.}$$

$$\int y.dA = Q_x = \text{Momento estático respecto al eje X-X.}$$

$$\int x^2.dA = I_y = \text{Momento de inercia respecto al eje Y-Y}$$

$$\int y^2.dA = I_x = \text{Momento de inercia respecto al eje X-X.}$$

$$\int x.y.dA = I_{x.y} = \text{Producto de inercia respecto al sistema de ejes X-Y.}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1.34), (1.35) y (1.36) se obtienen las siguientes expresiones:

$$W = a.Q_y + b.Q_x + c.A \quad (1.37)$$

$$M_x = a.l_{xy} + b.l_x + c.Q_x \quad (1.37)$$

$$M_y = a.l_y + b.l_{xy} + c.Q_y \quad (1.37)$$

Según condición inicial, los ejes de referencia pasan por el centroide de la sección y por consiguiente:

$$Q_x = 0 \quad Q_y = 0$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (1.37), estas se reducen a la forma siguiente:

$$W = c.A \quad (1.38)$$

$$M_x = a.l_{xy} + b.l_x \quad (1.38)$$

$$M_y = a.l_y + b.l_{xy} \quad (1.38)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas (1.38), se establecen los valores de las constantes a, b, y c:

$$c = \frac{W}{A} \quad (1.39)$$

$$b = \frac{M_x.l_y - M_y.l_{xy}}{l_x.l_y - l_{xy}^2} \quad (1.39)$$

$$a = \frac{M_y.l_x - M_x.l_{xy}}{l_x.l_y - l_{xy}^2} \quad (1.39)$$

Sustituyendo los valores de las constantes en la ecuación (1.32) para los esfuerzos en las fibras de la columna:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{(M_y.l_x - M_x.l_{xy}).x}{l_x.l_y - l_{xy}^2} + \frac{(M_x.l_y - M_y.l_{xy}).y}{l_x.l_y - l_{xy}^2} \quad (1.40)$$

Esta es la ecuación general para flexión en columnas cortas, la que también se puede expresar en la forma siguiente:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{(M_y - \frac{M_x.l_{xy}}{l_x}).x}{l_y(1 - \frac{l_{xy}^2}{l_x.l_y})} + \frac{(M_x - \frac{M_y.l_{xy}}{l_y}).y}{l_x(1 - \frac{l_{xy}^2}{l_x.l_y})} \quad (1.41)$$

o bien de esta otra forma:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_y.x}{l_y} + \frac{M_x.y}{l_x} \quad (1.42)$$

Donde:

$$M_y' = M_y - M_x \cdot \left(\frac{I_{xy}}{I_x}\right)$$

$$I_y' = I_y \left(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x \cdot I_y}\right)$$

$$M_x' = M_x - M_y \cdot \left(\frac{I_{xy}}{I_y}\right)$$

$$I_x' = I_x \left(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x \cdot I_y}\right)$$

Los signos de los momentos  $M_x$  y  $M_y$  depende de los de las coordenadas  $X_1$  e  $Y_1$  del punto de carga. En general las coordenadas  $X$  e  $Y$  de un punto son consideradas positivas cuando este se sitúa en el primer cuadrante.

El uso de las ecuaciones (1.40), (1.41) o (1.42), ofrece un método general de obtener los esfuerzos provocados en cualquier punto de la sección transversal de la columna corta cargada excéntricamente, pudiendo emplearse cualquier par de ejes coordenados que pasen por el centroide de la sección y que no necesitan ser ejes principales. Si se requiere el máximo esfuerzo en las fibras de la columna, la referencia debe hacerse al eje neutro.

### 1.5.3.2 Eje Neutro

En la sección transversal de una columna es aquel en que los esfuerzos teóricamente son iguales a cero. El máximo esfuerzo se produce en la fibra extrema a partir del eje neutro. Para definir la posición del eje neutro, hay que igualar a cero la ecuación 1.40 para que se cumpla la condición de que a lo largo del mismo, los esfuerzos en las fibras de la columna son nulos. La ecuación para el eje neutro será entonces:

$$\frac{W}{A} + \frac{(M_y \cdot I_x - M_x \cdot I_{xy})x}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} + \frac{(M_x \cdot I_y - M_y \cdot I_{xy})y}{I_x \cdot I_y - I_{xy}^2} = 0 \quad (1.43)$$

Para determinar las intersecciones del eje neutro con los ejes  $XX$  o  $YY$ , igualar a cero las distancias  $y$  ó  $x$  respectivamente. El eje neutro se emplea en la localización del punto de momento máximo.

### 1.5.3.3 Ejes Principales

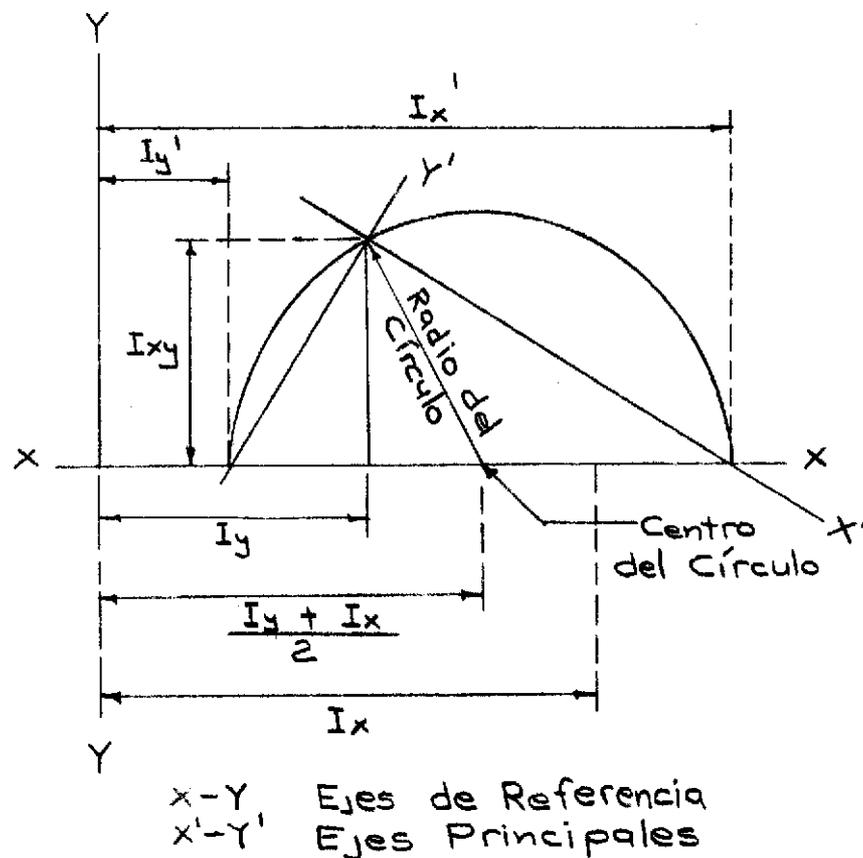
Para el centroide de la sección transversal de la columna, son aquellos con respecto a los cuales los momentos de inercia son máximo y mínimo, en relación con los de cualquier otro sistema de ejes. Puede demostrarse que por cualquier punto de una área, pueden trazarse dos ejes coordenados para los cuales los momentos de inercia del área son máximo y mínimo

respectivamente, comparados con los de otros ejes cualesquiera, que pasen por el punto en cuestión. Los ejes para los cuales el producto de inercia es cero, son ejes principales y como el producto de inercia de una área es cero para los ejes de simetría estos son ejes principales.

#### 1.5.3.4 Círculo de Inercia

Es un procedimiento gráfico por medio del cual se pueden establecer las direcciones de los ejes principales en forma rápida y sencilla, conociendo los momentos de inercia y producto de inercia respecto a dos ejes cualesquiera que pasen por el punto considerado, tal como se indica en la Fig. 1.13. Para construir el círculo de inercia, el producto de inercia que se plotea como ordenada debe ser descendente a partir del extremo de longitud que representa  $I_y$ , cuando es negativo; si es positivo debe plotearse ascendente.

Conviene el uso de ejes principales si estos pueden ser localizados por simple inspección, como ocurre cuando hay simetría alrededor de uno o ambos ejes.



Círculo de Inercia

Fig. 1.13.

## CAPITULO 2

### EL ARCO ELASTICO

#### 2.1 DEFINICIONES GENERALES

Es difícil formular una definición rigurosa sobre los arcos; son estructuras consistentes que desarrollan reacciones horizontales bajo la acción de cargas verticales; de acuerdo a este principio los marcos rígidos usualmente clasificados por separado, trabajan como arcos y pueden ser considerados como tales. Algunos autores mantienen un criterio más rígido sobre el arco, al que definen como una viga o armazón de forma curva, que desarrolla reacciones con dirección horizontal bajo la acción de cargas verticales. La opinión más generalizada, es la de aceptar la definición de estructura curva para los arcos, como válida, aunque no como una condición absolutamente indispensable, o sea que en otras palabras, el arco verdadero puede describirse como una estructura cuya capacidad de soportar cargas verticales aplicadas, está supeditada al desarrollo de componentes de reacción horizontales, que actúan hacia el centro de la luz libre del arco en los dos apoyos de los extremos.

En un principio se consideró a las estructuras curvas como barras rígidas y fue hasta fines del siglo pasado y principios del presente que cobró importancia el estudio sobre las deformaciones por flexión en barras curvas, hasta llegar a la teoría elástica para el análisis de arcos.

#### 2.2 CLASIFICACION

Los arcos estructurales pueden clasificarse tomando en cuenta diferentes causas.

De acuerdo a su comportamiento estático, los arcos pueden ser:

- 1) Arcos no articulados o fijos: son los que no tienen movimiento en sus bases o apoyos, también llamados doblemente empotrados. Son estáticamente indeterminados al tercer grado (Ver fig. 2.1).
- 2) Arco de una articulación: la articulación puede localizarse en la clave y ser doblemente empotrado, o bien tener un apoyo fijo y el otro articulado; siendo de cualquier manera estáticamente indeterminado de segundo grado. Es un arco sin mérito distintivo y raras veces usado.
- 3) Arco doblemente articulado: tiene por lo general los dos apoyos articulados y es estáticamente indeterminado de primer grado (Ver Fig. 2.2).

- 4) Arco de tres articulaciones: dos articulaciones son los apoyos y la tercera está situada en la cúspide o clave. Son estáticamente determinados y por lo consiguiente no interesan en el desarrollo de este trabajo, ya que la Analogía de la columna se aplica al análisis de Arcos estáticamente indeterminados.

De acuerdo a la forma geométrica, los arcos pueden ser:

- 1) Arcos Simétricos: cuando existe simetría respecto a un eje.
- 2) Arcos Asimétricos: cuando no poseen simetría respecto a ningún eje.

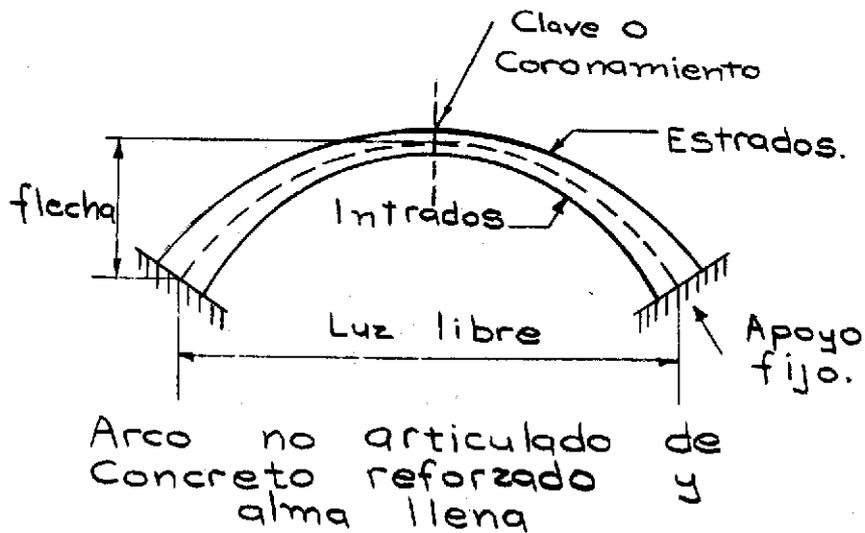


Fig 2.1

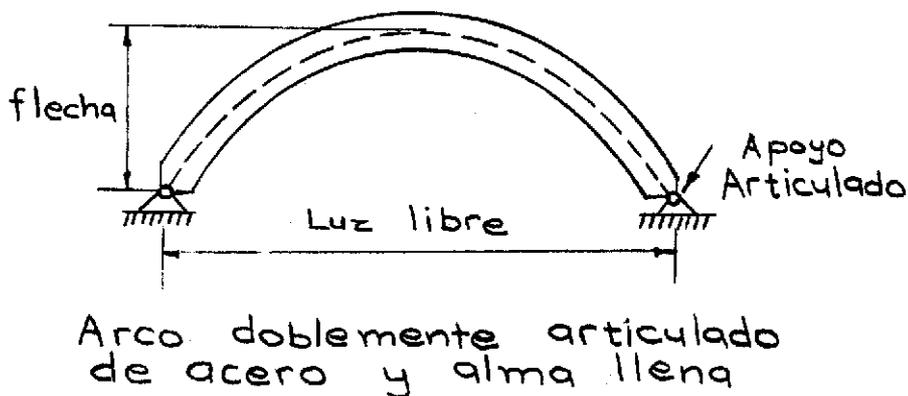
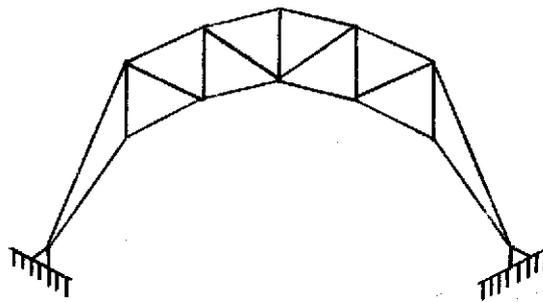


Fig. 2.2

Otra forma de agrupar los arcos, es tomando en cuenta el material de que están construidos. Los más usados son acero, madera y concreto reforzado.

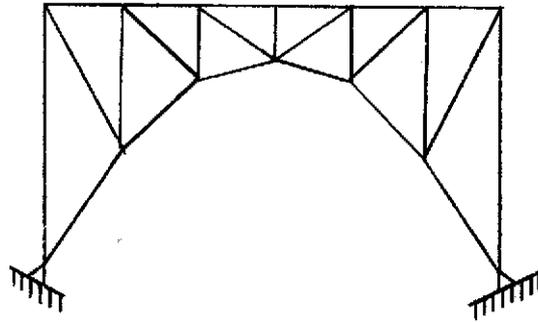
Tomando como base la naturaleza y arreglo de la nervadura, los arcos pueden ser clasi  
sificados así:

- 1) Arcos de Alma llena o nervio sólido: generalmente son de concreto, aunque también los hay de acero en gran cantidad; son en realidad los arcos verdaderos (Fig. 2.1 y 2.2), que pueden ser analizados por el método de la analogía de la columna.
- 2) Arcos de Alma abierta o nervio arriostrado: son también denominados de nervios reforzados o entrelazados; en la mayoría de los casos, se salen del campo de los arcos y se analizan como armaduras, por lo general son de acero y en algunos casos de madera. Existen de diversas clases como: el arco de alma doble tipo media luna mostrado en la Fig. 2.3 que no es muy usado, el arco de descarga de alma abierta de la Fig. 2.4 y otros tantos. La analogía de la columna es aplicable a estos casos, pero no resulta práctico ni ventajoso.
- 3) Arcos Atirantados: son aquellos que están dotados de un tirante de acero u otro material, uniendo entre sí los dos apoyos para proveer las reacciones horizontales; son recomendables si en el lugar de construcción no existen condiciones adecuadas de cimentación.



Arco de alma doble  
tipo media Luna.

Fig. 2.3



Arco de descarga  
de alma abierta

Fig. 2.4

Los arcos de alma llena o pérfil compacto, pueden ser doblemente articulados en los extremos o bien con los apoyos fijos. Los arcos de concreto reforzado que siempre son de alma llena, se construyen por lo general no articulados, o sea con sus apoyos fijos. Los arcos de acero estructural de pérfil compacto, si son de luces cortas que oscilen entre 0 y 50 mts. se construyen generalmente articulados en sus extremos; mientras que para luces muy grandes se acostumbra los apoyos fijos, ya que provocan un incremento en la rigidez que resulta ventajoso en el claro largo, para evitar el incremento de esfuerzos para deflexiones verticales.

### 2.3 VENTAJAS Y USOS DEL ARCO ELASTICO

Desde el punto de vista estético, el arco es tal vez una de las estructuras más satisfactorias.

Estructuralmente, un arco resulta ventajoso debido a las reacciones horizontales que induce, las cuales originan momentos negativos que provocan compresión en los intrados o parte interior de la estructura, lo que provoca una disminución considerable en los momentos ocasionados por los sistemas de carga aplicados, es decir que los momentos internos resultantes en el arco, serán mucho menores que los que se provocarían, si se aplica el mismo sistema de cargas a una viga o bien una armadura con la misma luz libre entre apoyos. Debe tenerse presente, que siempre se producirán esfuerzos axiales considerables en la nervadura del arco. En la Fig. 2.5 se muestran una viga simple y un arco doblemente articulado, con igual luz libre entre apoyos y sujetos a la misma carga, así como los respectivos diagramas de momento; puede verse que en la viga el momento máximo positivo es mucho más alto que en el arco. Los momentos en la nervadura de una estructura se requiere que sean bajos, por lo que el arco resulta más adecuado para cumplir tal condición.

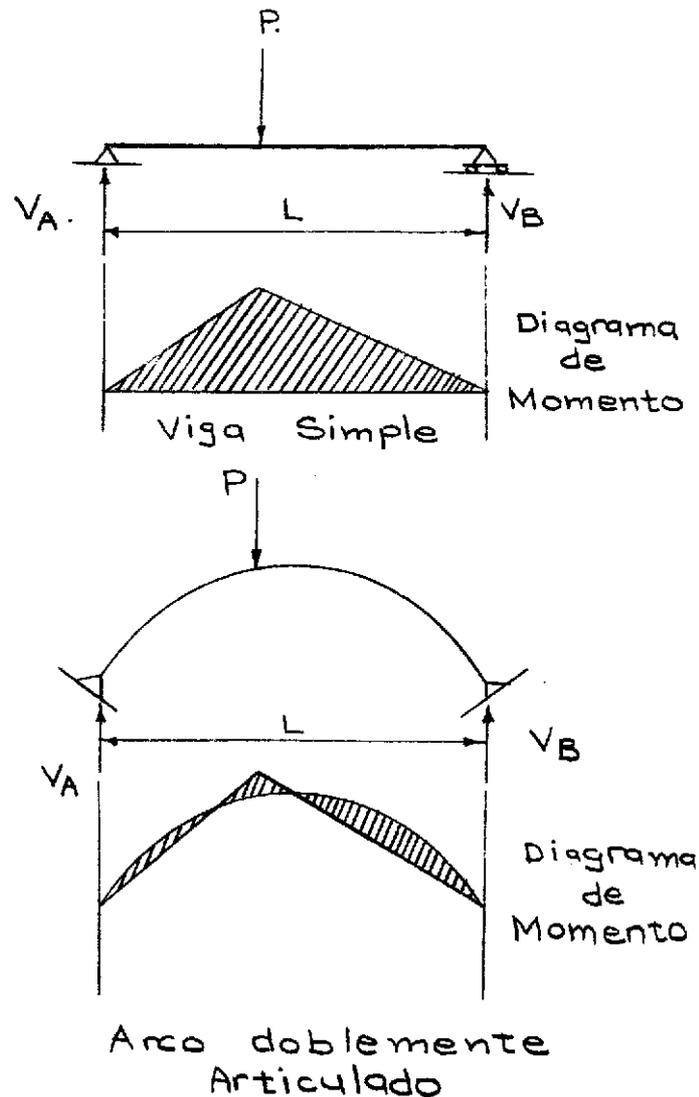


Fig 2.5

La construcción de arcos es ampliamente usada en cierto tipo de edificios tales como: hangares, casas de convenciones, gimnasios y otros similares, pero la más importante aplicación es en el campo de las bóvedas y puentes para carreteras y ferrocarriles, siendo en tales situaciones, donde se obtienen los resultados más favorables. El arco puede ser considerado en construcciones de acero y de concreto reforzado, como uno de los tipos más importantes de estructuras.

#### 2.4 CARACTERISTICAS DEL ARCO

Un arco se define por las dimensiones de su elevación o flecha y la luz libre entre

apoyos, las cuales son dictadas por las condiciones del lugar de construcción, cuando la estructura corresponde a un puente. La economía de un arco, está sujeta en muchos casos a la relación de la flecha a la luz libre, la cual si las circunstancias lo permiten se recomienda que oscile entre 0.25 y 0.30, aunque esto no es general.

Se sabe que los momentos internos en la nervadura del arco deben ser pequeños, por tal razón la forma del eje central del nervio debe aproximarse hasta donde sea posible a la línea de presiones.

#### 2.4.1 LINEA DE PRESIONES

La línea de presiones para un arco, se define como una curva o como una serie de segmentos rectos que representan las resultantes sucesivas de las fuerzas actuantes sobre la estructura; es un polígono, que a mayor número de lados, más se aproxima a una curva.

En la Fig. 2.6 se muestra un arco de tres articulaciones, estáticamente determinado y donde no hay duda sobre la posición de la línea de presiones, la cual debe pasar por las tres articulaciones y sus segmentos se deben interceptar a lo largo de la línea de acción de la carga  $P$ . No existen momentos a lo largo de la línea de presiones; el empuje horizontal  $H$  es igual al momento de la viga simple de igual claro o luz libre  $m_s$  dividido entre la altura a la línea de presiones en el apoyo.

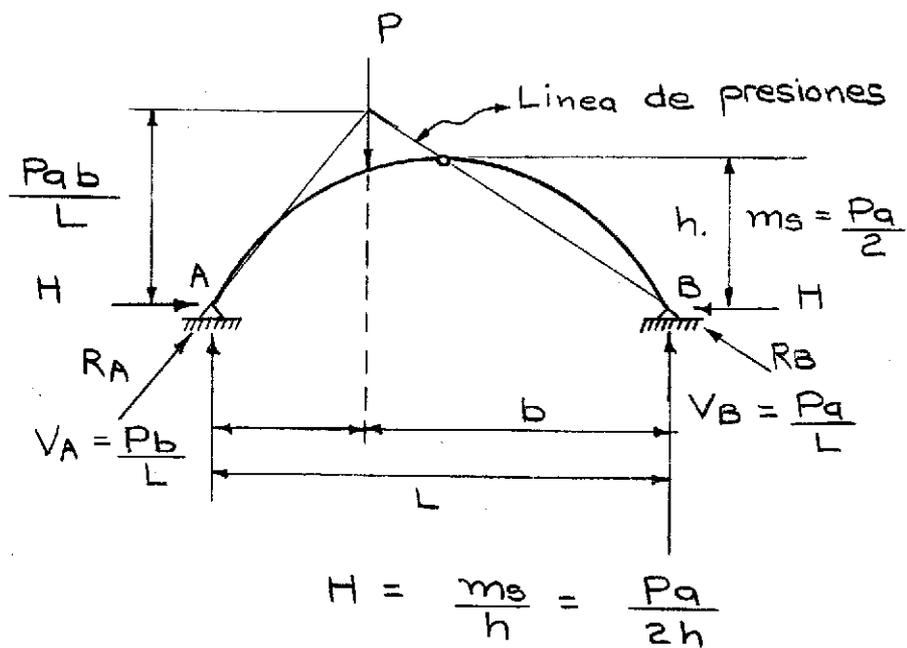


Fig. 2.6

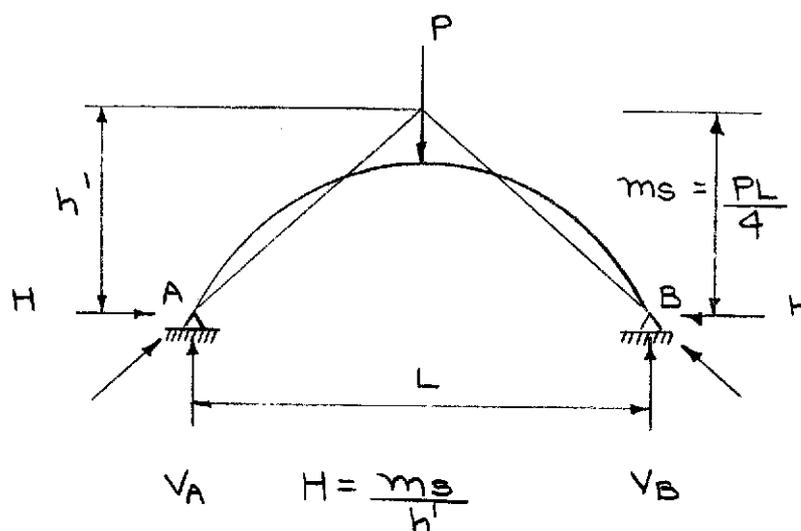


Fig. 2.7

En la Fig. 2.7 se muestra un arco de dos articulaciones, estáticamente indeterminado de primer grado; tomando en cuenta que los soportes son articulados, los desplazamientos horizontales son nulos; lo cual se traduce de acuerdo a los requerimientos de geometría, en que la suma de los productos de cambios de ángulo, por las distancias respecto a una línea que pasa por las articulaciones debe ser cero; por lo tanto la correspondiente línea de presiones debe ser esquematizada tratando de balancear tales productos.

Al dibujar en forma aproximada la línea de presiones, el empuje o reacción horizontal en los apoyos puede ser estimado por la relación entre el momento en la viga simple de luz libre equivalente, sobre la altura  $h'$  referida a la línea de presiones en la cima o clave.

#### 2.4.2 EL ARCO IDEAL

Si el arco tiene una forma tal que su eje central coincide con la línea de presiones, los momentos a todo lo largo de la estructura serán cero, siendo esta la condición del arco ideal; dicha situación se puede lograr tomando la línea de presiones para la carga muerta, pero es difícil de mantener cuando intervienen las cargas vivas, porque en tales casos la línea de presiones cambiará y el arco seguirá manteniendo su forma original; por esta razón es que el arco ideal generalmente se concibe para la aplicación de la carga muerta.

#### 2.4.3 CURVATURAS

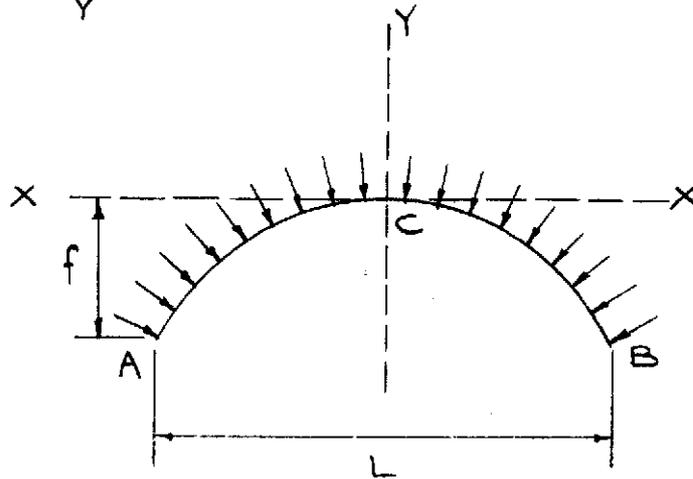
Los tipos de curvaturas empleados en la construcción de arcos son muy variadas y su

uso depende de la aplicación de la carga muerta, así como de las dimensiones requeridas para la luz libre y la flecha.

Algunas de las curvaturas más conocidas son:

- 1) Segmento de círculo: se constituye en el arco ideal, cuando las cargas son aplicadas perpendicularmente a la estructura. En la Fig. 2.8 se representa un arco circular de flecha  $f$  y luz libre entre apoyos  $L$ , cuya ecuación cartesiana respecto a los ejes coordenados que pasan por la clave o coronamiento será:

$$\frac{L^2 + 4.f^2}{4.f} = \frac{X^2 + Y^2}{Y}$$

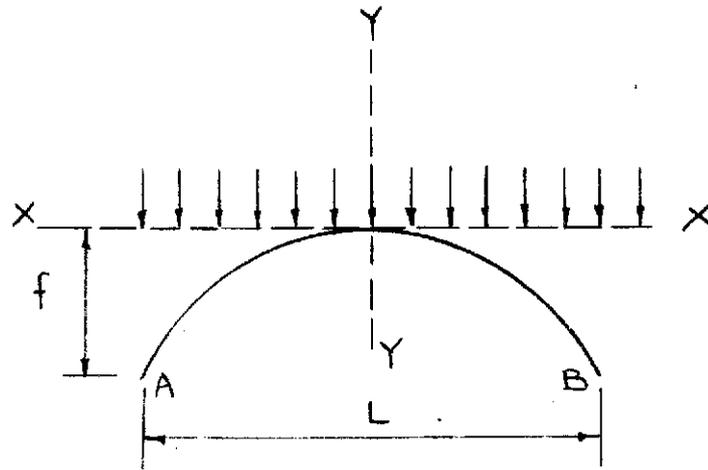


Segmento de Círculo  
y Arco ideal para el sistema de  
cargas indicado. -

Fig. 2.8

- 2) Parábola de 2° grado: es el arco ideal, cuando la carga se distribuye uniformemente sobre la proyección horizontal de la estructura. En la Fig. 2.9 se representa un arco parabólico de 2° grado de flecha " $f$ " y luz libre entre apoyos " $L$ ", cuya ecuación cartesiana respecto a los ejes coordenados que pasan por la clave o coronamiento  $C$ , será:

$$\frac{L^2}{4f} = \frac{X^2}{Y}$$



Parabola de 2° grado  
y arco ideal para el  
sistema de cargas  
indicado

Fig 2.9

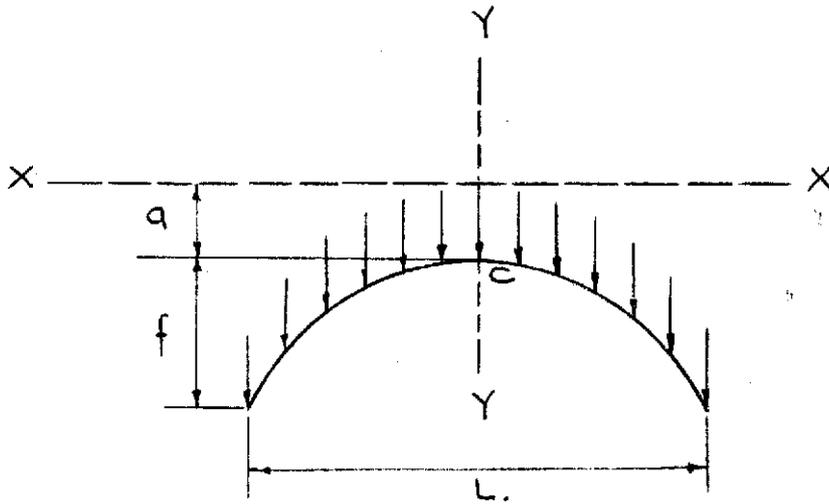
- 3) **Catenaria:** es el arco ideal cuando la carga actúa uniformemente distribuida a lo largo del mismo y no sobre su proyección horizontal como en el caso anterior. En la Figura 2.10 se representa una curva catenaria de flecha "f" y luz libre entre apoyos "L"; la ecuación cartesiana respecto a los ejes coordenados X-Y cuyo origen está a una distancia "a" de la clave o coronamiento "C" del arco será:

$$Y = a \cdot \operatorname{cosh} \frac{X}{a}$$

siendo "a" la relación entre la carga axial o fuerza interna H en el punto "C" o clave del arco, y la carga muerta que actúa sobre el mismo

$$a = \frac{H}{W_m}$$

cos. h = coseno hiperbólico

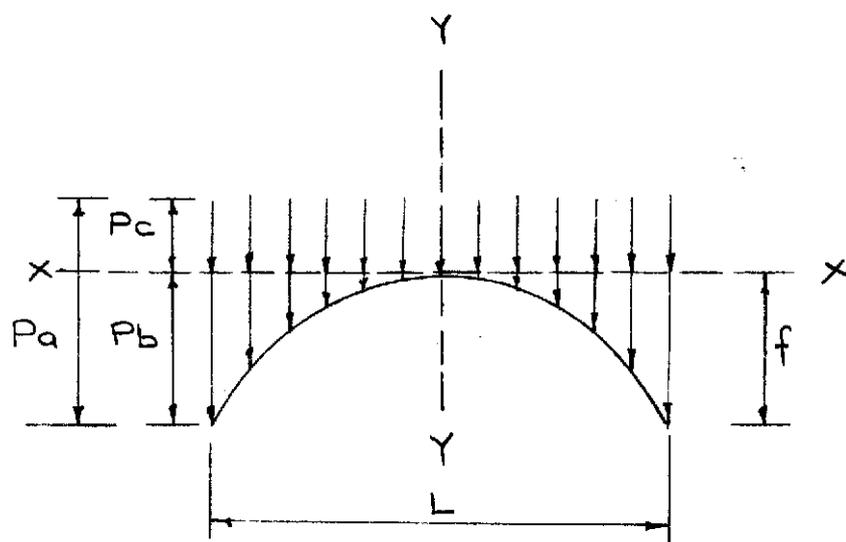


Curva catenaria y arco ideal para el sistema de cargas indicado. -

Fig. 2.10

- 4) Catenoide de Strassner: se considera a la carga muerta integrada por dos términos, el primero constante e igual a la carga en la clave y el segundo variable y proporcional a la distancia entre el eje del arco y la horizontal de clave. La ecuación cartesiana de la curva se expresa en función del parámetro "m" que es la relación de la carga en el arranque a la carga en la clave y cuyo valor puede ser de uno a infinito, pero que en la práctica no debe pasar de 10. También interviene un segundo parámetro "k" que es función del primero "m" (Ver Fig. 2.11). La ecuación cartesiana será:

$$Y = \frac{f}{m-1} \left( \cos h \cdot \frac{X}{L} \cdot k - 1 \right)$$



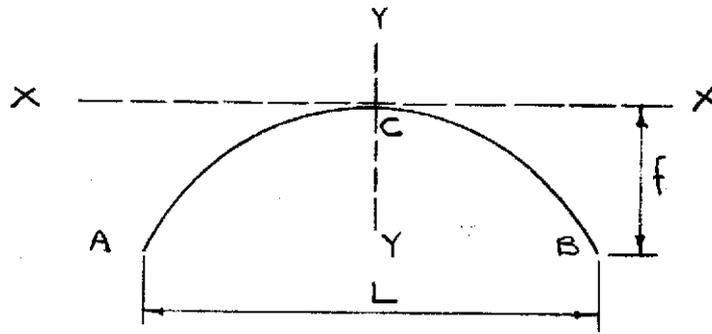
$$m = \frac{P_a}{P_c} \quad R = \log. (m + \sqrt{m^2 - 1})^2$$

Catenoide de Strassner

Fig 2.11

- 5) Curva de Manning: la ecuación involucra un parámetro  $\lambda$  que define el perfil; cuando este parámetro es cero, resulta la parábola cúbica, cuando vale uno resulta la parábola de segundo grado; para valores superiores a la unidad el eje del arco queda bajo la parábola de segundo grado; no se puede exceder el valor 1.5, porque aparece un punto de inflexión en el arranque se desplaza hacia la clave a medida que aumenta  $\lambda$  por sobre este límite. La curva de la ecuación no es simétrica y por lo tanto se opera con la rama de la derecha, la que se duplica por simetría para la izquierda en forma independiente de la ecuación, que para los ejes coordenados que aparecen en la Fig. 2.12 será:

$$Y = \left[ \lambda \left( \frac{2X}{L} \right)^2 + (1 - \lambda) \left( \frac{2X}{L} \right)^3 \right] f$$



$$\text{Si } \mu = 0 \quad y = \left(\frac{2x}{L}\right)^3 f$$

$$\text{Si } \mu = 1 \quad y = \left(\frac{2x}{L}\right)^2 f$$

Si  $\mu = 1.5$  Punto de inflec.  
ción en los  
arranques.

Curva de Manning.

Fig. 2.12

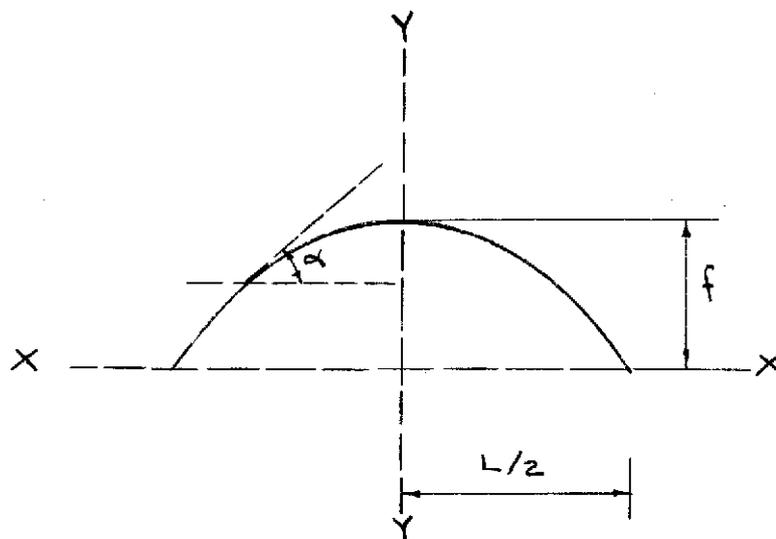
- 6) Parábola de Chalos: en las ecuaciones para definir la curva interviene un parámetro " $\epsilon$ " que es la relación entre la distancia horizontal "X" de la clave al punto considerado y la mitad de la luz libre. La ecuación cartesiana para los ejes indicados en la Fig. 2.13 será:

$$Y = f \cdot (1 - \epsilon^2)$$

$$\text{siendo } \epsilon = \frac{X}{0.5L} = \frac{2X}{L}$$

El ángulo formado por la tangente a la curva en un punto cualquiera y la horizontal, puede determinarse por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{Tg. } \alpha &= \frac{2f \epsilon}{0.5L} \\ &= \frac{4f \cdot \epsilon}{L} \end{aligned}$$



$$\epsilon = \frac{x}{L/2} = \frac{2x}{L}$$

$$y = f(1 - \epsilon^2)$$

Parábola de Chaloso

Fig 2.13

- 7) Curva de Cochrane: la ecuación cartesiana respecto a un sistema de ejes coordenados, cuyo origen coincide con la clave del arco, se puede expresar en función de la flecha "f" y la luz libre "L". La curva no es simétrica y se opera con la rama de la derecha, tomando los mismos valores para el lado izquierdo:

$$Y = \frac{4f}{1 + \frac{3f}{L}} \left[ \left(\frac{X}{L}\right)^2 + 24\left(\frac{X}{L}\right)^5 \frac{f}{L} \right]$$

Existen muchas clases de curvaturas más que tienen aplicación a las estructuras curvas e incluso en la práctica existen arcos que no siguen ninguna ecuación matemática en su desarrollo.

#### 2.4.4 PERALTE

El peralte de un arco, es el espesor del mismo en una sección transversal. De acuerdo

a este concepto los arcos pueden ser de dos clases:

- 1) Arcos de peralte constante: tienen el mismo espesor en toda su longitud; en tales casos un criterio para establecer el peralte es el de F.M. Weld según el cual

$$t_c = L + \frac{L}{10} + \frac{W_v}{200} + \frac{W_m}{400}$$

donde:

$t_c$  = Peralte en pulgadas

$L$  = luz libre entre apoyos en pies

$W_m$  = carga muerta sobreimpuesta en la clave en Lbs./pie

$W_v$  = carga viva a lo largo de la luz libre en Lbs./pie

- 2) Arcos de peralte variable: son muy comunes en concreto reforzado. Para este caso existen varias formas de dimensionar el peralte; algunas importantes son:

- a) Asumir que el peralte varía de acuerdo a la siguiente relación

$$t = (t_c + \frac{X}{20})$$

siendo:

$t$  = Peralte en el punto considerado en pies

$t_c$  = Peralte en la clave o coronamiento en pies

$X$  = distancia horizontal de la clave al punto considerado en pies.

- b) Suponer que la Inercia de la sección transversal a lo largo del nervio de la estructura varía proporcionalmente a la secante del ángulo  $\alpha$  que forma la tangente al arco en el punto considerado, con la horizontal

$$I = I_c \cdot \text{Sec. } \alpha$$

siendo:

$I$  = Momento de Inercia de la sección en el punto considerado

$I_c$  = Momento de Inercia de la sección en la clave o coronamiento.

Los criterios (a) y (b) son aplicables particularmente al caso de arcos parabólicos.

- c) Tomar puntos en los arranques y a 1/4 de la luz libre, para estimar en ellos los peraltes

$$t_{1/4 \text{ luz}} = 1.25 t_c \text{ a } 1.5 t_c.$$

$$t_{\text{arranque}} = 2 t_c \text{ a } 3 t_c$$

Mucho más podría decirse sobre los arcos estructurales, pero el objetivo de este capítulo no fue hacer un estudio completo sobre los mismos, sino únicamente exponer una serie de conceptos generales sobre dicho tema los que se considera pueden resultar de utilidad en la aplicación del método de la Analogía de la columna en el análisis de tales estructuras.

## CAPITULO 3

### LA ANALOGIA DE LA COLUMNA

#### 3.1 GENERALIDADES

El método de "Analogía de la Columna", resulta sumamente importante en el campo de la Ingeniería de estructuras ya que reduce problemas complejos de análisis elástico a un proceso simple y conocido; se aplica a estructuras de una sola luz o claro simple, con tres redundantes como máximo, permitiendo el cálculo directo de los momentos en cualquier punto de las mismas, resultando más ventajoso si dichas estructuras poseen miembros de secciones no uniformes.

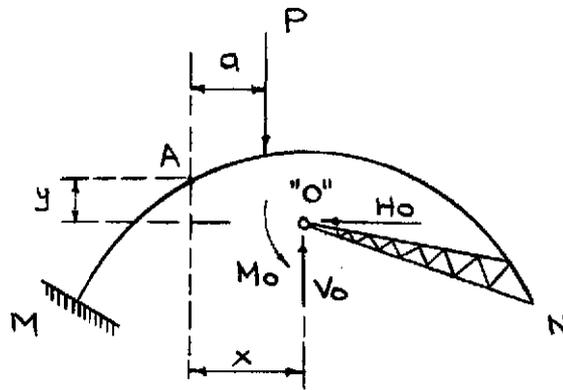
Según se verá más adelante, la Analogía de la Columna en el sentido de la palabra, es una identidad matemática entre los momentos producidos por flexión en un miembro estructural y los esfuerzos en las fibras de la sección transversal de una columna corta cargada excentricamente, denominada "columna análoga" o "columna equivalente"; en otras palabras la analogía de la columna es un arreglo de computación usado para resolver diversos tipos de estructuras estáticamente indeterminadas, o bien para obtener factores para la resolución de otras estructuras, involucra la conocida y familiar operación de calcular esfuerzos en columnas cortas y resulta un proceso enteramente mecánico. El método se emplea con mayor frecuencia en el cálculo de rigideces y factores de transporte así como en el análisis de marcos y arcos.

#### 3.2 DESARROLLO DEL METODO

Los principios, fórmulas y postulados que rigen el funcionamiento del método de la columna análoga, pueden ser establecidos de diferentes maneras.

##### 3.2.1 DEDUCCION PARTIENDO DEL METODO DEL CENTRO ELASTICO

Con base en los conceptos sobre el centro elástico o punto neutral del Capítulo 1, se puede representar el momento en un punto cualquiera A del arco mostrado en la Fig. 3.1 si se conoce la posición del punto neutral en el mismo.



### Reacciones en el punto Neutral "O"

Fig. 3.1

El momento en el punto A, puede expresarse así:

$$M_A = P.a - M_o + H_o.y - V_o.x$$

Agrupando los efectos de las reacciones en el punto neutral:

$$M_A = P.a - (M_o - H_o.y + V_o.x) \quad (3.1)$$

Puede verse que el término  $P.a$  es el momento en A, cuando se suprimen las reacciones y momento en el soporte N y la estructura se vuelve estáticamente determinada, por lo que lo llamaremos momento estático determinado  $M_d$ ; mientras que los términos del paréntesis, corresponde al momento provocado por las redundantes suprimidas en N y que ahora se suponen actuando en el punto neutral; al cual llamaremos momento indeterminado  $M_i$

$$\therefore M_i = M_o - H_o.y + V_o.x \quad (3.2)$$

El momento en un punto cualquiera de la estructura vendrá dado por la expresión:

$$M_x = M_d - M_i \quad (3.3)$$

A continuación reescribiremos la ecuación (3.1) introduciendo los dobles signos para tomar en cuenta toda posible condición de carga, tal como se indica a continuación.

$$M_x = M_d \pm (M_o \pm H_o.y \pm V_o.x) \quad (3.4)$$

Recordando ahora los valores para las reacciones que actúan en el punto neutral, ya deducidos en el capítulo 1:

$$M_o = \frac{W}{A} \quad H_o = \frac{M_x}{I_x} \quad V_o = \frac{M_y}{I_y}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.4) resulta:

$$M_x = M_d \pm \left( \frac{W}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y} \right) \quad (3.5)$$

Puede verse que los términos contenidos en el paréntesis y que representan al momento indeterminado  $M_i$  o momento causado por las reacciones en el punto neutral, corresponden precisamente a la fórmula para determinar los esfuerzos en una columna corta cargada excéntricamente. La expresión (3.5), constituye la ecuación general del método de la Analogía de la Columna, tomando como ejes de referencia, los ejes centroidales principales.

Al visualizar una columna imaginaria, de acuerdo a la ecuación (3.5), se requiere que el área de su sección transversal sea  $A$ , que es el área elástica de la estructura conjugada del arco considerado, mientras que  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $XX$  y  $YY$  que pasan por el centro elástico o punto neutral, es decir que la sección transversal de la columna análoga tiene una forma y longitud igual a la de la estructura original con un ancho o espesor igual a  $1/EI$ , como consecuencia se deduce que la sección de la columna es ancha donde la estructura original es delgada y viceversa.

La columna análoga soportará una carga uniformemente distribuida imaginaria  $W$ , que será el área elástica del diagrama de momento estático  $M_d$  sobre  $EI$ , tal como ocurre en la estructura conjugada, para cumplir con la condición de que el área de la sección transversal es justamente la de la estructura conjugada correspondiente a la estructura real. Debido a la excentricidad de la carga originada por el diagrama  $M_d/EI$ , se producirán momentos respecto a los ejes centroidales  $XX$  e  $YY$ .

El momento indeterminado en cualquier punto de la estructura real, equivale al esfuerzo en el punto correspondiente de la sección transversal de la columna análoga, o sea que el problema de establecer el momento  $M_i$ , se reduce al cálculo del esfuerzo en la fibra de una columna corta cargada excéntricamente.

En la Fig. 3.2 se muestra un arco doblemente empotrado con una carga concentrada a una distancia "a" del extremo o apoyo A, al suprimir el apoyo B, la estructura se vuelve estáticamente determinada y se induce el diagrama de momento determinado  $M_d/EI$  que se indica. En la Fig. 3.3 se reproduce la columna análoga correspondiente cargada con el diagrama  $M_d/EI$  que se origina de la condición estática indicada en la figura anterior; la carga sobre cualquier longitud corta  $ds$ , será  $M_d \cdot ds/EI$  y esta carga actuará sobre una área  $ds/EI$ . En la Fig. 3.4 se representan: un marco con miembros de peralte no constante y una viga de sección variable, así como las respectivas columnas análogas.

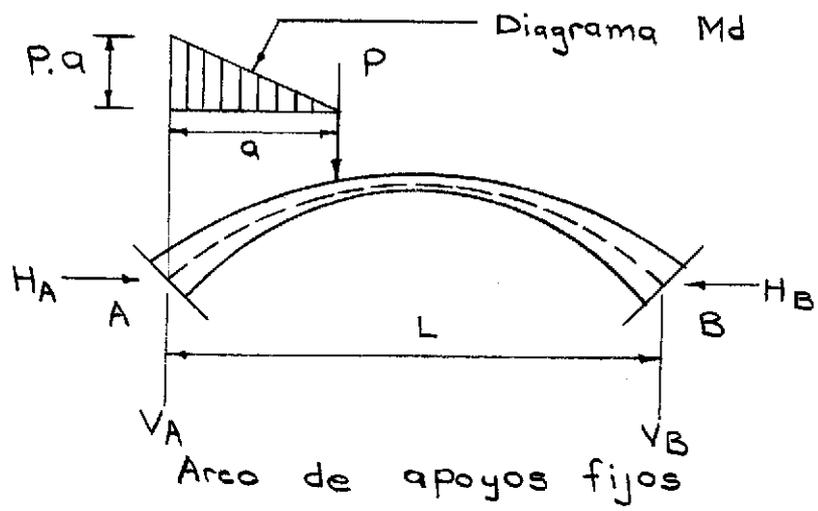
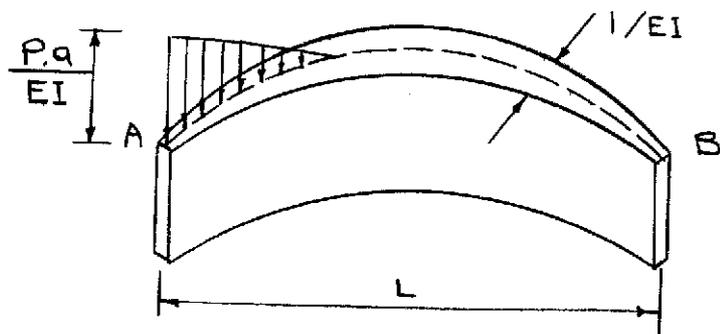


Fig. 3.2



Columna Análoga cargada  
con el diagrama  $M_d/EI$

Fig. 3.3

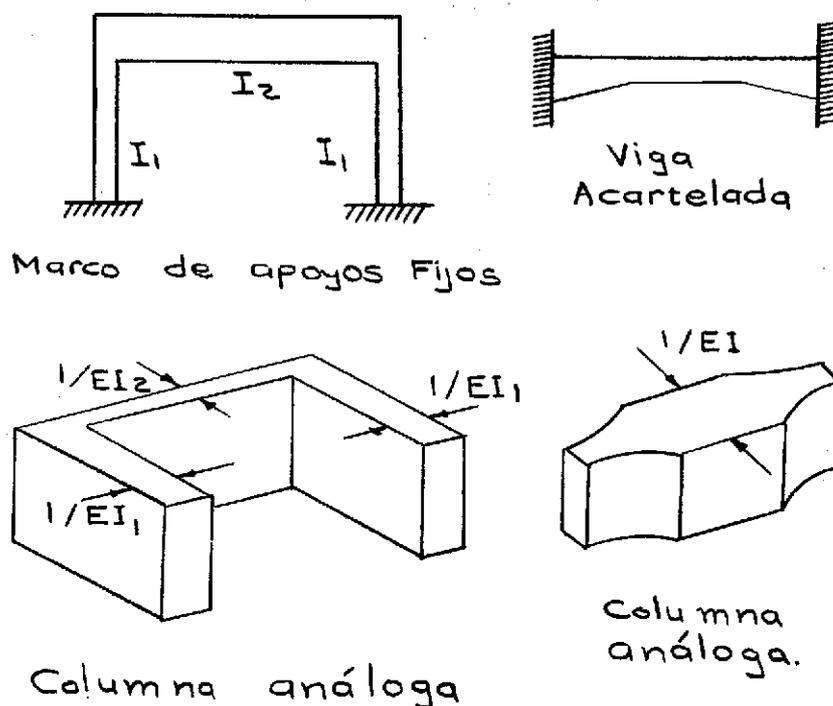


Fig. 3.4

De los conceptos anteriores, se deduce que en la aplicación de la Analogía de la Columna, se hace indispensable volver a la estructura analizada estáticamente determinada, para así poder obtener el diagrama de momentos determinados  $M_d$  sobre  $EI$ , cuya área será la carga sobre la columna equivalente. Una estructura estáticamente indeterminada, se puede transformar en determinada, mediante la supresión de cierto número de reacciones redundantes, el cual depende del grado de indeterminación, que sabemos no puede ser mayor al tercero. En realidad cualquier tipo de estructura estáticamente determinada puede ser seleccionada para la determinación de un diagrama de momento estático como quedará demostrado al estudiar las aplicaciones del método; por ejemplo un arco de apoyos fijos, puede suponerse cortado en un extremo, para reducirlo a una estructura en cantiliver determinada; una viga doblemente empotrada puede suponerse simplemente soportada, suprimiendo los momentos de empotramiento, etc.

La convención de signos a usar en las aplicaciones del método de la Analogía de la columna, asume como positivos los momentos que causan compresión sobre el coronamiento o cara superior de una viga o bien sobre el lado de fuera de un arco elástico. Los diagramas correspondientes a momentos positivos, actúan provocando compresión en la columna análoga a lo largo de la línea de aplicación, mientras que los que corresponden a momentos  $M_d$  negativos actúan en sentido contrario; los esfuerzos de compresión en la columna análoga son considerados como positivos y se suman, mientras que los esfuerzos de tensión son negativos y se restan de los primeros. Los brazos de los momentos ocasionados por las cargas elásticas, así como las distancias "X" e "Y", de los puntos considerados a los ejes centroidales se toman como positivos, si van hacia la derecha o hacia arriba de los ejes correspondientes; debe tenerse en cuenta también, que el momento indeterminado  $M_i$ , debe reducir al momento determina

do  $M_d$  numéricamente, en el punto donde este último es un máximo, pues de otra manera la estructura determinada tendría momentos más pequeños que la indeterminada lo cual es inadmisibles.

### 3.2.2 DERIVACION DIRECTA DEL METODO

Resulta factible arribar a la concepción de "Analogía de la Columna", sin tener que hacer referencia a las ecuaciones del centro elástico o punto neutral, pudiendo cumplirse tal finalidad de diferentes formas; una de estas es la que se expone a continuación como ilustración.

En la Fig. 3.5 se muestra un aro o anillo cerrado de material homogéneo y sección transversal constante en equilibrio bajo un sistema de cargas  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ .

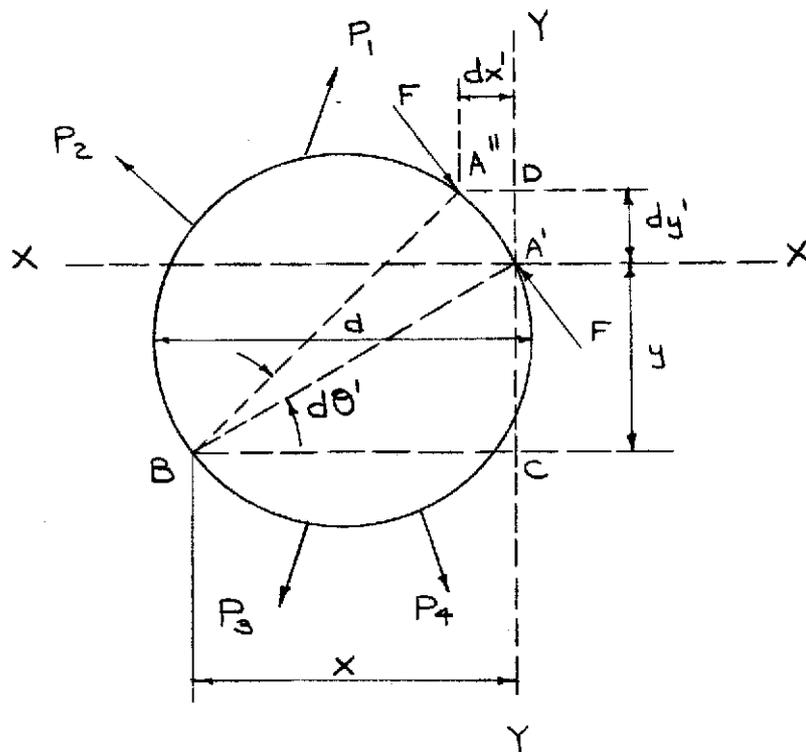
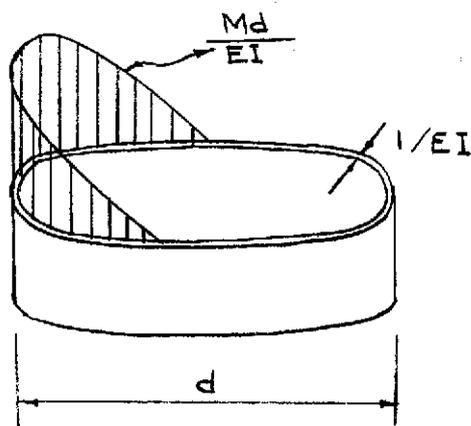


Fig 3.5



columna Análoga

Fig. 3.6.

Por la acción de estas fuerzas habrá corte, compresión o tensión y momento en un punto considerado A; en tales condiciones dicha estructura es estáticamente indeterminada, con mucha semejanza al arco de extremos empotrados; la resultante de tales cargas a cada lado de la sección A, puede ser representada por las fuerzas "F" de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario; el efecto combinado de las cargas externas  $P_1, P_2 \dots$  etc. y las fuerzas internas F es mantener la continuidad y el equilibrio del aro en la sección A.

Si se asume que el aro es cortado en el punto A y que los dos sistemas de fuerzas actúan separadamente, las cargas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  motivan en el aro una deflexión externa y el momento estático en una sección causado por este sistema se designa por  $M_d$ ; este momento para una longitud  $ds$  en B provoca un giro o rotación muy pequeña que será:

$$d\theta' = \frac{M_d \cdot ds}{EI}$$

Esta rotación tiene una magnitud igual a la deflexión angular entre las tangentes a los extremos de la longitud infinitesimal  $ds$  y se muestra a escala exagerada en la Fig. 3.5. Al ocurrir el giro  $d\theta'$  provocado por el momento estático  $M_d$  al hacer el corte en A, los extremos libres toman las posiciones relativas  $A'$  y  $A''$ . Usando por conveniencia un origen de ejes localizado en  $A'$ , las coordenadas del punto B resultan ser  $x$  e  $y$ , mientras que las componentes del movimiento del punto  $A''$  relativo al  $A'$  son  $dx'$  y  $dy'$ . (Ver Fig. 3.5).

Siendo  $d\theta'$  un ángulo muy pequeño, puede evaluarse así:

$$d\theta' = \frac{A'A''}{A'B} \quad (3.6)$$

$A'A''$  puede considerarse normal a  $BA'$

Por lo tanto los triángulos  $A'BC$  y  $A''A'D$  son semejantes en la Fig. 3.5, por tal razón

$$\frac{x}{A'B} = \frac{dy'}{A'A''}$$

$$\therefore dy' = \left(\frac{A'A''}{A'B}\right) \cdot x$$

$$dy' = d\Theta' \cdot x$$

$$y' = \int d\Theta' \cdot x \quad (3.7)$$

De igual manera:

$$\frac{dx'}{A'A''} = \frac{y}{A'B}$$

$$\therefore dx' = \left(\frac{A'A''}{A'B}\right) y$$

$$dx' = d\Theta' \cdot y$$

$$x' = \int d\Theta' \cdot y \quad (3.8)$$

Llamando  $x'$  e  $y'$  a las componentes de la separación total, y  $\Theta'$  a la rotación total debida al momento determinado  $M_d$ , se pueden escribir las siguientes ecuaciones para el cálculo de dichos valores

$$\Theta' = \int d\Theta' = \int \frac{M_d \cdot ds}{EI} \quad (3.9)$$

$$y' = \int x \cdot d\Theta' = \int \frac{M_d \cdot x \cdot ds}{EI} \quad (3.9)$$

$$x' = \int y \cdot d\Theta' = \int \frac{M_d \cdot y \cdot ds}{EI} \quad (3.9)$$

Considerando seguidamente el efecto de las fuerzas internas  $F$ , habrá momentos indeterminados  $M_i$ , esto provocará rotaciones y componentes de traslación, que son iguales pero opuestas a las causadas por los momentos determinados  $M_d$ , lo que nos permite escribir las siguientes expresiones:

$$\int \frac{M_i \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot ds}{EI} \quad (3.10)$$

$$\int \frac{M_i \cdot y \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot y \cdot ds}{EI} \quad (3.10)$$

$$\int \frac{M_i \cdot x \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot x \cdot ds}{EI} \quad (3.10)$$

Como paso final, se pensará en una columna cuya sección transversal situada en un plano horizontal, tiene la forma y diámetro del aro, pero con el espesor igual a  $1/EI$ . Suponiendo que esta columna, soporta en un extremo cargas de intensidad igual al área del diagrama de momento determinado  $M_d$  sobre  $EI$  tal como se indica en la Fig. 3.6, las mismas causarían en una sección transversal, esfuerzos unitarios en las fibras con una variación lineal. Por conveniencia, asumir que en la columna las cargas y los esfuerzos resultantes son paralelos a un eje vertical, tomando simultáneamente las cargas debidas al momento estático  $M_d$ , y los esfuerzos resultantes "f" en la columna, se establece un sistema de fuerzas paralelas en el espacio en equilibrio, que debe satisfacer las tres condiciones de estática

$$F_v = 0 \quad M_x = 0 \quad M_y = 0$$

Estas, se traducen a las siguientes expresiones al sustituir los valores de las fuerzas internas y externas:

$$\int \frac{f \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot ds}{EI} \quad (3.11)$$

$$\int \frac{f \cdot y \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot y \cdot ds}{EI} \quad (3.11)$$

$$\int \frac{f \cdot x \cdot ds}{EI} = - \int \frac{M_d \cdot x \cdot ds}{EI} \quad (3.11)$$

La comparación del grupo de ecuaciones (3.11) con el grupo similar (3.10), revelan la analogía entre los esfuerzos en la columna y los momentos indeterminados en la estructura original, es decir que:

$$M_i = f \quad (3.12)$$

Puesto que el momento real  $M_x$  en cualquier punto del aro es igual al momento estático  $M_d$  menos el momento indeterminado, se puede escribir que:

$$M_x = M_d - f \quad (3.13)$$

La determinación de  $f$  como ya se sabe no es mas que el cálculo de los esfuerzos en las fibras de la sección de una columna corta cargada excéntricamente, resultando que:

$$f = \frac{W}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad (3.14)$$

Siendo  $M_x$  y  $M_y$  los momentos ocasionados por la carga  $W$  respecto a los ejes principales centroidales  $XX$  y  $YY$  de la sección;  $I_x$  e  $I_y$ , así como "y" y "x" son los momentos de inercia y distancias hacia esos mismos ejes respectivamente. Sustituyendo el valor de  $f$  en la ecuación 3.13, resulta que el momento en cualquier punto de la estructura será:

$$M_x = M_d - \left( \frac{W}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} \right) \quad (3.15)$$

La expresión anterior, como ya se dijo, es la ecuación básica de la analogía de la columna y coincide con la ecuación (3.5) obtenida al derivar el método a partir de las ecuaciones del centro elástico o punto neutral.

En resumen, puede decirse que para el cálculo de momentos en una estructura estáticamente indeterminada por medio del método de la analogía de la columna, se efectúan los pasos siguientes:

- 1) Por medio de una sección de corte, punto de giro u otro artificio similar, producir una estructura estáticamente determinada.
- 2) Calcular los momentos estáticos denominados  $M_d$  debidos al sistema de cargas aplicado y plotear los diagramas  $M_d/EI$  correspondientes.
- 3) Usar estos diagramas como un sistema de cargas sobre una columna análoga, cuya sección transversal tiene la forma y longitud de la estructura analizada con un espesor  $1/EI$ .
- 4) Calcular los esfuerzos  $f$  en las fibras de la sección transversal que corresponden a los puntos investigados en la estructura original, siguiendo rigurosamente la convención de signos estudiada.
- 5) Combinar los momentos estáticos  $M_d$  en la estructura determinada, con los esfuerzos  $f$  en la columna análoga para determinar el momento real.

### 3.2.3 MIEMBROS ARTICULADOS

Frecuentemente se presenta el caso de que el miembro analizado contenga un punto de giro o articulación, tal condición implica que la rigidez en este punto debe ser igual a cero; la rigidez relativa de un miembro se define como la relación del momento de inercia de su sección transversal, sobre su longitud ( $K = I/L$ ), es decir que si la rigidez es cero en la articulación, el momento de inercia también lo será. Tomando en cuenta que la columna análoga tiene un espesor de  $1/EI$ , resulta que su anchura se vuelve infinita al ser  $I = 0$ . Siendo el ancho de la columna análoga infinito en una articulación, el área de la sección transversal también valdrá infinito y por consiguiente el término  $W/A$  de la ecuación (3.5) se vuelve cero. El centro de gravedad o centroide del miembro se sitúa precisamente en la articulación, ya que en ese lugar se localiza una área infinita concentrada en un punto.

Si la estructura analizada tiene dos articulaciones, los centroides de los miembros que las contienen en la columna análoga, coincidirán con las mismas, los momentos en estos puntos serán cero y la línea que pasa por ellos será el eje neutro de la sección.

Todos los conceptos anteriores serán aclarados al entrar al estudio de las aplicaciones prácticas del método en los artículos siguientes.

### 3.3 APLICACION A VIGAS DE SECCION CONSTANTE

El uso del método de la analogía de la columna, para el cálculo de momentos ocasionados por un sistema de cargas aplicado en vigas de sección constante o prismática será estudiado a continuación; el problema no presenta mayores complicaciones y se reduce al cálculo de los esfuerzos en los puntos correspondientes de la columna análoga, debiendo seguir la convención de signos; los momentos reales se establecen por la ya conocida ecuación  $Mx = Md - Mi$  explicada anteriormente. Para ilustrar estas situaciones, se desarrollan a continuación algunos casos importantes.

#### EJEMPLO

Por medio de la analogía de la columna, calcular los momentos en los extremos de la viga de apoyos fijos de la Fig. 3.7, considerando únicamente el peso muerto de  $W$  kip/pie, siendo  $EI$  constante y la luz libre "L".

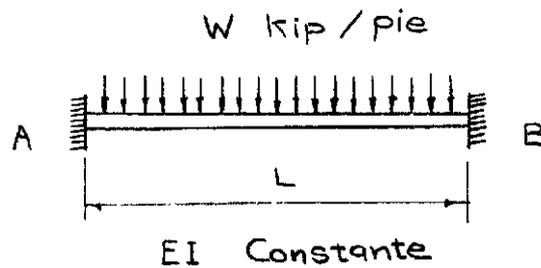


Fig. 3.7

#### ANALISIS

La estructura puede volverse estáticamente determinada, por supresión de los momentos de empotramiento, tal como se indica en la Fig. 3.8

Por ser carga uniformemente distribuida, el diagrama de momentos  $Md$  será una parábola de 2° grado, el área elástica de este diagrama será:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{2}{3} \left( \frac{W \cdot L^2}{8} \right) \cdot (L) \\
 &= \frac{W \cdot L^2}{12}
 \end{aligned}$$

El diagrama de momento  $Md$  sobre  $EI$  de la viga simple, debido a la carga uniformemente distribuida  $W$ , se aplica a la sección transversal de la columna análoga, cuyas dimensiones son  $L$  y  $1/EI$  (Ver Fig. 3.8)

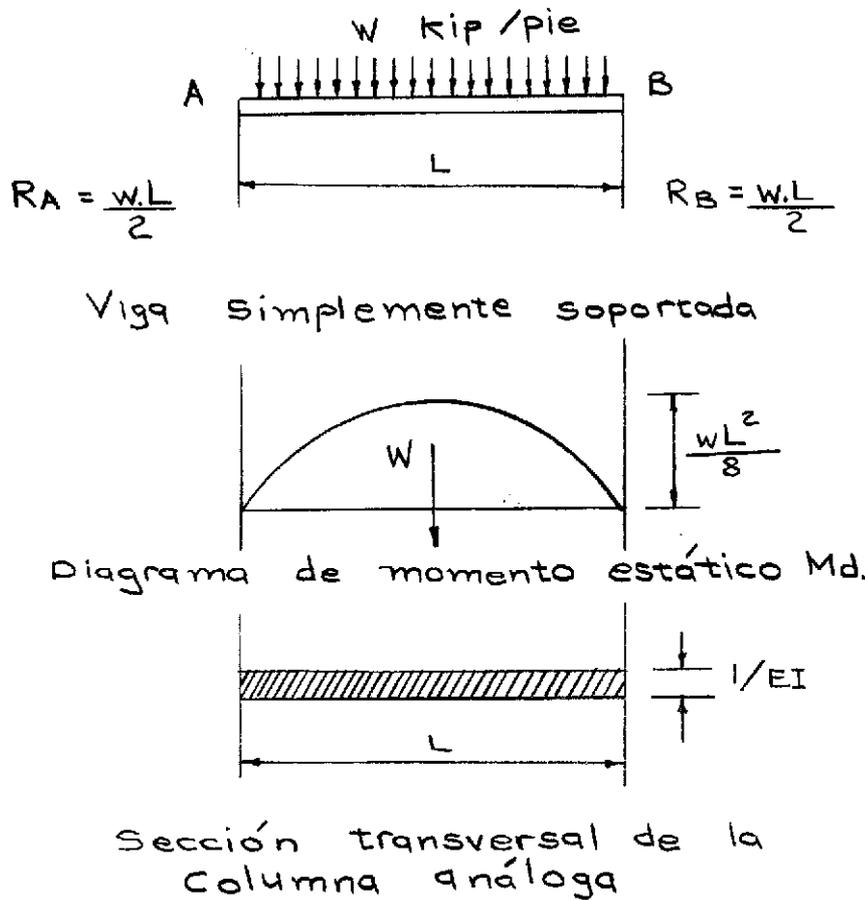


Fig. 3.8

La carga del diagrama será contra la columna, porque el momento estático  $M_d$  es positivo ya que provoca compresión en la cara superior de la viga simplemente apoyada o sea la estructura estáticamente determinada.

La resultante de la carga del diagrama  $M_d$  actúa en el centroide de la sección transversal de la columna análoga y por lo tanto el esfuerzo  $f$  es constante

$$f = \frac{W}{A} = \frac{\frac{W \cdot L^3}{12 EI}}{\frac{L}{EI}} = \frac{W \cdot L^2}{12}$$

$$f = M_i \therefore M_i = \frac{W \cdot L^2}{12}$$

Por tal razón, en el extremo A o en el B

$$M_d = 0$$

$$M_i = \frac{W \cdot L^2}{12}$$

El momento real en el extremo A ó en el B será:

$$\begin{aligned} M_A = M_B &= M_d - M_i \\ &= 0 - \frac{W \cdot L^2}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore M_A = M_B = - \frac{W \cdot L^2}{12}$$

El signo menos para  $M_A$  ó  $M_B$ , indica que los momentos de empotramiento en los extremos, provocan tensión en el lado superior de la viga.

Una solución alternativa, puede ser la de volver la estructura original estáticamente determinada, suprimiendo el apoyo B y considerando la viga como un voladizo empotrado en A y libre en B, siguiendo luego los mismos pasos para la aplicación del método.

### EJEMPLO

Por medio de la analogía de la columna calcular los momentos en los extremos de la viga doblemente empotrada de la Fig. 3.9, considerando únicamente la carga concentrada P.

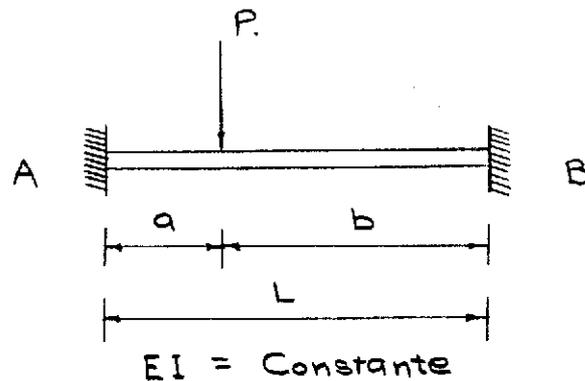


Fig. 3.9

### ANALISIS

La estructura puede volverse estáticamente determinada, suprimiendo el apoyo A y considerando la viga como un voladizo libre en ese punto y empotrado en B, tal como se indica en la Fig. 3.10.

El diagrama de momento estático  $M_d$  tendrá forma triangular y la resultante del área elástica actuará a una distancia  $b/3$  del extremo B, tal resultante o sea el valor del área se-

rá:

$$W = \frac{1}{2} \cdot b \cdot P \cdot b = \frac{P \cdot b^2}{2}$$

Esta carga del diagrama  $Md/EI$  será ascendente al actuar sobre la columna análoga, ya que el momento  $Md$  es negativo porque provoca tensión en la cara superior de la viga en voladizo o sea la estructura estáticamente determinada.

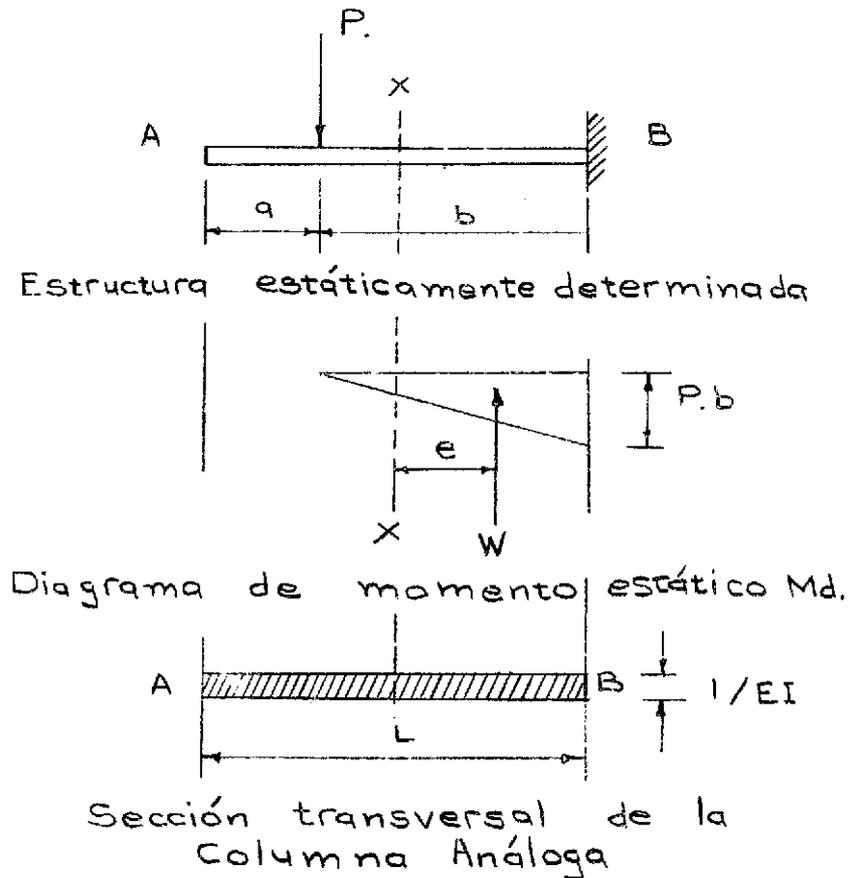


Fig. 3.10

En este caso la resultante de la carga del diagrama  $Md/EI$  no actúa en el centro de la sección transversal de la columna análoga, por lo que se induce un momento respecto al eje  $XX$  debido a la excentricidad. (Ver Fig. 3.10).

El esfuerzo  $f$  en un punto cualquiera de la sección transversal de la columna, se calcula así:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{W \cdot e \cdot Y}{Ix}$$

$$A = L \left( \frac{1}{EI} \right) = \frac{L}{EI}$$

$$e = \frac{L}{2} - \frac{b}{3}$$

$$Y_B = \frac{L}{2} \quad Y_A = -\frac{L}{2}$$

$$I_x = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{EI} \right) L^3 = \frac{L^3}{12EI}$$

Sustituyendo valores:

$$f_A = \frac{\left( -\frac{Pb^2}{2EI} \right)}{\left( \frac{L}{EI} \right)} + \frac{\left( -\frac{Pb^2}{2EI} \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{b}{3} \right) \left( -\frac{L}{2} \right)}{\frac{L^3}{12EI}}$$

$$f_A = -\frac{P \cdot b^2}{2L} + \frac{3P \cdot b^2}{2L} - \frac{P \cdot b^3}{L^2}$$

$$f_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$$

$$f_B = \frac{\left( -\frac{P \cdot b^2}{2EI} \right)}{\left( \frac{L}{EI} \right)} + \frac{\left( -\frac{P \cdot b^2}{2EI} \right) \left( \frac{L}{2} - \frac{b}{3} \right) \left( \frac{L}{2} \right)}{\frac{L^3}{12EI}}$$

Combinando los momentos determinados  $M_d$  con los esfuerzos en los extremos de la columna se obtienen los momentos reales.

En A:

$$M_A = M_d - f_A = 0 - \left( \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \right)$$

$$M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$$

En B:

$$M_B = M_d - f_B = -P \cdot b - \left( \frac{P \cdot b^3}{L^2} - \frac{2P \cdot b^2}{L} \right)$$

$$M_B = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$$

El signo menos para  $M_A$  ó  $M_B$  indica que los momentos de empotramiento provo can tensión en la cara superior de la viga.

### EJEMPLO

Por medio de la analogía de la columna, calcular el momento en el extremo A de la viga de la Fig. 3.11, considerando únicamente la carga concentrada P. EI es constante, la luz libre es L. El extremo A es empotrado, mientras que el B es simplemente apoyado.

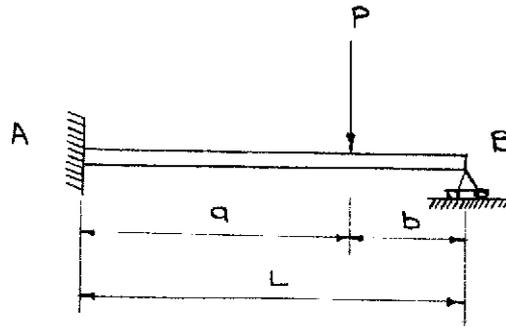


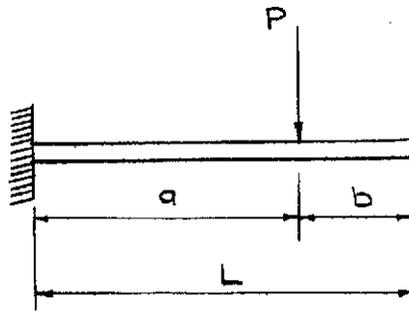
Fig. 3.11

Puede verse que esta viga contiene un punto de giro y por consiguiente el centroide de la columna análoga coincidirá con el mismo, siendo el área de su sección transversal infinita.

La estructura se vuelve estáticamente determinada suprimiendo el apoyo B y considerando la viga como un voladizo libre en este punto y empotrado en A, tal como se indica en la Fig. 3.12.

El diagrama de momento  $Md/EI$  será triangular, la resultante o área elástica del mismo actuará a una distancia  $a/3$  del extremo A y tendrá un valor

$$W = \frac{1}{2} P \cdot a \cdot a = \frac{Pa^2}{2}$$



Estructura estáticamente determinada

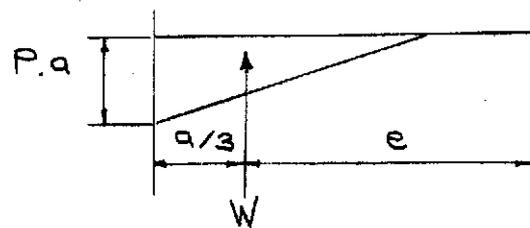
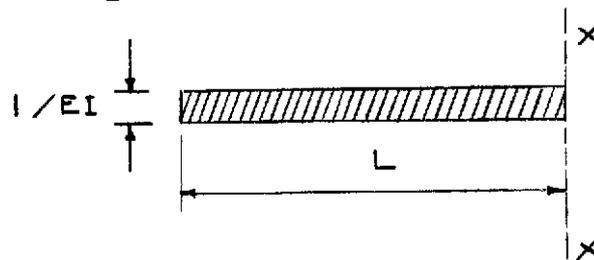


Diagrama de momento  $M_d$ .



Sección transversal de la Columna Análoga

Fig 3.12

El diagrama de momento  $M_d$  sobre  $EI$  de la viga en voladizo se aplica como carga sobre la columna análoga y con dirección ascendente, ya que al igual que en el caso anterior el momento  $M_d$  es negativo.

Existe un momento respecto al eje  $XX$  debido a la excentricidad de la carga  $W$ . (Ver Fig. 3.12).

El esfuerzo  $f$  en un punto de la columna análoga será

$$f = \frac{W}{A} + \frac{W \cdot e \cdot y}{Ix}$$

pero  $\frac{W}{A} = 0$

$$\therefore f = \frac{W \cdot e \cdot y}{I_x}$$

$$= \frac{a}{3} - L$$

$$I_x = \frac{L^3}{3EI} \quad y = -L$$

Sustituyendo valores:

$$f_A = \frac{\left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\left(\frac{a}{3} - L\right)(-L)}{\left(\frac{L^3}{3EI}\right)}$$

$$f_A = \frac{P \cdot a^3}{2L^2} - \frac{3P \cdot a^2}{2L}$$

Combinando el momento estático  $M_d$ , con el esfuerzo, obtenemos el momento real en el extremo empotrado A.

$$M_A = M_d - f_A$$

$$= -P \cdot a - \left(\frac{P \cdot a^3}{2L^2} - \frac{3P \cdot a^2}{2L}\right)$$

$$M_A = -\frac{P \cdot a \cdot b}{2L^2} (L + b)$$

El signo menos indica que el momento tiende a provocar tensión en la cara superior de la viga. -

En las vigas consideradas anteriormente, puede verse que la dirección y posición de los ejes principales en la sección transversal de la columna análoga, han quedado determinados por simple inspección, ya que las mismas tienen dos ejes de simetría que coinciden con los primeros.

### 3.4 APLICACION A VIGAS DE SECCION NO CONSTANTE

Para estos casos la longitud transversal de la columna análoga es siempre igual a la longitud de la luz libre de la viga considerada y el ancho es igual a  $1/EI$ . Puesto que los valores de  $EI$  cambian a lo largo de la luz, el ancho de la sección de columna análoga cambia consecutivamente. Los diagramas de momento estático  $M_d$  sufren alteraciones al ser divididos sobre la constante  $EI$ , ya que la inercia varía a lo largo de la viga; tal situación da lugar a que los esfuerzos en la columna equivalente varíen respecto a los de otra columna correspon-

diente a una viga de igual luz libre y sometida al mismo sistema de cargas, pero de sección transversal constante.

A continuación se analizan algunas vigas de sección variable por medio de la analogía de la columna.

### EJEMPLO

Aplicando la analogía de la columna, calcular los momentos de empotramiento y al centro de la luz, en la viga de sección no constante de la Fig. 3.13.

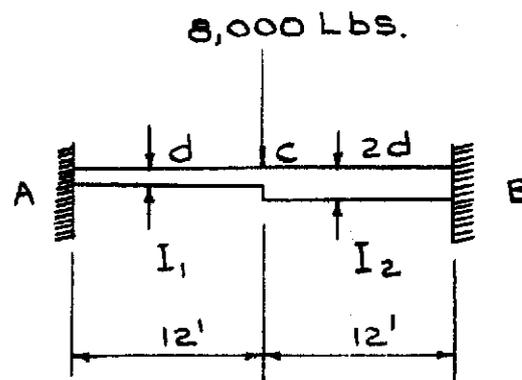


Fig. 3.13

### ANALISIS

No es necesario conocer los peraltes reales de las secciones de la viga y bastan los valores relativos, para establecer los espesores relativos de la columna análoga tal como se indica a continuación:

$1/EI =$  espesor de la columna análoga

$$I_1 = \frac{1}{12} (1)(d)^3 = \frac{d^3}{12}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} (1)(2d)^3 = \frac{8d^3}{12}$$

Inercias relativas:

$$I_1 = \left(\frac{12}{d^3}\right)\left(\frac{d^3}{12}\right) = 1$$

$$I_2 = \left(\frac{12}{d^3}\right)\left(\frac{8d^3}{12}\right) = 8$$

Espesores de columna análoga relativos

$$\frac{1}{EI_1} = \frac{8E}{E(1)} = 8$$

$$\frac{1}{EI_2} = \frac{8E}{E(8)} = 1$$

La estructura se vuelve estáticamente determinada suprimiendo el apoyo A y suponiendo a la viga como un voladizo libre en este punto y empotrado en B, tal como se muestra en la Fig. 3.14.

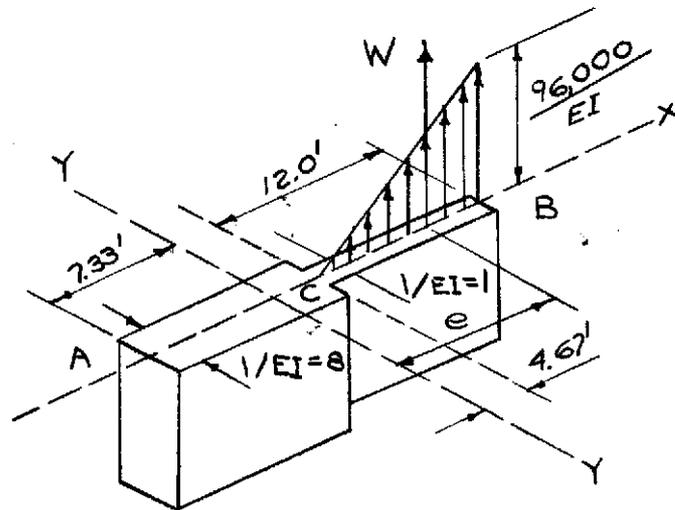
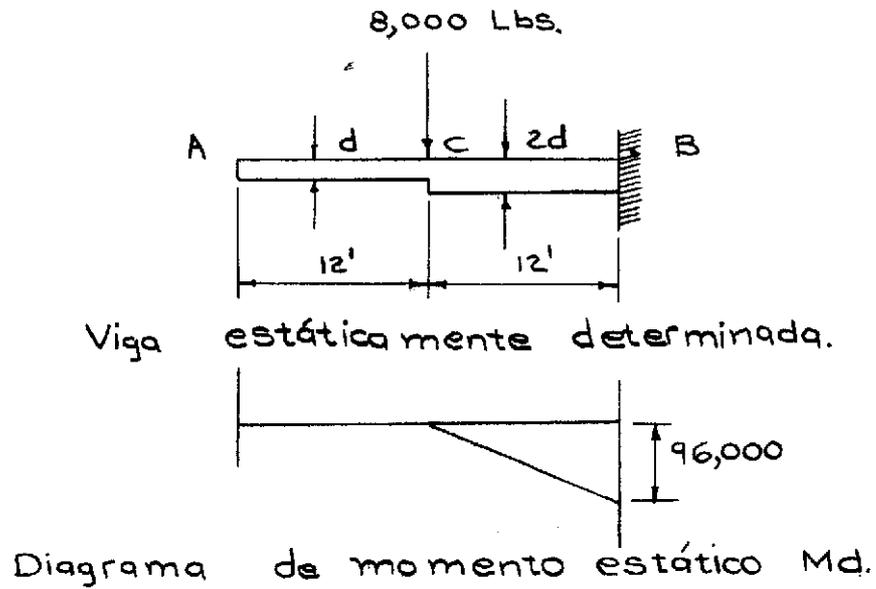
El momento  $M_d$  en el punto B será:

$$\begin{aligned} M_d &= 8,000 \times 12 \\ &= 96,000 \text{ Lbs.-pie} \end{aligned}$$

Las propiedades de la columna análoga serán las siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \text{Area de la sección transversal} \\ &= 12 \times 8 + 12 \times 1 = 96 + 12 \\ A &= 108. \end{aligned}$$

La dirección de los ejes principales al igual que en los casos anteriores es conocida ya que existe un eje de simetría que será el XX.



Columna análoga

Fig. 3.14

La coordenada  $\bar{X}$  del centroide respecto al extremo A se calcula en la forma siguiente (Ver Fig. 3.14)

$$\bar{X} = \frac{96 \times 6 + 12 \times 18}{108}$$

$$\bar{X} = 7.33'$$

El otro eje principal, pasará por el centroide y es perpendicular al eje XX de simetría.

La carga del diagrama de momento estático  $M_d$  sobre  $EI_2$  será:

$$W = -96,000 \times 12 \times 0.5 + 1 \\ = -576,000$$

Esta carga provoca momentos respecto al eje YY, debido a la excentricidad "e"; no existen momentos respecto al eje XX, ya que el mismo coincide con la línea de aplicación del diagrama  $M_d$  sobre EI.

La excentricidad e respecto al eje YY será:

$$e = 24' - 7.33' - \frac{12'}{3}$$

$$e = 12.67 \text{ pies}$$

El momento respecto al eje YY será:

$$M_y = W.e = -576,000 \times 12.67 \\ = -7,290,000$$

El momento de Inercia respecto al eje YY se calcula en la forma siguiente (Ver Fig. 3.14).

$$I_y = \frac{1}{12} (1)(12)^3 + (12)(10.67)^2 \\ + \frac{1}{12} (8)(12)^3 + (96)(1.33)^2$$

$$I_y = 2,831$$

Con los valores anteriores, pueden calcularse los esfuerzos en los puntos A, B y C de la columna análoga, tomando en cuenta que la carga del diagrama  $M_d$  actúa hacia arriba o sea en forma ascendente, debido a que el momento estático  $M_d$  es negativo por causar tensión en la cara superior de la viga.

Los esfuerzos en la sección de la columna análoga serán como sigue:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

Extremo A:

$$f_A = \frac{(-576,000)}{108} + \frac{(-7,290,000)(-7.33)}{2,831}$$

$$f_A = 13,600 \text{ Lbs.-pie}$$

$$f_b = \frac{(-576,000)}{108} + \frac{(-7,290,000)(16.67)}{2,831}$$

$$f_b = -48,000 \text{ Lbs-pie}$$

$$f_c = \frac{(-576,000)}{108} + \frac{(-7,290,000)(4.67)}{2,831}$$

$$f_c = -17,300 \text{ Lbs-pie.}$$

Puede notarse que pese a estar calculando esfuerzos unitarios en la sección transversal de la columna análoga, los resultados se dan en Lbs-pie que son unidades de momentos, esto obedece a que las cargas elásticas no se expresan en Lbs. sino en  $\text{Lbs-pie}^2/EI$ , que es precisamente el artificio empleado en la analogía de la columna. Los esfuerzos  $f_A$ ,  $f_B$  y  $f_c$  son los momentos indeterminados para los puntos analizados en la estructura real. Combinando los momentos estáticos con los esfuerzos o momentos indeterminados, se obtienen los momentos reales:

$$M = M_d - f$$

$$M_A = 0 - 13,000$$

$$M_A = -13,000 \text{ Lbs-pie}$$

$$M_B = -96,000 - (-48,000)$$

$$M_B = -48,000 \text{ Lbs-pie}$$

$$M_C = 0 - (-17,300)$$

$$= +17,300 \text{ Lbs-pie}$$

### EJEMPLO

Aplicando la analogía de la columna, calcular los momentos en los extremos de la viga de sección no constante que aparece en la Fig. 3.15, considerando el peso muerto de 6 kip por pie lineal y una carga concentrada de 60 kip a 12' del extremo A.

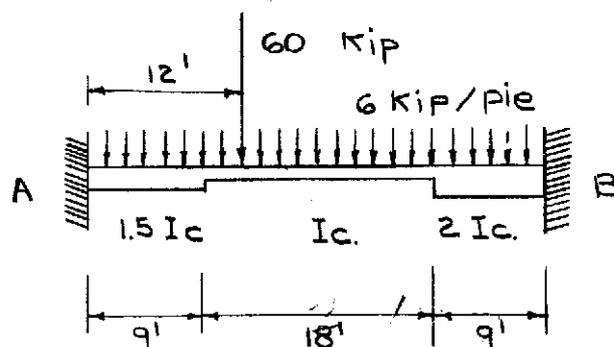


Fig. 3.15

## ANALISIS

Como los espesores de la columna análoga  $I/EI$  pueden ser relativos, dado que el diagrama de momento estático  $Md$  también tiene como denominador  $EI$ , se asumirá un valor  $EI = 1$ ; por consiguiente los espesores de las secciones de la columna análoga, tal como se indica en la Fig. 3.16 serán:

$$\frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

El área de la sección transversal de la columna análoga será

$$A = (9)\left(\frac{2}{3}\right) + 18(1) + 9\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A = 28.5$$

La dirección de los ejes principales es conocida, dado que existe un eje de simetría  $XX$ ; para establecer la posición del centroide de la sección y el otro eje principal  $YY$  que será perpendicular al eje  $XX$ , nos valdremos de un eje auxiliar  $Y'Y'$  que pasa por el centro de la luz, tal como se indica en la Fig. 3.16; la coordenada  $\bar{X}$  del centroide al eje  $Y'Y'$  será:

$$\bar{X} = \frac{(6)(-13.5) + (18)(0) + (4.5)(13.5)}{28.5}$$

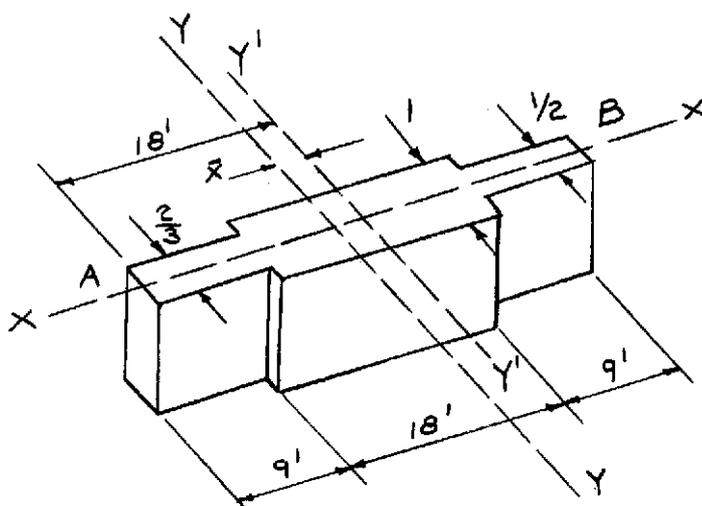
$$\bar{X} = -0.71$$

El momento de inercia respecto al eje  $YY$  será:

$$I_y = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)(9)^3}{12} + (6)(12.79)^2 + \frac{(1)(18)^3}{12} \\ + (18)(0.71)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(9)^3}{12} + (4.5)(14.21)^2$$

$$I_y = 2,456.2$$

La estructura se vuelve estáticamente determinada suprimiendo los momentos de empotramiento en los extremos A y B resultando así una viga simplemente soportada.



Columna Análoga

Fig. 3.16

Para establecer los diagramas de momento estático  $M_d$ , se tomarán por separado la carga muerta y la carga concentrada de 60 kip. Los diagramas de momento estático  $M_d$ , así como los de momento estático sobre la constante  $EI$  aparecen en la Fig. 3.17 y los correspondientes a la carga concentrada en la Fig. 3.18.

Las reacciones en los apoyos para la carga muerta serán:

$$R_A = R_B = \frac{6 \times 36}{2} = 108 \text{ kip}$$

Los momentos para la carga muerta a 9', 18' y 27' serán:

$$\begin{aligned} M_{9'} &= (108)(9) - (6)(9)(4.5) \\ &= 729 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{18'} &= (108)(18) - (6)(18)(9) \\ &= 972 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{27'} &= (108)(27) - (6)(27)(13.5) \\ &= 729 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

Las reacciones en los apoyos para la carga concentrada serán:

$$R_A = \frac{(60)(24)}{36} = 40 \text{ kip}$$

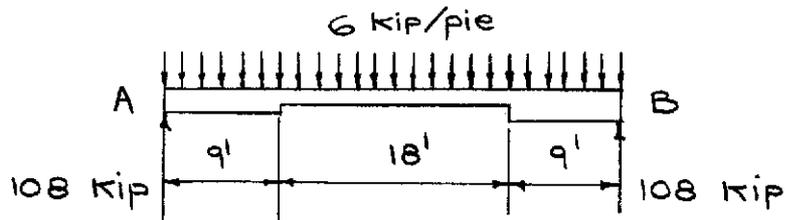
$$R_B = \frac{(60)(12)}{36} = 20 \text{ kip}$$

Los momentos para la carga concentrada a 9', 12' y 27' serán:

$$M_{9'} = 40 \times 9 = 360 \text{ kip-pie}$$

$$M_{12'} = 40 \times 12 = 480 \text{ kip-pie}$$

$$M_{27'} = 20 \times 9 = 180 \text{ kip-pie}$$



Estructura estáticamente determinada

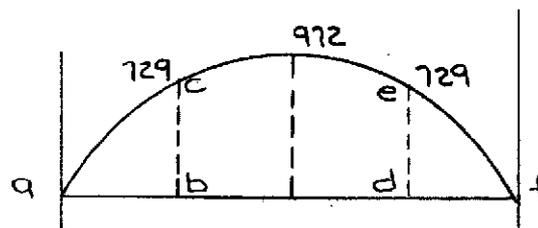


Diagrama de momento estático  $M_d$ .

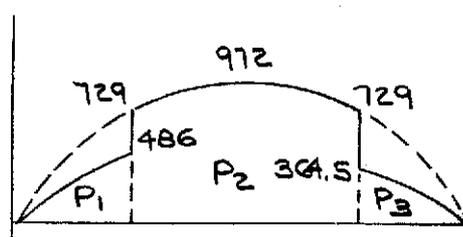


Diagrama de momento  $M_d/EI$

Fig. 3.17

Para cargar la columna análoga con los diagramas de momento  $M_d$  sobre  $EI$ , estos se dividirán en tres partes; las cargas  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  corresponden al diagrama debido al peso muerto. Los valores para  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  serán:

$$\text{Area (abc)} = \int_0^9 (108x - 3x^2).dx$$

$$\text{Area (abc)} = 3,645$$

$$P_1 = \frac{2}{3} (\text{Area abc}) = \frac{2}{3}(3,645)$$

$$P_1 = 2,430$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (\text{Area abc}) = \frac{1}{2}(3,645)$$

$$P_2 = 1,822.5$$

El valor de  $P_2$  será el área total del diagrama parabólico menos las áreas abc y def de los extremos (Ver Fig. 3.17), que son iguales.

$$\begin{aligned} P_2 &= \left(\frac{2}{3}\right)(972)(36) - 2 (\text{área abc}) \\ &= 23,328 - 2 (3,645) \end{aligned}$$

$$P_2 = 16,038$$

El momento del área (abc) alrededor de un eje vertical que pase por A será:

$$\begin{aligned} &= \int_0^9 (108x - 3x^2)(x) \cdot dx \\ &= 21,323.25 \end{aligned}$$

La distancia entre el centroide área (abc) y el soporte izquierdo será:

$$\frac{\text{Mom.}}{\text{Area}} = \frac{21,323.25}{3,645} = 5.85'$$

El diagrama de momento  $Md/EI$  debido a la carga concentrada será el área  $P_5$  del triángulo de base 36 y altura 480, menos los dos triángulos pequeños representados por  $P_4$  y  $P_6$  (Ver Fig. 3.18).

$$P_5 = \left(\frac{1}{2}\right)(36)(480) = 8,640$$

La localización de  $P_5$  a partir del soporte A se puede calcular así:

$$\bar{X} = \frac{L + a}{3} = \frac{36 + 12}{3} = 16'$$

El valor de los triángulos pequeños  $P_4$  y  $P_6$  será:

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(9)(120) = 540$$

$$P_6 = \left(\frac{1}{2}\right)(9)(90) = 405$$

En la Fig. 3.19 se indica la forma en que actúan todas las cargas sobre la columna análoga, así como su posición exacta.

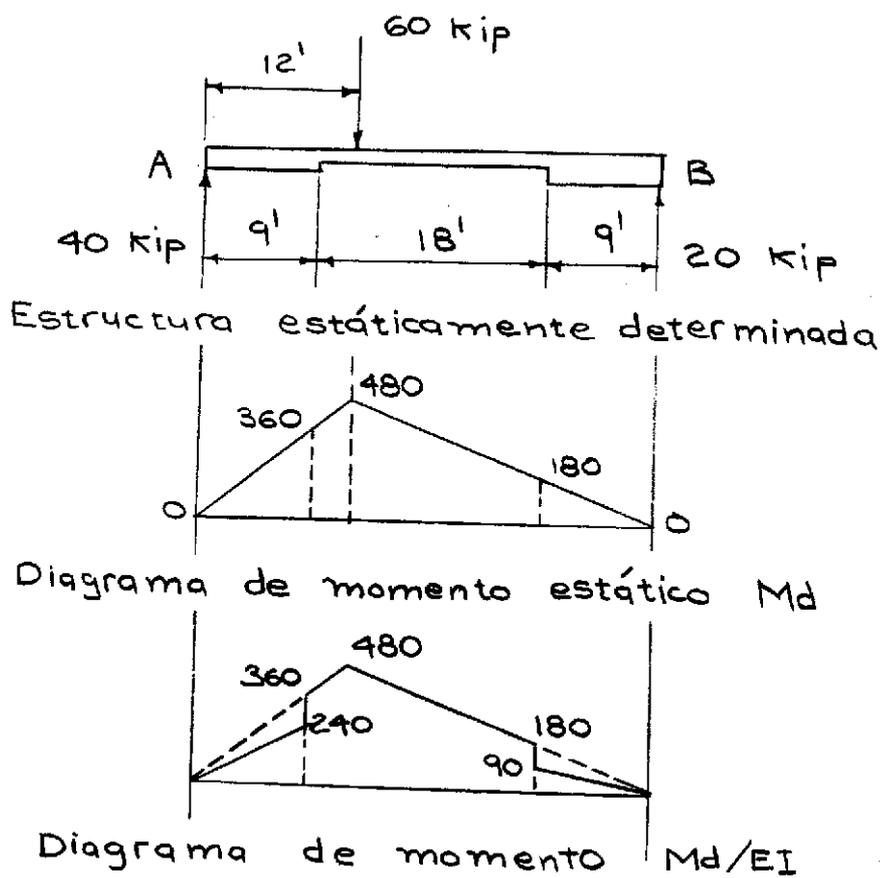


Fig. 3.18.

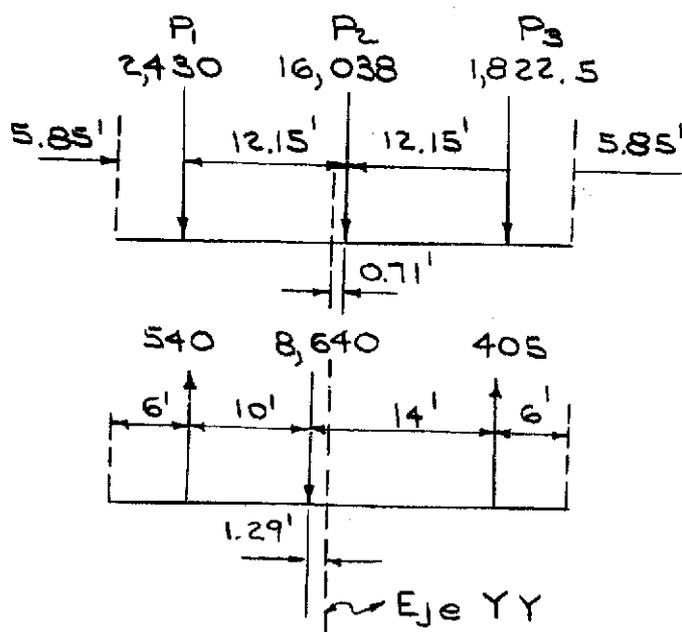


Fig 3.19

La carga total aplicada a la columna será:

$$\begin{aligned} W &= P_1 + P_2 + P_3 - P_4 + P_5 - P_6 \\ &= 2,430 + 16,038 + 1,822.5 \\ &\quad - 540 + 8,640 - 405 \\ W &= 27,985.5 \end{aligned}$$

El momento provocado por las cargas alrededor del eje YY o el centroide de la sección será:

$$\begin{aligned} M_y &= (2,430)(-11.44) + (16,038)(0.71) \\ &\quad + (1,822.5)(12.86) + (-540)(-11.29) \\ &\quad + (8,640)(-1.29) + (-405)(12.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= -27,799.2 + 11,387 + 23,437.4 \\ &\quad + 6,096.6 - 11,145.6 - 5,147.6 \end{aligned}$$

$$M_y = -3,171.4$$

El momento indeterminado en A o sea el esfuerzo  $f_A$  en este punto de la columna análoga será:

$$\begin{aligned} f_A &= \frac{W}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} \\ &= \frac{27,985.5}{28.5} + \frac{(-3,171.4)(-17.29)}{2,456.2} \end{aligned}$$

$$f_A = 1,004.2$$

El momento indeterminado en B, o sea el esfuerzo  $f_B$  en este punto de la columna, será:

$$f_B = \frac{27,985.5}{28.5} + \frac{(-3,171.4)(18.71)}{2,456.2}$$

$$f_B = 957.8$$

Los momentos determinados  $M_d$  son cero en los extremos A y B de la viga analizada y por lo tanto los momentos reales en estos puntos serán:

$$\begin{aligned} M_A &= M_d - M_i \\ &= 0 - (1,004.2) \\ \therefore M_A &= -1,004.2 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_B &= M_d - M_i \\ &= 0 - (957.8) \\ \therefore M_B &= -957.8 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$

## EJEMPLO

Por el método de la analogía de la columna, calcular los momentos en los extremos de la viga acartelada de la Fig. 3.20.

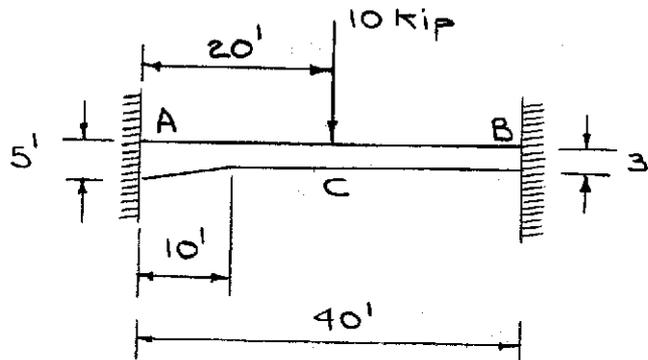


Fig 3.20

## ANALISIS

Como primer paso habrá que dividir la cartela en segmentos de longitud constante; en este caso se tomarán cuatro segmentos con longitud de 2.5' (ver Fig. 3.21). Asumiendo que la inercia para el peralte de 3' es la unidad, se calculan las inercias relativas en los centros de cada tramo, así como también los inversos de las inercias  $1/I$  y los incrementos de área  $dA$  para la sección transversal de la columna análoga, que serán iguales a la longitud del segmento sobre la inercia relativa; además calcular las distancias  $X$  al extremo A a partir de los centros correspondientes y determinar el centroide de la sección de columna respecto a A, sabiendo que está situado sobre el eje de simetría (Ver Fig. 3.21). Los cálculos se tabulan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1

Sect.	Long.	I. Rel.	$1/I$	$dA$	$X$	$X \cdot dA$	$X^2 \cdot dA + I_y$
1	2.5	3.969	0.252	0.63	1.25	0.79	1.0
2	2.5	2.843	0.352	0.88	3.75	3.30	12.4
3	2.5	1.953	0.512	1.28	6.25	8.00	50.0
4	2.5	1.271	0.787	1.97	8.75	17.24	150.9
5	30.0	1.000	1.000	30.00	25.00	750.00	2,250.0
				34.76		779.33	18,750.0
							21,214.3

La última columna de la tabla 3.1 indica los momentos de inercia respecto al extremo A, más los momentos de inercia respecto al eje perpendicular al eje XX de cada sector, sien-

do estos últimos despreciables en los segmentos de la cartela.

La columna equivalente puede suponerse de un ancho  $l/l$  eliminando el módulo de elasticidad  $E$ , ya que este término aparece también en el diagrama  $Md/EI$ . De acuerdo a la Fig. 3.22, la coordenada  $\bar{X}$  del centroide de la sección transversal de la columna respecto al extremo A será:

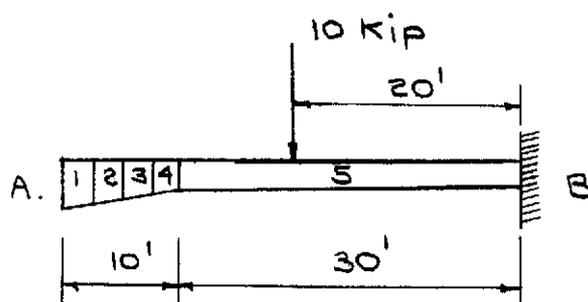
$$\bar{X} = \frac{779.33}{34.76}$$

$$\bar{X} = 22.42$$

El momento de inercia respecto al eje centroidal resulta:

$$\begin{aligned} I_y &= 21,214.3 - \bar{X}^2 \cdot A \\ &= 21,214.3 - 34.76 (22.42)^2 \\ &= 21,214.3 - 17,472.3 \\ I_y &= 3,742.0 \end{aligned}$$

La estructura se vuelve estáticamente determinada, suprimiendo el apoyo A y considerando a la viga como un voladizo libre en este punto y empotrado en B tal como puede verse en la Fig. 3.21.



Estructura estáticamente determinada.-

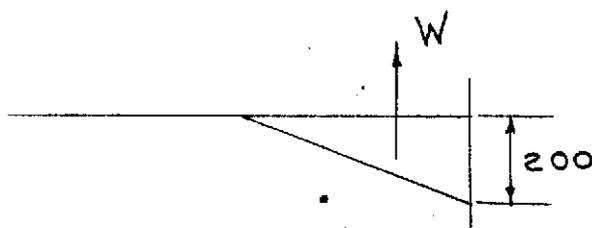
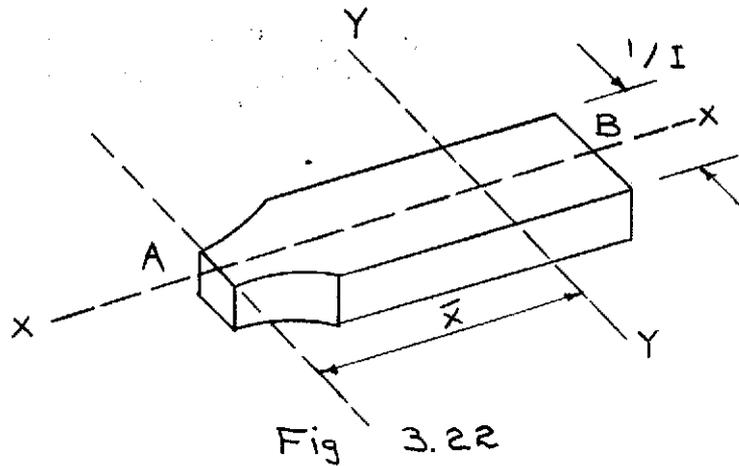


Diagrama de momento estatico Md.

Fig. 3.21



La carga sobre la columna análoga será el área del diagrama triangular ocasionado por el momento estático  $Md$  en la estructura determinada y será negativa debido a que tal momento induce tensión en la cara superior de la viga:

$$W = -\frac{1}{2} (200)(20)$$

$$W = -2,000$$

La carga provocará un momento alrededor del eje  $YY$ :

$$M_y = -2000 (40 - 22.42 - 6.67)$$

$$M_y = -21,820$$

Calcular los esfuerzos en los puntos A y B de la columna, que serán los momentos indeterminados en la viga real

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

$$f_A = \frac{(-2000)}{34.76} + \frac{(-21,820)(-22.42)}{3,742}$$

$$f_A = 73.2 \text{ kip-pie}$$

$$f_B = \frac{(-2000)}{34.76} + \frac{(-21,820)(17.58)}{3,742}$$

$$f_B = -160 \text{ kip-pie}$$

Los momentos reales en los extremos A y B serán:

$$\begin{aligned}
 M_A &= 0 - (73.2) \\
 M_A &= -73.2 \text{ kip-pie} \\
 \\ \\
 M_B &= -200 - (-160) \\
 &= -200 + 160 \\
 M_B &= -40 \text{ kip-pie}
 \end{aligned}$$

### 3.5 CALCULO DE RIGIDECES Y FACTORES DE TRANSPORTE

Recibe el nombre de Rigidez absoluta en el punto A, de un miembro estructural AB, el momento que debe ser aplicado en este extremo, para que la tangente a la curva elástica en tal punto gire un radián, cuando el extremo B está fijo o empotrado.

El factor de transporte de A a B se define como la relación del momento que se produce en el extremo fijo o empotrado B al momento aplicado en el extremo A.

En ambos casos no se produce traslación en los extremos.

#### EJEMPLO

En la viga de sección constante de la Fig. 3.23, calcular el factor de transporte de A a B, así como la rigidez absoluta, aplicando la analogía de la columna.

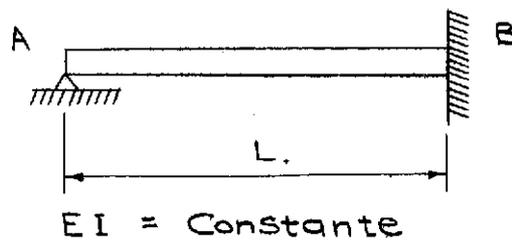


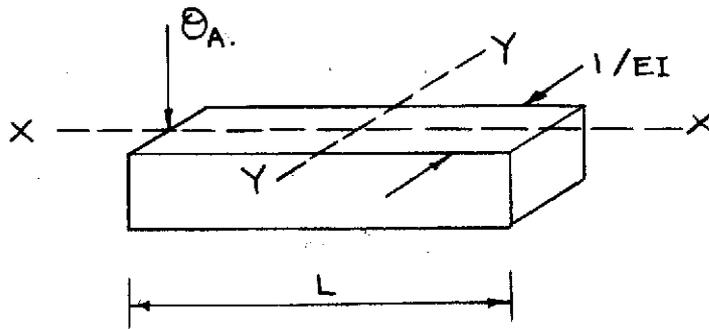
Fig 3.23

#### DESARROLLO

Al cargar a la columna equivalente con el diagrama de momento  $Md$  sobre  $EI$ , se está colocando la variación angular a lo largo de la estructura original, sobre la sección transversal; por lo tanto al girar únicamente el extremo A un ángulo  $\theta_A$ , habrá que colocar sobre la columna una carga concentrada de  $\theta_A$  en el punto A. En la estructura no hay momentos estáticos  $Md$ , ya que no hay cargas que los provoquen y únicamente existen los momentos indeterminados  $M_i$  que se inducen con el giro en A. La carga  $\theta_A$  sobre la columna análoga causa un momento respecto al centroide de la sección transversal, siendo los esfuerzos en los puntos A y B, los momentos indeterminados  $M_i$ . (Ver Fig. 3.24).



Estructura original girada un ángulo  $\theta_A$  en A.



Columna equivalente

Fig. 3.24

Los esfuerzos en A y B serán:

$$f_A = \frac{\theta_A}{L/EI} + \frac{\theta_A (-L/2)(-L/2)}{(1/EI)(L^3/12)}$$

$$f_A = \frac{4 \theta_A EI}{L} = M_A$$

$$f_B = \frac{\theta_A}{L/EI} + \frac{\theta_A (-L/2)(L/2)}{(1/EI)(L^3/12)}$$

$$f_B = -\frac{2 \theta_A EI}{L} = M_B$$

La rigidez absoluta en A, será el momento en este punto, cuando el giro  $\theta_A$  sea de 1 radián:

$$K_A = \frac{4EI}{L}$$

El factor de transporte será la relación entre  $M_B$  y  $M_A$ :

$$\frac{M_B}{M_A} = - \frac{2.EI.\theta_A.L}{L.4EI.\theta_A} = - \frac{1}{2}$$

## EJEMPLO

Determinar la rigidez en el extremo A, así como el factor de transporte de A a B en la viga acartelada de la Fig. 3.25.

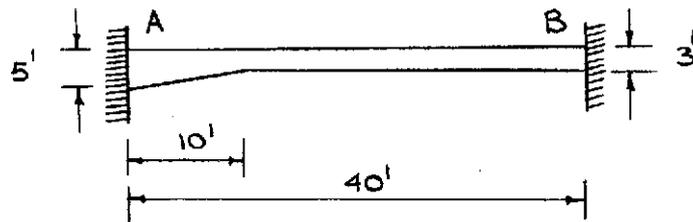
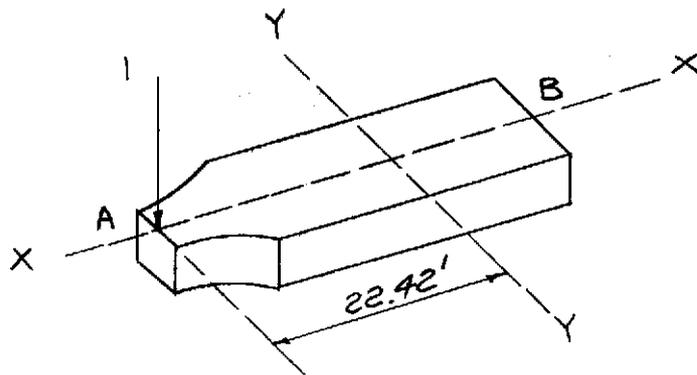


Fig. 3.25



$$A = \frac{34.37}{EI} \quad I_y = \frac{3.742}{EI}$$

Columna análoga

Fig 3.26

## SOLUCION

Para establecer la rigidez absoluta en A, debe hacerse girar tal punto un radián, lo cual como ya se sabe, implica colocar una carga unitaria sobre la columna análoga correspondiente, tal como se indica en la Fig. 3.26.

Puede notarse que la viga es igual a la del ejemplo último del artículo 3.4, por lo que de aquí obtenemos las características para la sección transversal de la columna análoga, constituyéndose los esfuerzos en los puntos A y B de la misma, en los momentos inducidos en tales

puntos en la viga real, por el giro unitario en A de tal manera que:

$$M_A = f_A = \frac{W}{A} + \frac{My \cdot x}{I_y}$$

$$= \frac{1}{(34.76/EI)} + \frac{(1)(-22.42)(-22.42)}{3742/EI}$$

$$\therefore M_A = 0.163 EI$$

$$M_B = \frac{1}{34.76/EI} + \frac{(1)(-22.42)(17.58)}{3742/EI}$$

$$M_B = -0.0766 EI$$

La relación entre  $M_B$  y  $M_A$  será el factor de transporte:

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{(-0.0766 EI)}{0.163 EI} = -0.47$$

Debe hacerse notar que todos los ejemplos considerados en este capítulo, fueron casos especiales ya que siempre existía por lo menos un eje de simetría en la sección transversal de la columna análoga, por lo que se conocía la dirección de los ejes principales y además únicamente existían momentos respecto al eje transversal, ya que el longitudinal siempre coincidió en toda su longitud con la carga elástica aplicada; pero estas situaciones no son las más comunes en el análisis de arcos, como se verá en el capítulo siguiente.

## CAPITULO 4

### ANALISIS DE ARCOS POR MEDIO DE LA ANALOGIA DE LA COLUMNA

#### 4.1 GENERALIDADES

En el capítulo 2 se dijo que la condición principal para que una estructura pueda ser considerada como un arco, es que ésta origine reacciones horizontales en sus apoyos, bajo la acción de un sistema de cargas aplicado, aceptándose como condición adicional, la curvatura de dicha estructura, aunque tal situación no es absolutamente indispensable, puesto que un miembro curvo de cualquier forma, puede suponerse integrado por un número finito de segmentos, cada uno de los cuales tiene un momento de inercia constante y a medida que aumenta el número de estos, más se aproxima la forma del miembro a una curva. Por esta razón puede decirse que los marcos rígidos son arcos simplificados con solamente tres miembros finitos; por consiguiente, antes de entrar a analizar estructuras curvas, se tratará el caso de los marcos rígidos, ya que son una clase especial de arcos.

#### 4.2 ANALISIS DE ARCOS

Se dice que un arco está completamente analizado, cuando los empujes, cortes y momentos en cualquier sección perpendicular al eje del arco son conocidos. El empuje es la fuerza total que actúa en una dirección perpendicular a la sección transversal considerada, y en su centroide; el corte es la fuerza total que actúa en dirección paralela a esta sección, mientras que el momento ocurre alrededor del eje centroidal horizontal de la sección transversal. Resulta evidente que el empuje, corte y momento en cualquier sección de un arco, pueden ser determinados fácilmente por las leyes de estática, si las reacciones en los apoyos son conocidas, es decir que el análisis de un arco se reduce a determinar el valor de las reacciones y momentos en los apoyos. Para el caso de cargas vivas la mejor forma de ejecutar el análisis es construyendo las líneas de influencia para las reacciones y momentos en los apoyos.

Las cargas a considerar en el análisis de arcos son de dos clases: horizontales y verticales. Las primeras pueden ser por viento, temblor, empujes de tierra, etc., mientras que las segundas son de dos clases: cargas muertas y cargas vivas.

Además de los efectos provocados por un sistema de cargas que actúa sobre un arco, existen ciertos factores que al igual que el primero, ocasionan a lo largo de la estructura, una serie de momentos flexionantes y por consiguiente influyen en el análisis de arcos; algunos de estos factores son:

- 1) Variaciones de temperatura: ocurren en el medio ambiente y a las mismas están ex -

puestas los arcos; pueden ser aumentos o disminuciones de temperatura. En nuestro medio se aceptan variaciones de  $\pm 25^{\circ}\text{F}$ .

- 2) Flujo Plástico y Fraguado. Estos efectos tienen lugar en arcos de concreto reforzado y aunados pueden considerarse como aproximadamente equivalentes a una disminución de temperatura de  $-15^{\circ}\text{F}$  aunque esto depende de las propiedades de la mezcla de concreto.
- 3) Acortamiento por carga axial: se deben a los esfuerzos axiales internos que se originan por las cargas que soporta el arco.
- 4) Desplazamiento de apoyos: pueden ser verticales y aún horizontales, por las reacciones que en tal sentido se inducen en los arcos; ocurren debido a malas condiciones de cimentación de los suelos.

En los artículos siguientes se procederá a analizar algunos arcos sujetos a diversos sistemas de cargas por medio de la analogía de la columna.

### 4.3 MARCOS RIGIDOS

Son estructuras compuestas de columnas que pueden ser verticales o inclinadas y vigas que a su vez pueden ser horizontales o inclinadas, debiendo cumplirse la condición de que el ángulo entre dos miembros consecutivos se mantenga inalterable, cuando el marco está sujeto a un sistema de cargas o a la acción de agentes externos, es decir que teóricamente no existe rotación en los nudos, de donde se origina el nombre de marcos rígidos, aunque sus miembros por supuesto se comportan elásticamente y sufren deformaciones por flexión. Los marcos pueden dividirse en dos grupos que son simétricos y asimétricos.

#### 4.3.1 MARCOS SIMETRICOS

Son los que tienen un eje de simetría, el cual se refiere únicamente a la geometría del marco y no a los sistemas de cargas aplicadas. Los marcos simétricos pueden ser articulados si existe giro en los apoyos, o bien empotrados cuando éstos no tienen movimiento; los marcos simétricos pueden ser analizados por la Analogía de la Columna; como existe un eje de simetría, se conoce la dirección de los ejes principales, ya que uno de estos es el propio eje de simetría, mientras que el otro eje principal será perpendicular al primero.

Los esfuerzos sobre la columna análoga en cualquier punto de su sección transversal, serán los momentos indeterminados  $M_i$  en el marco original y pueden ser calculados sin dificultad por la expresión (1.31), una vez establecida la posición del centro elástico.

Los marcos simétricos al igual que los asimétricos, frecuentemente contienen miembros inclinados, que en la sección transversal de su columna análoga, presentan la forma mostrada en la Fig. 4.1 y para los que se hace necesario calcular el momento de inercia respecto a los ejes centroidales  $XX$  y  $YY$ , o bien respecto a los ejes  $X'X'$  y  $Y'Y'$  que pasan por los extre-

mos.

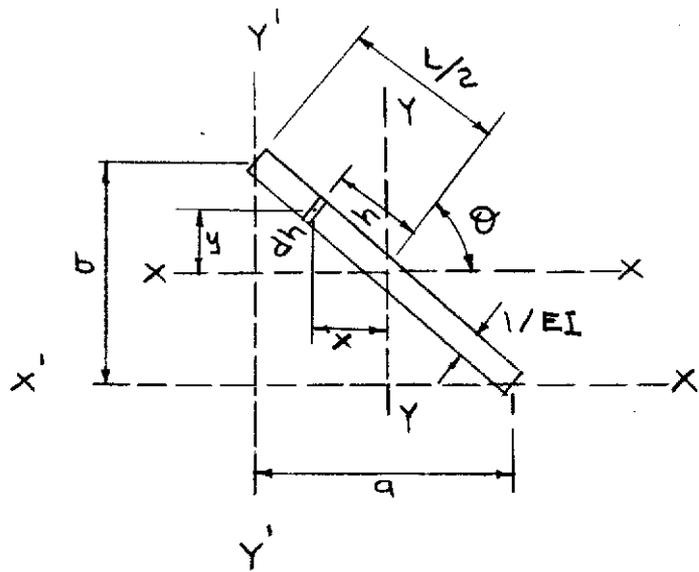


Fig. 4.1

El momento de inercia respecto al eje XX puede calcularse en la forma siguiente:

$$I_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2 \cdot dA$$

pero:  $dA = dh \cdot \left(\frac{1}{EI}\right) = \frac{dh}{EI}$

$$y = h \cdot \cos \theta$$

sustituyendo valores:

$$I_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (h \cdot \cos \theta)^2 \frac{dh}{EI}$$

$$\therefore I_x = \frac{L^3 \cdot \cos^2 \theta}{12EI}$$

de acuerdo a la Fig. 4.1

$$a = L \cdot \sin \theta$$

$$b = L \cdot \cos \theta$$

$$\therefore I_x = \frac{L \cdot b^2}{12EI} \quad (4.1)$$

En igual forma pueden establecerse:

momento de inercia respecto al eje YY:

$$I_y = \frac{L \cdot a^2}{12EI} \quad (4.2)$$

momento de inercia respecto al eje X'X'

$$I_{x'} = \frac{L \cdot b^2}{3EI} \quad (4.3)$$

momento de inercia respecto al eje Y'Y':

$$I_{y'} = \frac{L \cdot a^2}{3EI} \quad (4.4)$$

A continuación se analizan algunos marcos simétricos por la analogía de la columna.

#### EJEMPLO

Analizar el marco de apoyos fijos mostrado en la Fig. 4.2 por el método de la analogía de la columna.

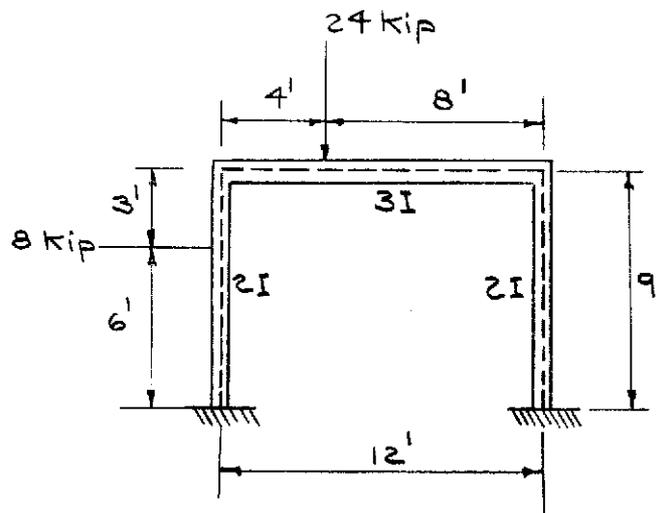


Fig. 4.2

## ANALISIS

Los espesores de la columna análoga  $1/EI$  serán relativos. Asumiendo que la constante  $EI$  es igual a la unidad, resultan las siguientes propiedades para la sección de la columna análoga:

para los espesores:

$$AB \text{ y } DC \quad \frac{1}{2EI} = \frac{1}{(2)(1)} = \frac{1}{2}$$

$$BC \quad \frac{1}{3EI} = \frac{1}{(3)(1)} = \frac{1}{3}$$

$A$  = Area de la sección transversal

$$A = (12)\left(\frac{1}{3}\right) + (2)(9)\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 9$$

$$A = 13$$

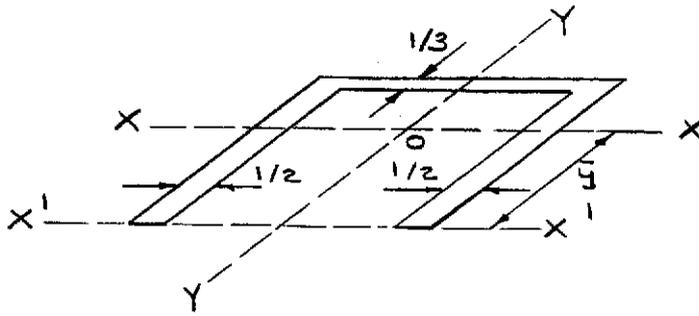
Se nota que el ancho de la columna equivalente, siendo igual a  $1/EI$  es muy pequeño, o sea que el área puede ser considerada matemáticamente como una área lineal y por tal motivo el momento de inercia de la sección respecto a su eje centroidal en la dirección de la línea es cero.

El centroide "o" de la sección estará situado en el eje de simetría  $YY$  que es a la vez eje principal tal como se indica en la Fig. 4.3 La dirección del otro eje principal será perpendicular al primero y pasará por el propio centroide, cuya posición respecto a un eje auxiliar  $X'X'$  se establece en la forma siguiente:

$$\bar{y} = \frac{(4)(9) + (2)(4.5)(4.5)}{13}$$

$$= \frac{36 + 40.5}{13}$$

$$\bar{y} = 5.885'$$



Sección de columna análoga

Fig. 4.3

El momento de inercia respecto al eje XX será:

$$I_x = \frac{1}{3}(12)(3.115)^2 + 2 \left[ \frac{\frac{1}{2}(9)^3}{12} + (4.5)(5.885 - 4.5)^2 \right]$$

$$I_x = 116.83$$

El momento de inercia respecto al eje YY será:

$$I_y = \frac{\frac{1}{3}(12)^3}{12} + (2)(4.5)(6)^2$$

$$I_y = 372$$

La estructura se vuelve estáticamente determinada, suprimiendo el apoyo D y considerando el marco como un voladizo libre en este punto y empotrado en A. Las reacciones en el apoyo A para la estructura básica determinada, bajo la acción de las cargas concentradas de 8 y 24 kip, serán:

$$V_A = 24 \text{ kip} \quad H_A = 8 \text{ kip}$$

Los momentos en los puntos A y B en estas condiciones serán:

$$M_B = (24)(4) = 96 \text{ kip-pie}$$

$$M_A = 96 + (6)(8) = 144 \text{ kip-pie}$$

Los diagramas de momento estático  $M_d$  así como los de momento  $M_d$  sobre  $E_I$  se indi-

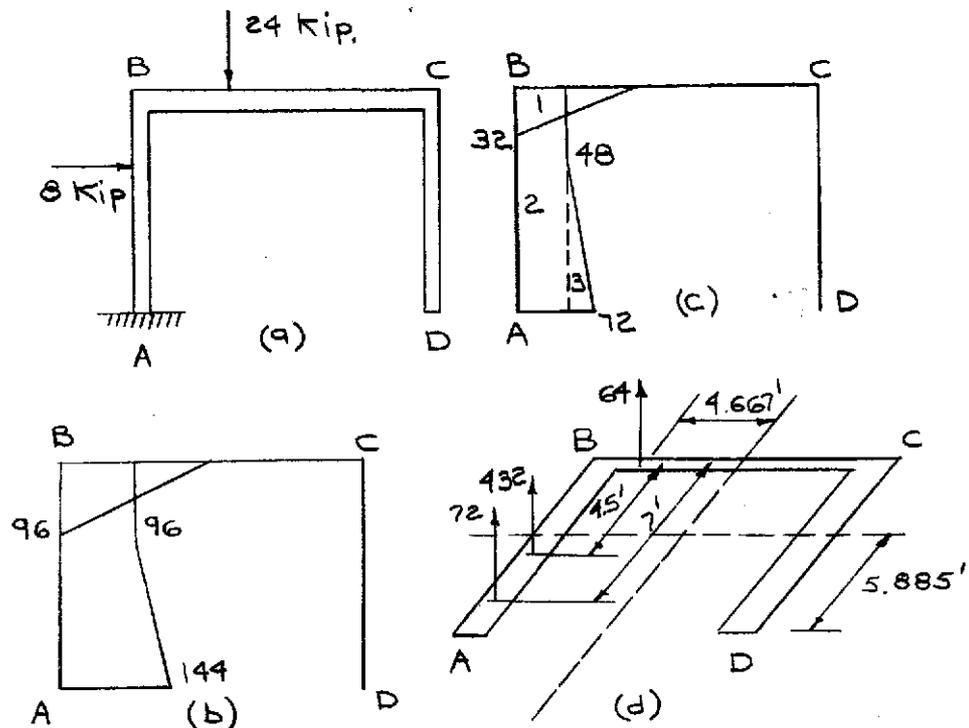
can en la Fig. 4.4. Las cargas sobre la columna análoga equivalen al valor del área del diagrama  $Md$  sobre  $EI$ , en este caso son negativas y ascendentes, ya que los momentos de la estructura determinada también lo son; pueden suponerse concentradas y actuando en los centroides de las áreas parciales en que se dividió el área total del diagrama  $Md/EI$ , siendo sus valores:

$$P_1 = (-32)(4)\left(\frac{1}{2}\right) = -64$$

$$P_2 = (-48)(9) = -432$$

$$P_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)(72 - 48)(6) = -72$$

La ubicación exacta de estas cargas sobre la columna se indica en la Fig. 4.4



- a) Estructura estáticamente determinada
- b) Diagrama de momento  $Md$
- c) Diagrama de momento  $Md/EI$
- d) Cargas sobre la columna análoga

Fig. 4.4

Se calcularán los momentos por flexión en los apoyos y los nudos, o sea en los puntos A, B, C, D; los momentos indeterminados  $M_i$ , como se sabe son los esfuerzos en los puntos correspondientes en la columna análoga y que en este caso se pueden calcular aplicando la fórmula de flexión en columnas cortas con un eje de simetría.

La carga total sobre la columna análoga es:

$$\begin{aligned} W &= -P_1 - P_2 - P_3 \\ &= -64 - 432 - 72 \\ &= -568 \text{ (hacia arriba)} \end{aligned}$$

El momento flexionante respecto al eje XX será:

$$\begin{aligned} M_x &= (-432)(-1.385) + (-72)(-3.885) + (-64)(3.115) \\ M_x &= 678.7 \end{aligned}$$

El momento flexionante respecto al eje YY será:

$$\begin{aligned} M_y &= (-64)(-4.667) + (-432)(-6) + (72)(-6) \\ M_y &= 3,322.7 \end{aligned}$$

Las coordenadas x e y de los puntos analizados respecto a los ejes principales, se indican en la tabla 4.1

Tabla 4.1

	A	B	C	D
x	-6	-6	6	6
y	-5,885	3.115	4.115	-5.885

Para el cálculo de los esfuerzos en los puntos A, B, C, D ver la tabla 4.2.

Tabla 4.2

Punto	$\frac{W}{A}$	$\frac{M_x \cdot y}{I_x}$	$\frac{M_y \cdot x}{I_y}$	f
A	$\frac{(-568)}{13} = -43.69$	$\frac{678.7}{116.83} (-5.885)$ = -34.19	$\frac{3,322.7}{372} (-6)$ = -53.59	-131.47
B	-43.69	$\frac{678.7}{116.83} (3.115)$ = +18.10	$\frac{3,322.7}{372} (-6)$ = -53.59	-79.18
C	-43.69	$\frac{678.7}{116.83} (3.115)$ = +18.10	$\frac{3,322.7}{372} (6)$ = 53.59	+28.00
D	-43.69	$\frac{678.7}{116.83} (-5.885)$ = -34.19	$\frac{3,322.7}{372} (6)$ = 53.59	-24.29

Los momentos reales se calculan por sustracción de los momentos indeterminados  $M_i$  o esfuerzos  $f$  en la columna equivalente, a los momentos determinados  $M_d$ .

$$M_x = M_d - f$$

$$M_A = -144 - (-131.47) = -12.53 \text{ kip-pie}$$

$$M_B = -96 - (-79.18) = -16.82 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = 0 - (28) = -28.00 \text{ kip-pie}$$

$$M_D = 0 - (-24.29) = 24.29 \text{ kip-pie}$$

Los signos negativos de los momentos indican que estos tienden a producir compresión en el lado interior del arco analizado.

Conociendo los momentos en los extremos de los miembros, pueden determinarse el resto de las reacciones en los apoyos por Estática.

### EJEMPLO

Analizar el marco de la Fig. 4.5 sometido a la acción de una carga horizontal de 18 kip. Aplicar la analogía de la columna. Los apoyos son articulados.

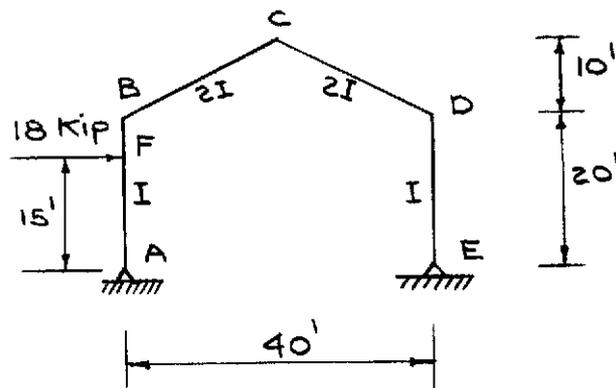


Fig. 4.5

### ANÁLISIS

Se trata de un marco simétrico de apoyos articulados con miembros inclinados. Los espesores de la columna análoga  $1/EI$  serán relativos, asumiendo que la constante  $EI$  es igual a la unidad, las propiedades de la sección de la columna análoga serán las siguientes:

para los espesores:

$$AB \text{ y } DE : \frac{1}{EI} = \frac{1}{I} = 1$$

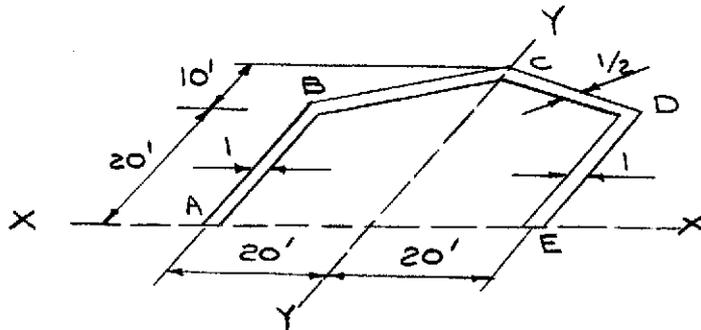
$$BC \text{ y } CD : \frac{1}{2EI} = \frac{1}{2}$$

A = Area de la sección

Como los apoyos son articulados el área de la sección de la columna es infinita en estos puntos, de acuerdo a la explicación del capítulo 3, es decir que el área total de la sección también será infinita:

$$A = \infty$$

El centroide "o" de la sección será la intersección del eje de simetría YY que es a la vez eje principal, con el eje XX perpendicular al primero que pasa por los apoyos donde se concentran áreas infinitas y los esfuerzos son nulos, siendo el eje neutro de la sección transversal de la columna análoga. (Ver Fig. 4.6).



Sección de columna análoga

Fig. 4.6.

El momento de inercia respecto al eje XX será la suma de los momentos de inercia de los miembros con los momentos de inercia de las articulaciones respecto a dicho eje.

a) Para los miembros:

$$I_x = \frac{(2)(1)(20)^3}{3} + (2)\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(22.36)(10)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)(22.36)(25)^2$$

$$I_x = 19,494$$

b) Para las articulaciones:

El área de estas es infinita en la sección transversal de la columna equivalente, pero concentrada en las mismas o sea sobre el eje neutro XX por lo que la distancia hacia el mis-

mo es cero, por consiguiente:

$$I_x = \infty (0)^2 = 0$$

La Inercia resultante respecto al eje XX será:

$$I_x = 19,494 + 0 = 19,494$$

El momento de inercia respecto al eje YY será la suma de los momentos de inercia de los miembros con los momentos de inercia de las articulaciones respecto a dicho eje.

a) Para los miembros:

$$I_y = (2)\left(\frac{1}{2}\right)(22.36)(20)^2 + (2)(1)(20)(20)^2$$

$$I_y = 24,940$$

b) Para las articulaciones

Se sabe que su área es infinita y concentrada en las mismas en la sección transversal de la columna equivalente, siendo las distancias al eje YY de 20 y -20. Por consiguiente:

$$I_y = \infty (-20)^2 + \infty (20)^2$$

$$I_y = \infty$$

El momento de inercia resultante respecto al eje YY será:

$$I_y = 24,940 + \infty$$

$$I_y = \infty$$

La estructura original es estáticamente indeterminada de primer grado y puede volver se estáticamente determinada, suprimiendo la articulación en el punto E y dejando un apoyo simplemente soportado (Ver Fig. 4.7).

Las reacciones en los puntos A y E de la estructura determinada serán:

$$(18)(15) - (40)(V_E) = 0$$

$$\therefore V_E = \frac{270}{40} = 6.75 \text{ kip}$$

$$V_A + V_E = 0 \therefore V_A = -6.75 \text{ kip}$$

$$H_A = -18 \text{ kip}$$

Los momentos en los puntos F, B, C y D serán:

$$M_B = (18)(20) - (18)(5) = 270 \text{ kip-pie}$$

$$M_F = (18)(15) = 270 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = (18)(30) - (18)(15) - (6.75)(20) = 135 \text{ kip-pie}$$

$$M_D = 270 - (6.75)(40) = 0$$

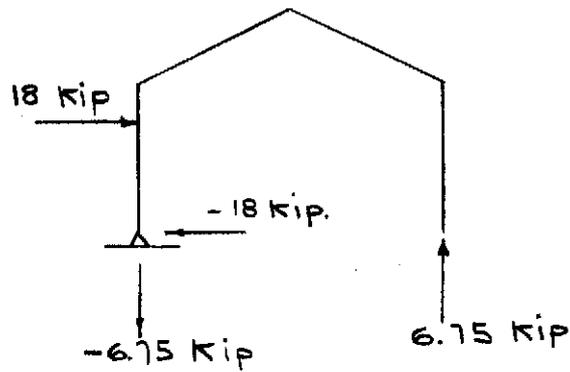


Fig. 4.7

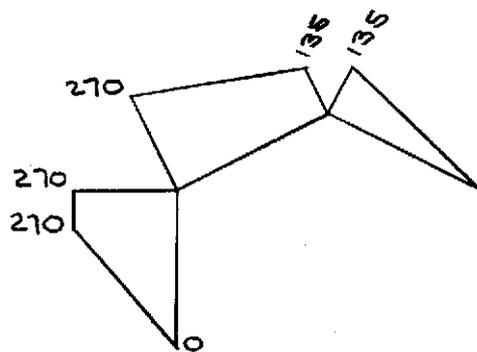
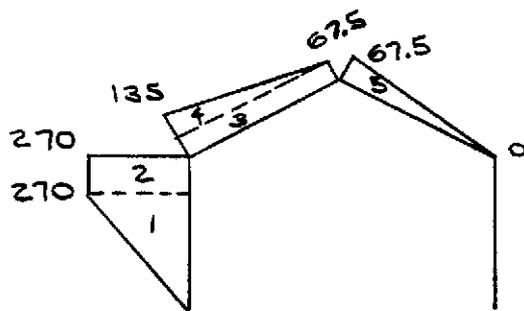
Diagrama momento  $M_d$ .Diagrama de momento  $M_d/EI$ 

Fig. 4.8

Los diagramas de momento estático  $M_d$  así como los de momento  $M_d$  sobre la constante  $EI$  se muestran en la Fig. 4.8; para establecer las cargas sobre la columna análoga se divide el diagrama  $M_d$  sobre  $EI$  en áreas parciales cuyos valores son:

$$P_1 = \frac{(270)(15)}{2} = 2025$$

$$P_2 = (270)(5) = 1350$$

$$P_3 = (67.50)(22.35) = 1509$$

$$P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(67.50)(22.35) = 754$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{2}\right)(67.50)(22.35) = 754$$

La ubicación exacta de las cargas sobre la columna análoga se indica en la Fig. 4.9.

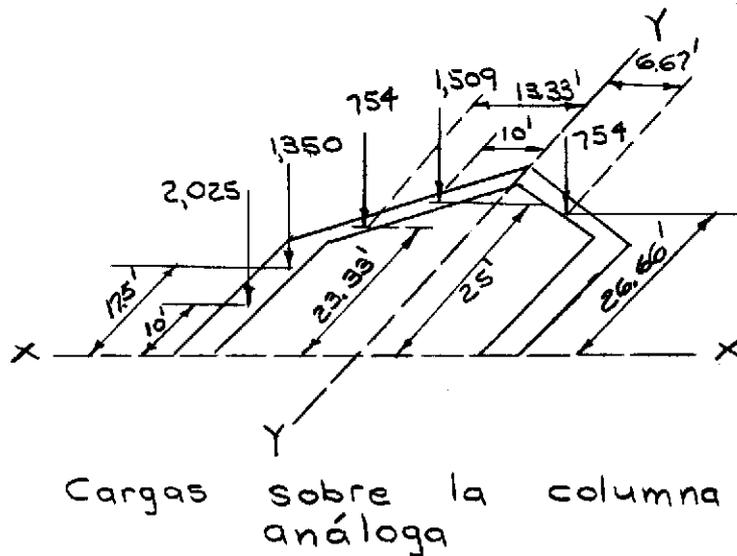


Fig. 4.9.

Los momentos indeterminados  $M_i$  en la estructura analizada, o sean los esfuerzos  $f$  sobre la columna análoga, cuando existe un eje de simetría se calculan así:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_{x,y}}{I_x} + \frac{M_{y,x}}{I_y}$$

Pero debido a que el marco es doblemente articulado resultó que

$$A = \infty \quad I_y = \infty$$

O sea que el esfuerzo en un punto cualquiera de la columna será:

$$f = \frac{M_{x,y}}{I_x}$$

El momento respecto al eje neutro ocasionado por las cargas sobre la columna análoga será:

$$M_x = (2025)(10) + (1350)(17.50) + (754)(23.33) + (1509)(25) + (754)(26.66)$$

$$M_x = 119,290$$

Los esfuerzos en los puntos B, C, y D serán:

$$f_B = f_D = \frac{(119,290)(20)}{19,494} = 123$$

$$f_C = \frac{(119,290)(30)}{19,494} = 184$$

Los momentos reales en los puntos analizados serán:

$$M = M_d - f$$

$$M_B = 270 - 123 = 147 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = 135 - 184 = -49 \text{ kip-pie}$$

$$M_D = 0 - 123 = -123 \text{ kip-pie}$$

Analizando los miembros AB y DE resulta que:

$$147 + (18)(15) - 20H_A = 0$$

$$\therefore H_A = \frac{147 + 90}{20} = 11.85 \text{ kip}$$

$$123 - 20H_E = 0$$

$$\therefore H_E = \frac{123}{20} = 6.15 \text{ kip}$$

$$18 - H_A - H_E = 0$$

$$18 = H_A = H_E = 11.85 + 6.15$$

$$= 18 \text{ kip } \therefore \text{ también}$$

#### 4.3.2 MARCOS ASIMETRICOS

Son los que no tienen ningún eje de simetría, o sea que no se conoce la dirección de los ejes centroidales principales y por lo tanto los esfuerzos sobre la columna análoga no pueden calcularse por la expresión (1.31).

El proceso a seguir es localizar la posición del centroide de la columna equivalente, respecto a un par de ejes auxiliares, a continuación calcular los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  así como el producto de Inercia  $I_{xy}$  respecto a un par de ejes centroidales cualesquiera y luego determinar la posición de los ejes principales por la expresión:

$$\text{Tg. } 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (4.5)$$

$\theta$  es el ángulo que hay que girar los ejes de referencia centroidales, para que coincidan con los ejes principales, siendo los momentos de inercia respecto a los mismos:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (4.6)$$

El valor  $I_{y'}$  puede ser establecido sabiendo que  $I_x + I_y$  es una cantidad constante para todas las posiciones de los ejes rectangulares en un punto de una sección.

Los cálculos anteriores pueden suprimirse aplicando el procedimiento gráfico del círculo de inercia explicado en el capítulo 1.

La rotación de los ejes centroidales para hacerlos coincidir con los ejes principales puede también ser suprimida si se calculan los esfuerzos en la columna análoga aplicando la expresión (I.41) o fórmula general para flexión en columnas, deducida y explicada en el capítulo I de este trabajo.

#### EJEMPLO

Analizar el marco asimétrico de apoyos fijos que se muestra en la Fig. 4.10. Aplicar el método de la analogía de la columna.

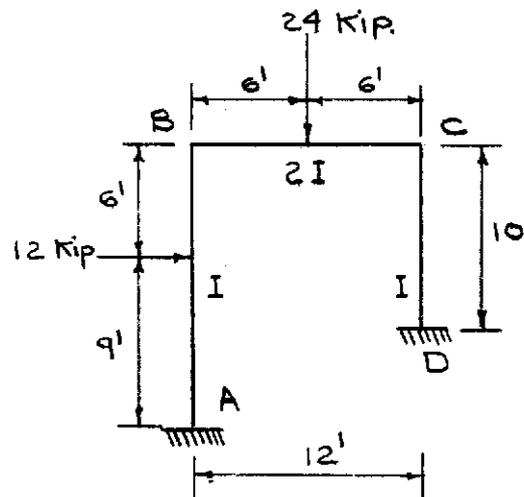


Fig. 4.10

## ANALISIS

Los espesores de la columna análoga serán relativos. Asumiendo que la constante  $EI$  es igual a la unidad, las propiedades de la sección transversal de la columna análoga serán:

para los espesores:

$$AB \text{ y } CD : \frac{1}{EI} = \frac{1}{1} = 1$$

$$BC: \quad \frac{1}{2EI} = \frac{1}{2}$$

$A$  = Area de la sección

$$A = 15(1) + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 10(1)$$

$$A = 31$$

La localización del centroide de la sección será respecto a los ejes auxiliares  $LL$  y  $MM$ . (Ver Fig. 4.11).

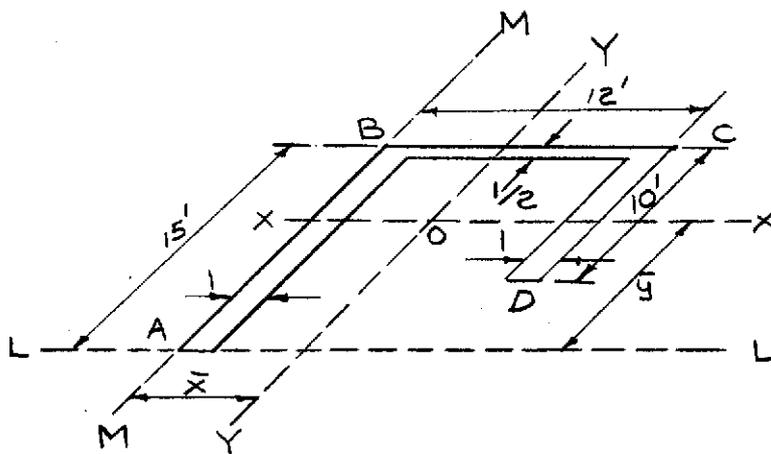
Las coordenadas del centroide serán:

$$\bar{x} = \frac{(15)(0) + (6)(6) + (10)(12)}{31}$$

$$\bar{x} = 5.032'$$

$$\bar{y} = \frac{(15)(7.5) + (6)(15) + (10)(10)}{31}$$

$$\bar{y} = 9.758'$$



Sección de la columna análoga.

Fig. 4.11

Se tomarán como ejes de referencia, los ejes centroidales XX y YY.

El momento de inercia respecto al eje XX será:

$$I_x = \frac{(1)(15)^3}{12} + (15)(2.258)^2 + (6)(5.242)^2 \\ + \frac{(1)(10)^3}{12} + (10)(0.242)^2$$

$$I_x = 606.52$$

El momento de inercia respecto al eje YY será:

$$I_y = (15)(5.032)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(12)^3}{12} \\ + (6)(0.968)^2 + (10)(6.968)^2 \\ I_y = 942.97$$

El producto de inercia respecto a los ejes XX y YY será:

$$I_{xy} = (15)(-5.032)(-2.258) + \\ (6)(0.968)(5.242) + (10)(6.968)(0.242) \\ I_{xy} = 217.74$$

Debido a la asimetría del marco, los ejes de referencia XX y YY no son principales, por lo que de acuerdo a la fórmula general de flexión en columnas, los momentos de inercia respecto a tales ejes deben ser corregidos en la forma siguiente:

$$I_x' = I_x \left( 1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x \cdot I_y} \right) \\ = (606.52) \left[ 1 - \frac{(217.74)^2}{(606.52)(942.97)} \right] \\ = (606.52)(0.9171) \\ I_x' = 556.24$$

$$I_y' = I_y \left( 1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x \cdot I_y} \right) \\ = (942.97)(0.9171) \\ I_y' = 864.80$$

La estructura original, se vuelve estáticamente determinada, suprimiendo el apoyo D y suponiéndola un voladizo libre en este punto y empotrada en A. Las reacciones en el apoyo A en la estructura determinada bajo la acción de las cargas concentradas de 12 y 24 kip, serán

$$V_A = 24 \text{ kip.} \quad H_A = 12 \text{ kip.}$$

Los momentos en los puntos A y B serán:

$$M_B = (24)(6) = 144 \text{ kip-pie}$$

$$M_A = 144 + (12)(9) = 252 \text{ kip-pie}$$

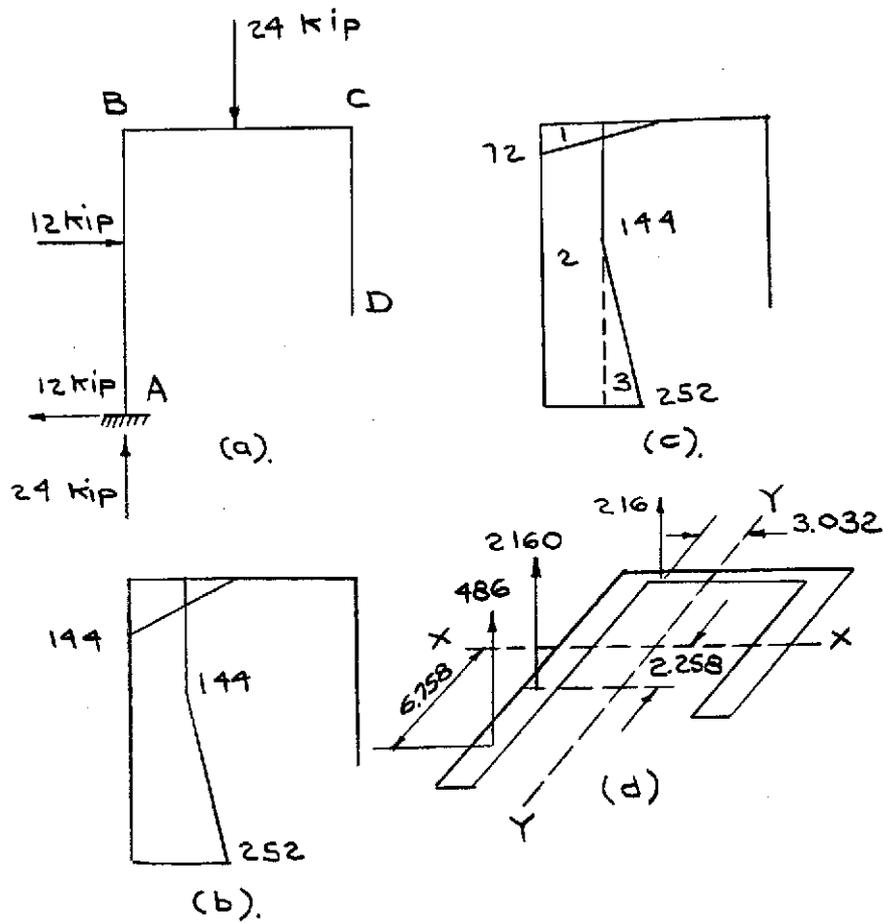
Los diagramas de momento estático determinado  $M_d$ , así como de momento  $M_d$  sobre  $EI$  se muestran en la Fig. 4.12. Las carga sobre la columna análoga equivalen a las áreas parciales en que se dividió el diagrama  $M_d/EI$  y pueden suponerse concentradas y actuando en los centroides respectivos, sus valores serán:

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(6)(72) = -216$$

$$P_2 = (144)(15) = -2160$$

$$P_3 = (252 - 144)\left(\frac{9}{2}\right) = -486$$

La posición exacta de estas cargas sobre la columna análoga, se indica también en la Fig. 4.12.



- a) Estructura determinada  
 b) Diagrama de momento  $M_d$   
 c) Diagrama  $M_d/EI$   
 d) Cargas sobre la columna  
 Análoga

Fig. 4.12.

Se calcularán los momentos por flexión en los puntos A, B, C, D. Los momentos indeterminados  $M_i$  son los esfuerzos en los puntos correspondientes de la columna análoga.

Los cálculos para determinar la carga total así como los momentos respecto a los ejes XX y YY se encuentran en la tabla 4.3

Tabla 4.3

carga	x	y	My = P.x	Mx = P.y
-216	-3.032	+5.242	+654.9	-1,132.3
-2,160	-5.032	-2.258	+10,869.1	+4,877.3
-486	-5.032	-6.758	+ 2,445.6	+3,284.4
-2,862			+13,970.6	+7,029.4

La carga total sobre la columna análoga será:

$$W = -P_1 - P_2 - P_3 = -2,862$$

El momento respecto al eje YY será:

$$M_y = \sum P_x = +13,970.6$$

El momento respecto al eje XX será:

$$M_x = \sum P.y = +7,029.4$$

Estos momentos deben ser corregidos de acuerdo a la fórmula general de flexión en columnas:

$$\begin{aligned} M_x' &= M_x - \frac{M_y \cdot I_{xy}}{I_y} \\ &= 7,029.4 - \frac{(13,970)(217.74)}{942.97} \end{aligned}$$

$$M_x' = 3,803.6$$

$$\begin{aligned} M_y' &= M_y - \frac{M_x \cdot I_{xy}}{I_x} \\ &= 13,970.6 - \frac{(7,029)(+217.74)}{942.97} \end{aligned}$$

$$M_y' = 11,447$$

La fórmula general de flexión en columnas, puede escribirse en la forma siguiente

$$f = \frac{W}{A} + \frac{Mx'.y}{Ix'} + \frac{My'.x}{Iy'}$$

Las coordenadas de los puntos analizados, respecto a los ejes YY y XX se indican en la tabla 4.4.

Tabla 4.4

	A	B	C	D
x	-5.032	-5.032	+6.968	+6.968
y	-9.758	+5.242	+5.242	-4.758

Los cálculos para establecer los esfuerzos sobre la columna análoga en los puntos analizados, se indican en la tabla 4.5.

Tabla 4.5

Punto	$\frac{W}{A}$	$\frac{Mx'.y}{Ix'}$	$\frac{My'.x}{Iy'}$	f
A	$\frac{-2,862}{31} = -92.32$	$\frac{3,803.6}{556.24} (-9.758) = -66.73$	$\frac{11,447}{864.8} (-5.032) = -66.61$	-225.66
B	-92.32	$\frac{3,803.6}{556.24} (+5.242) = 35.85$	$\frac{11,447}{864.8} (-5.032) = -66.61$	-123.08
C	-92.32	$\frac{3,803.6}{556.24} (+5.242) = 35.85$	$\frac{11,447}{864.8} (6.968) = +92.23$	+35.76
D	-92.32	$\frac{3,803.6}{556.24} (-4.758) = -32.54$	$\frac{11,447}{864.8} (6.968) = +92.23$	-32.63

Los momentos flexionantes reales en los puntos analizados, serán los momentos determinados  $M_d$ , menos los momentos indeterminados  $M_i$  o esfuerzos  $f$  en los puntos de la columna análoga.

$$M = M_d - f$$

$$M_A = -252 - (-225.66)$$

$$M_A = -26.34 \text{ kip-pie}$$

$$M_B = -144 - (-123.08)$$

$$M_B = -20.92 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = 0 - (35.76)$$

$$M_C = -35.76 \text{ kip-pie}$$

$$M_D = 0 - (-32.63)$$

$$M_D = +32.63 \text{ kip-pie}$$

Conociendo los momentos en los extremos de los miembros, se pueden determinar por las leyes de estática las reacciones en los apoyos.

### EJEMPLO

Analizar el marco de la Fig. 4.13 sobre el que actúa una carga horizontal concentrada de 10 kip, por el método de la analogía de la columna. Los apoyos son articulados.

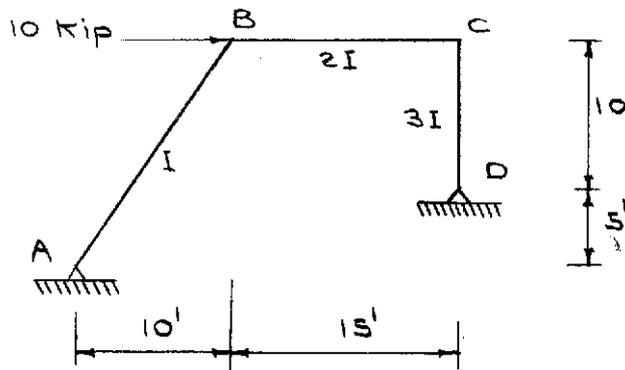


Fig. 4.13

### ANALISIS

Los espesores de la columna análoga serán relativos; asumiendo que la constante  $EI$  tiene un valor igual a la unidad, las propiedades de la sección transversal de la columna análoga serán las siguientes:

para los espesores:

$$AB : \frac{1}{EI} = \frac{1}{1} = 1$$

$$BC : \frac{1}{2EI} = \frac{1}{2}$$

$$CD : \frac{1}{3EI} = \frac{1}{3}$$

Como es un marco asimétrico no se conoce la dirección de los ejes principales, pero debido a que es doblemente articulado, sabemos que el eje neutro XX pasará por los apoyos y contiene al centroide de la sección; el otro eje principal es perpendicular al anterior y pasa por el centroide. El área de la sección transversal de la columna análoga es infinita en este caso, así como también el momento de inercia respecto al eje centroidal perpendicular al eje neutro XX. (Ver Fig. 4.14), es decir que los esfuerzos sobre la columna equivalente se calculan en la siguiente forma:

$$f = \frac{Mx.y}{Ix}$$

La estructura original es estáticamente indeterminada de primer grado y se vuelve determinada introduciendo una articulación en el punto C, tal como se indica en la Fig. 4.14(a).

Las reacciones en los puntos A y D serán:

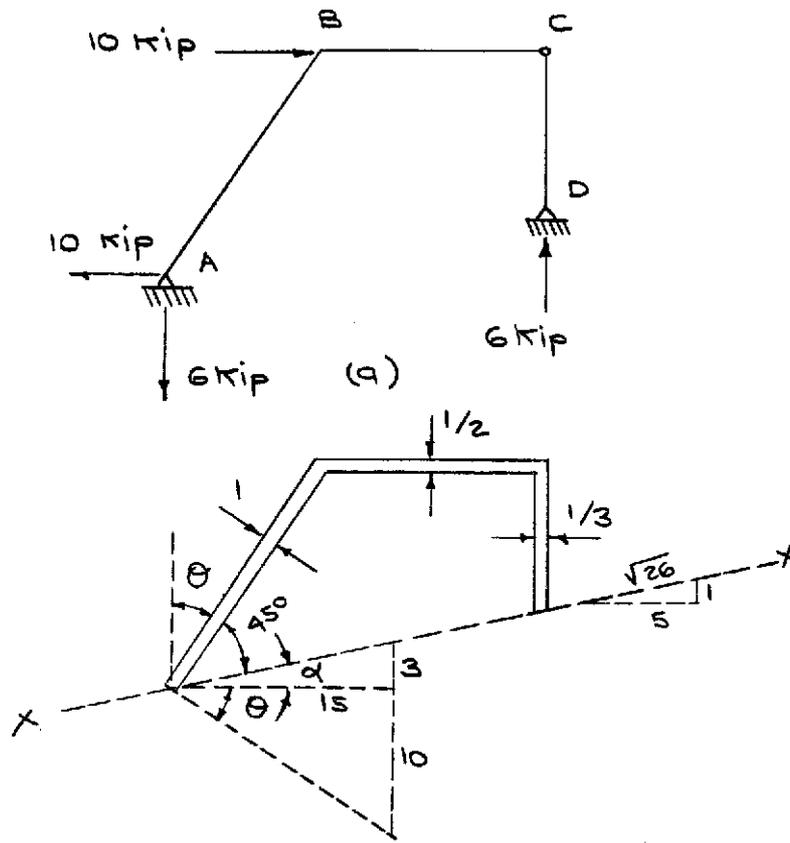
$$(V_D)(25) = (15)(10)$$

$$V_D = \frac{150}{25} = 6 \text{ kip.} \quad H_A = -10 \text{ kip.}$$

$$V_A = -V_D = -6 \text{ kip}$$

El momento en el punto B será:

$$\begin{aligned} M_B &= 10 \times 15 - 6 \times 10 \\ &= 90 \text{ kip-pie} \end{aligned}$$



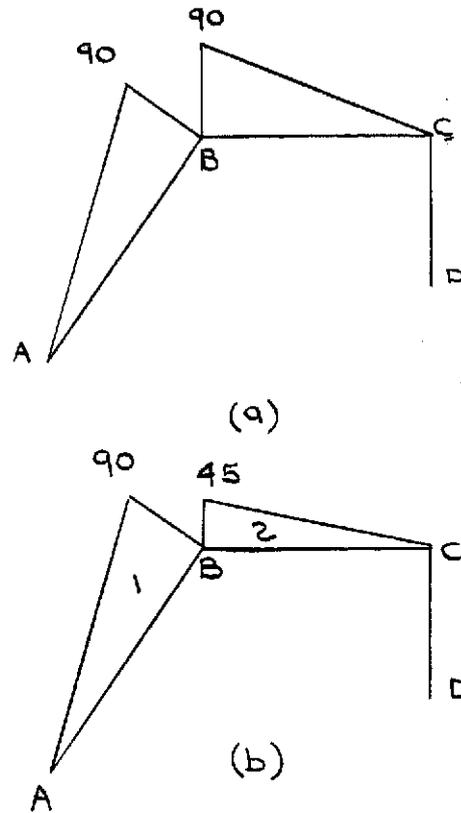
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{15} \quad \alpha = 11^{\circ} 20'$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{10}{15} \quad \theta = 33^{\circ} 40'$$

$$90^{\circ} - (\theta + \alpha) = 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}$$

- a) Estructura determinada  
 b) Sección transversal de la Columna Análoga

Fig. 4.14



- a) Diagrama de momento  $M_d$ .  
 b) Diagrama  $M_d / EI$ .

Fig. 4.15.

Los diagramas de momento  $M_d$  y los de momento  $M_d$  sobre  $EI$  cuya área es la carga sobre la columna análoga, se indican en la Fig. 4.15.

Las cargas (1) y (2) sobre la columna análoga serán:

$$P_1 = \frac{(90)(18.03)}{2} = 811.35$$

$$P_2 = \frac{(45)(15)}{2} = 337.50$$

El momento flexionante ocasionado por las cargas respecto al eje neutro  $XX$  es:

$$M_x = (811.35)\left(\frac{2}{3}\right)(18.03)(0.707)$$

$$+ (337.50) (10)(0.1966) + (10)(0.982)$$

$$M_x = 10,875$$

El momento de inercia respecto al eje neutro XX será:

$$I_x = \left(\frac{1}{3}\right)(1)(18.03)(18.03 \times 0.707)^2 +$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(10)(10 \times 0.982)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)(15)\left(\frac{1}{2}\right)(15 \times 0.196)^2$$

$$+ (15)\left(\frac{1}{2}\right)(7.5 \times 0.196 + 10 \times 0.982)^2$$

$$I_x = 2,044$$

Las coordenadas de los puntos B y C respecto al eje XX serán:

$$y_B = (18.03)(0.707) = 12.75$$

$$y_C = (10)(0.982) = 9.82$$

Los esfuerzos  $f$  en la columna para los puntos B y C, es decir los momentos indeterminados  $M_i$ , serán:

$$f_B = \frac{(10,875)(12.75)}{2,044} = 67.6$$

$$f_C = \frac{(10,875)(9.82)}{2,044} = 52.2$$

Los momentos reales en los puntos analizados son el momento determinado  $M_d$  menos el momento indeterminado  $M_i$  o esfuerzo en la columna análoga:

$$M_B = 90 - 67.6 = 22.4 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = 0 - 52.2 = -52.2 \text{ kip-pie}$$

Analizando los miembros AB y CD o columnas del marco:

$$10 H_D - 52.2 = 0$$

$$\therefore H_D = 5.22 \text{ kip}$$

$$5 H_D + 25 V_D - (10)(15) = 0$$

$$V_D = \frac{150 - (5)(5.22)}{25} = 4.95 \text{ kip}$$

$$V_D = -4.95 \text{ kip}$$

$$15 H_A - 22.4 - (4.95)(10) = 0$$

$$H_A = \frac{22.4 + 49.5}{15}$$

$$H_A = 4.79 \text{ kip}$$

$$H_A + H_B = 10 \text{ kip}$$

$$4.79 + 5.22 = 10.01 \text{ kip} \therefore \text{bién}$$

#### 4.4 ARCOS SIMETRICOS

En artículos anteriores se dijo que por lo general se dá el nombre de arco a la estructura que cumple con la condición fundamental de producir reacciones horizontales en sus apoyos, cuando soporta un sistema de cargas verticales y además el eje del alma tiene forma curva, existiendo sin embargo estructuras no curvas que trabajan como arcos; en este trabajo también le llamaremos arcos a las estructuras curvas, sobre las que se han expuesto diversos conceptos en el capítulo 2, aunque se sobreentiende que se considera a los marcos y otros tipos de estructuras como arcos especiales.

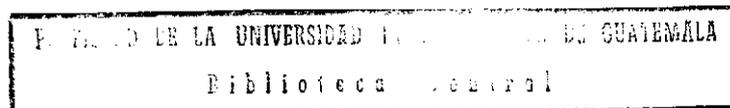
Los arcos simétricos son aquellos que tienen un eje de simetría, referente únicamente a su forma y propiedades geométricas, y no a los sistemas de carga que soporta. Para analizar este tipo de arcos por el método de la analogía de la columna, puede aplicarse la expresión (1.31) del capítulo 1, o fórmula simplificada de flexión en columnas para el cálculo de esfuerzos cuando se conoce la posición de los ejes principales. Se hace necesario dividir el arco en segmentos relativamente cortos, que se denominan "Dovelas"; estos segmentos son considerados como longitudes  $ds$  y se multiplican por los valores  $1/I$  a la mitad de cada dovela, para obtener las áreas parciales  $dA$  que integran el área total correspondiente a la sección transversal de la columna análoga; el módulo de elasticidad  $E$  es omitido, puesto que no afecta los resultados si es constante, a menos que se esté considerando cambios de volumen o desplazamientos. La forma, tipo de curvatura y dimensiones del arco no influyen en el funcionamiento del método ya que este se aplica siguiendo un proceso general que únicamente resulta alterado según que la estructura sea de apoyos fijos o de apoyos articulados.

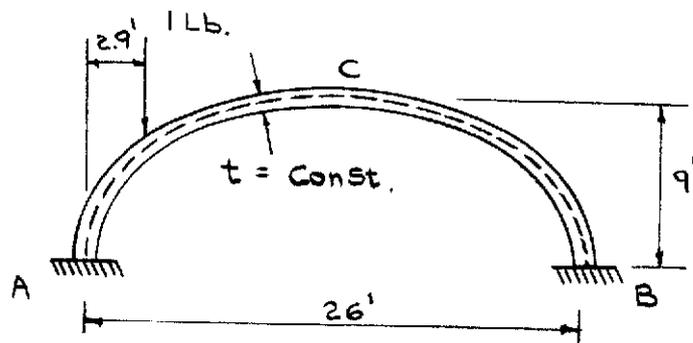
##### 4.4.1 ARCOS NO ARTICULADOS SIMETRICOS

Los arcos no articulados, son aquellos cuyos apoyos son fijos o empotrados, dan lugar a una área finita para la sección de la columna equivalente como podrá verse en los siguientes ejemplos de análisis.

##### EJEMPLO

Analizar el arco elíptico, de peralte constante, doblemente empotrado de la Fig. 4.16, por el método de la analogía de la columna, considerando una carga concentrada de 1 libra a 2.9 pies del apoyo A.





Arco elíptico

Fig. 4.16

## ANALISIS

El arco será dividido en ocho dovelas de longitud constante.

$$\begin{aligned} ds &= \text{longitud de dovela} \\ &= \text{longitud del nervio}/8 \end{aligned}$$

$$= \frac{34.80'}{8}$$

$$ds = 4.35'$$

Asumiendo un valor  $EI = 4.35$ , el espesor de la columna análoga será:

$$1/EI = 1/4.35$$

Los valores para las áreas parciales en cada dovela serán:

$$dA = \frac{ds}{EI} = \frac{4.35}{4.35} = 1$$

En la Fig. 4.17 se muestra la sección transversal de la columna análoga, así como la división en dovelas y los centros de dovela correspondientes que son los puntos 1, 2, 3...8. El centroide de la sección está situado sobre el eje de simetría  $YY$ , para determinar su posición exacta se usa el eje auxiliar  $X'X'$ . Las coordenadas de los centros de dovela respecto a los ejes  $Y'Y'$  y  $X'X'$ , así como el cálculo de la posición del centroide, se encuentran en la tabla 4.6.

Tabla 4.6

Punto	dA	x'	y'	y'.dA
1	1	0.4	2.2	2.2
2	1	2.9	5.7	5.7
3	1	6.6	7.8	7.8
4	1	10.8	8.8	8.8
5	1	15.2	8.8	8.8
6	1	19.4	7.8	7.8
7	1	23.1	5.7	5.7
8	1	25.6	2.2	2.2
	8			49.0

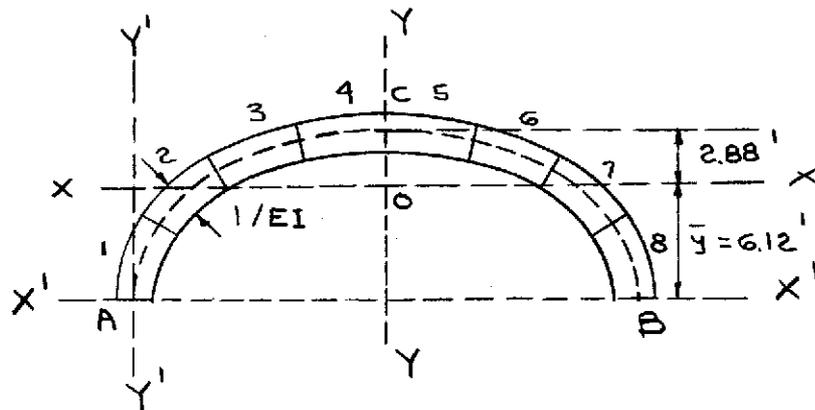
A = Area de la sección de la columna análoga

$$A = \sum dA = \sum \frac{ds}{EI} = 8$$

$\bar{y}$  = coordenada del centroide

$$\bar{y} = \frac{\sum y'.dA}{A} = \frac{49.0}{8}$$

$$\bar{y} = 6.12'$$



Sección de la columna análoga.

Fig. 4.17

Tabla 4.7

Punto	dA	x	y	x <sup>2</sup> .dA	y <sup>2</sup> .dA	Md	$\frac{Md.ds}{EI}$	x.Md	y.Md
1	1	-12.6	-3.9	158.7	15.2	0.36	0.36	-4.53	-1.41
2	1	-10.1	-0.4	102.0	0.2	2.58	2.58	-26.03	-1.03
3	1	-6.4	1.7	41.0	2.9	2.17	2.17	-13.90	+3.69
4	1	-2.2	2.7	4.8	7.3	1.70	1.70	-3.74	+4.58
5	1	2.2	2.7	4.8	7.3	1.21	1.21	+2.66	+3.27
6	1	6.4	1.7	41.0	2.9	0.74	0.74	+4.74	+1.26
7	1	10.1	-0.4	102.0	0.2	0.32	0.32	+3.23	-0.13
8	1	12.6	-3.9	158.7	15.2	0.04	0.04	+0.50	-0.16
	8			613.0	51.2	9.12	9.12	-37.07	+10.07

La carga total sobre la columna análoga será:

$$W = \sum \frac{Md.ds}{EI} = 9.12$$

Los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes centroidales serán:

$$I_y = \sum x^2.dA = 613.0$$

$$I_x = \sum y^2.dA = 51.2$$

Los momentos flexionantes ocasionados por las cargas sobre la columna respecto a los ejes XX y YY serán:

$$M_y = \sum Md.x = -37.07$$

$$M_x = \sum Md.y = +10.07$$

El momento determinado en el punto C o clave del arco será:

$$(Md)_c = (0.888)(13) - (1)(13 - 2.9) \\ = 1.45$$

Los esfuerzos en los puntos A, B y C de la columna análoga o momentos indeterminados  $M_i$  en los puntos correspondientes del arco original se calculan así:

$$M_i = f = \frac{W}{A} + \frac{M_x.y}{I_x} + \frac{M_y.x}{I_y}$$

$$f_A = \frac{9.12}{8} + \frac{(10.07)(-6.12)}{51.2} + \frac{(-37.07)(-13)}{613.0} \\ = 1.14 - 1.20 + 0.78$$

$$f_A = 0.72 \text{ Lbs-pie}$$

$$f_B = \frac{9.12}{8} + \frac{(10.07)(-6.12)}{51.2} + \frac{(-37.07)(13)}{613.0}$$

$$= 1.14 - 1.20 - 0.78$$

$$f_B = -0.84 \text{ Lbs-pie}$$

$$f_C = \frac{9.12}{8} + \frac{(10.07)(2.88)}{51.2} + \frac{(-37.07)(0)}{613.0}$$

$$= 1.14 + 0.57$$

$$f_C = 1.71 \text{ Lbs-pie}$$

Los momentos reales en los puntos analizados serán:

$$M = M_d - f$$

$$M_A = 0 - 0.72 = -0.72 \text{ Lbs-pie}$$

$$M_B = 0 - (-0.84) = 0.84 \text{ Lbs-pie}$$

$$M_C = 1.45 - 1.71 = -0.26 \text{ Lbs-pie}$$

Tomando momentos respecto a la clave a ambos lados del arco, resultan las siguientes ecuaciones:

$$13 V_B + 0.84 + 0.26 - 9 H = 0$$

$$0.26 + 13(1 - V_B) - (1)(10.1) - 0.72 - 9 H = 0$$

Resolviendo el sistema, resulta que:

$$V_B = 0.05 \text{ Lbs} \quad V_A = 1 - V_B$$

$$H = 0.197 \text{ Lbs}$$

Las reacciones verticales en los apoyos serán:

$$V_A = 0.95 \text{ Lbs} \quad V_B = 0.05 \text{ Lbs}$$

Las reacciones horizontales serán:

$$H_A = H_B = H = 0.197 \text{ Lbs}$$

con lo cual el arco queda analizado.

#### EJEMPLO

ANÁLISIS DEL ARCO PARABÓLICO DOBLEMENTE EMPOTRADO

Analizar el arco parabólico de sección constante, doblemente empotrado de la Fig. 4.19, so-

bre el que actúa una carga concentrada de 100 kip a 30' del extremo A. Aplicar el método de la analogía de la columna.

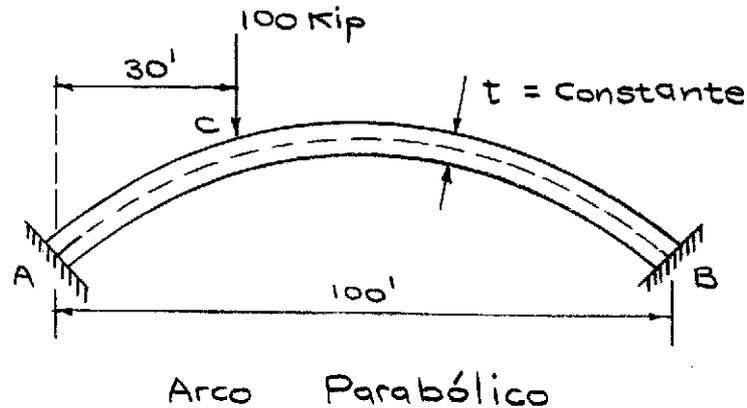


Fig. 4.19

### ANÁLISIS

Se dividirá el arco en 20 segmentos, pero en este caso no será su longitud  $ds$  constante, sino que su proyección horizontal, lo cual se traduce en que las áreas parciales de cada dovela, en la sección de columna análoga, no sean constantes.

$dh$  = longitud de la proyección horizontal de cada dovela

$$dh = \frac{100}{20} = 5'$$

Asumiendo un valor para la constante  $EI$  igual a la unidad, el espesor de la columna análoga será:

$$1/EI = 1/1 = 1$$

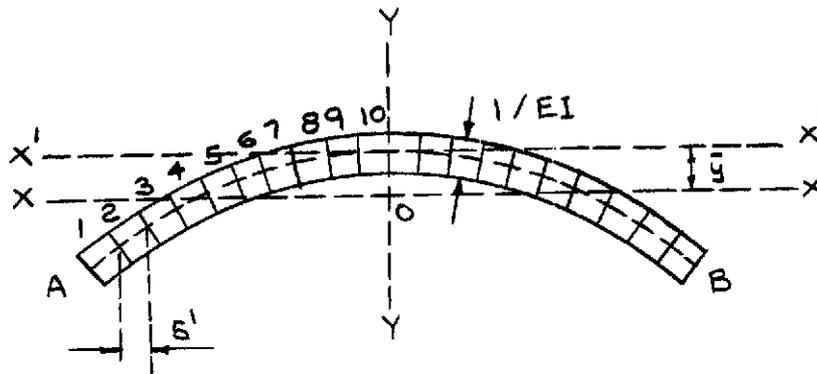
Los valores para las áreas parciales en cada dovela se calculan así:

$$dA = \frac{ds}{EI}$$

La sección transversal de la columna análoga, su división en dovelas y los centros de dovela, es decir los puntos 1, 2, 3.....20, se indican en la Fig. 4.20.

El centroide de la sección estará sobre el eje de simetría  $YY$ , para determinar su posición exacta se usará el eje auxiliar  $X'X'$  que pasa por la clave del arco. Las propiedades de la columna equivalente son establecidas por duplicación de los resultados para una mitad del arco, ya que la otra mitad o rama será idéntica a la primera.

En la tabla 4.8 aparecen las longitudes de dovela  $ds$ , su área  $dA$ , las coordenadas de sus centros respecto a los ejes  $X'X'$  y  $YY$ , así como también los cálculos de la coordenada  $\bar{y}$  del centroide respecto al eje  $X'X'$ .



Sección de la columna análoga

Fig 4.20

Tabla 4.8

Dovela	$ds$	$1/EI$	$dA$	$x$	$y$	$y \cdot dA$	$y^2 \cdot dA$	$x^2 \cdot dA$
1	6.29	1	6.29	-47.5	-18.05	-113.5	2,050	14,150
2	6.05	1	6.05	-42.5	-14.45	- 87.5	1,260	10,950
3	5.83	1	5.83	-37.5	-11.25	- 65.6	740	8,200
4	5.64	1	5.64	-32.5	- 8.45	- 47.7	403	5,970
5	5.46	1	5.46	-27.5	- 6.05	- 33.0	200	4,130
6	5.32	1	5.32	-22.5	- 4.05	- 21.3	87	2,700
7	5.20	1	5.20	-17.5	- 2.45	- 12.8	31	1,600
8	5.10	1	5.10	-12.5	- 1.25	- 6.4	8	795
9	5.04	1	5.04	- 7.5	- 0.45	- 2.3	1	284
10	5.02	1	5.02	- 2.5	- 0.05	- 0.3	0	31
			54.95			-390.2	4,780	48,810

El área de la sección de la columna análoga, será la suma de las áreas parciales de las dovelas:

$$A = 2 \cdot \sum dA = (2)(54.95)$$

$$A = 109.90$$

La coordenada  $\bar{y}$  del centroide respecto al eje  $X'X'$  será:

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot dA}{\sum dA} = \frac{-390.2}{54.95}$$

$$\therefore \bar{y} = -7.10'$$

El momento de inercia respecto al eje de simetría YY que es centroidal será:

$$I_y = 2 \sum x^2 \cdot dA = (2)(48,810)$$

$$I_y = 97,620$$

El momento de inercia respecto al eje centroidal XX será:

$$I_x = I_x' \text{ (respecto al eje X'X')} - \bar{y}^2 \cdot A$$

$$= 2 \cdot \sum y^2 \cdot dA - \bar{y}^2 \cdot A$$

$$= (2)(4,780) - (7.10)^2(109.95)$$

$$I_x = 4,022$$

El arco se vuelve estáticamente determinado suprimiendo el apoyo B y considerando la estructura como un voladizo libre en este punto y empotrada en A. Los momentos determinados  $M_d$  en los centros de dovela se calculan así:

$$M_d = P \cdot d$$

siendo "d" la distancia horizontal entre el centro de dovela considerado y el punto de aplicación de la carga concentrada P de 100 kip.

En la tabla 4.9 se muestran las coordenadas de los centros de dovela respecto a los ejes X'X' y YY, las distancias d, los momentos determinados  $M_d$ , así como los cálculos para la carga sobre la columna análoga y momentos flexionantes respecto a los ejes de referencia. Se puede notar que en dicha tabla solo aparece hasta la dovela 6, lo cual obedece a que es hasta este punto donde ocurren momentos determinados  $M_d$ .

Tabla 4.9

Dovela	dA	x	y	d	Md	Md.dA	x.Md.dA	y.Md.dA
1	6.29	-47.5	-18.05	27.5	-2750	-17,300	820,000	312,000
2	6.05	-42.5	-14.45	22.5	-2250	-13,600	577,000	196,500
3	5.83	-37.5	-11.25	17.5	-1750	-10,200	382,500	114,500
4	5.64	-32.5	- 8.45	12.5	-1250	- 7,070	230,000	59,800
5	5.46	-27.5	- 6.05	7.5	- 750	- 4,100	112,500	24,800
6	5.32	-22.5	- 4.05	2.5	- 250	- 1,330	29,500	5,400
						-53,600	2,151,500	713,000

La carga total  $W$  sobre la columna análoga será negativa y de dirección ascendente, ya que los momentos estáticos  $M_d$  también son negativos, puede calcularse así:

$$W = \sum \frac{M_d \cdot ds}{EI} = \sum M_d \cdot dA$$

$$W = -53,600$$

El momento ocasionado por la carga  $W$  respecto al eje de simetría  $YY$  de la sección transversal de la columna se calcula así:

$$M_y = \sum M_d \cdot x \cdot dA$$

$$M_y = 2,151,500$$

El momento respecto al eje  $XX$  no será  $\sum M_d \cdot y \cdot dA$ , porque los valores tabulados de "y" no están medidos a partir del eje centroidal  $XX$ , por tal motivo, este momento será:

$$M_x = \sum M_d \cdot y \cdot dA - W \cdot \bar{y}$$

$$M_x = 713,000 - (-53,600)(-7.10)$$

$$= 713,000 - 380,200$$

$$M_x = 332,800$$

Se calcularán los momentos reales en los apoyos del arco y en el punto de aplicación de la carga, es decir en A, B y D.

Los esfuerzos  $f$  en los puntos correspondientes a la columna análoga serán:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

$$f_A = \frac{-53,600}{109.9} + \frac{(332,800)(-12.90)}{4,022} + \frac{(2,151,000)(-50)}{97,620}$$

$$f_A = -2,655 \text{ kip-pie}$$

$$f_B = \frac{-53,600}{109.9} + \frac{(332,800)(-12.90)}{4,022} + \frac{(2,151,000)(50)}{97,620}$$

$$f_B = -453 \text{ kip-pie}$$

$$f_D = \frac{-53,600}{109.9} + \frac{(332,800)(3.90)}{4,022} + \frac{(2,151,000)(-20)}{97,620}$$

$$f_D = -605 \text{ kip-pie}$$

Los momentos reales en los puntos analizados serán:

$$M = M_d - f$$

$$M_A = (-30)(1000) - (-2655) = -345 \text{ kip-pie}$$

$$M_B = 0 - (-453) = 453 \text{ kip-pie}$$

$$M_D = 0 - (-605) = 605 \text{ kip-pie}$$

De acuerdo al método del centro elástico, las reacciones en tal punto son:

$$V_o = \frac{My}{I_y} \quad H_o = \frac{Mx}{I_x}$$

Por consiguiente:

$$V_o = \frac{2,151,500}{97,620} = 22.03 \text{ kip}$$

$$H_o = \frac{332,800}{4,022} = 82.74 \text{ kip}$$

Por estática pueden calcularse las reacciones en los apoyos:

$$H_A = H_B = H_o = 82.74 \text{ kip}$$

$$V_B = V_o = 22.03 \text{ kip}$$

$$V_A = 100 - 22.03 = 77.97 \text{ kip}$$

#### 4.4.2 ARCOS ARTICULADOS SIMETRICOS

Son aquellos cuyos apoyos son articulaciones que permiten el giro en cierto grado; dan lugar a una área infinita para la sección de la columna análoga.

##### EJEMPLO

Analizar el arco elíptico de la Fig. 4.16, considerando articulados los apoyos A y B. La luz libre del arco es 26' y la altura 9'. La carga concentrada de 1 Lb. actúa a 2.9' del extremo A. Aplicar la analogía de la columna.

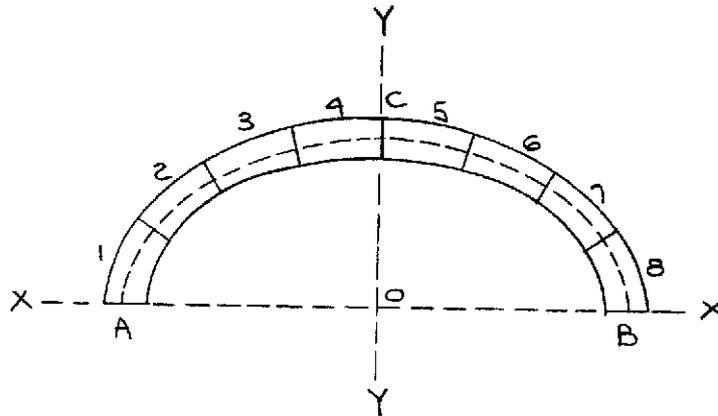
##### ANALISIS

Al igual que en el caso de la Fig. 4.16, el arco se dividirá en 8 dovelas de longitud constante. Por razones ya explicadas anteriormente, para este caso particular, el área de la sección de la columna equivalente será infinita al igual que el momento de inercia respecto al eje de simetría YY, mientras que el eje neutro XX que es el otro eje principal pasa por las articulaciones. Se asumirá un valor para la constante EI de 4.35, para que las áreas de las dovelas resulten igual a uno.

$$dA = \frac{ds}{EI} = \frac{4.35}{4.35} = 1$$

En la Fig. 4.21 se muestra la sección transversal de la columna análoga y su división en dovelas, así como los centros de dovela que son los puntos 1, 2, 3, ..., 8. El centroide "o" de la sección es la intersección del eje de simetría YY con el eje neutro XX.

El arco es estáticamente indeterminado de primer grado y se vuelve estáticamente determinado, suponiéndolo simplemente soportado. Las reacciones en los apoyos, así como los momentos estáticos  $M_d$ , son iguales que en el caso de la Fig. 4.16.



Sección de la columna análoga.

Fig. 4.21

Los esfuerzos  $f$  sobre la columna análoga o momentos indeterminados  $M_i$ , se calculan en este caso así:

$$f = \frac{M_{x,y}}{I_x}$$

debido a que:

$$A = \infty \quad I_y = \infty$$

En la tabla 4.10 se muestran las áreas de dovela  $dA$ , las coordenadas de los centros de dovela, momentos de inercia y momentos flexionantes respecto al eje neutro XX.

Tabla 4.10

Punto	dA	y	y <sup>2</sup> .dA	Md	Md.dA	Md.y.dA
1	1	2.2	4.8	0.36	0.36	0.8
2	1	5.7	32.5	2.58	2.58	14.7
3	1	7.8	60.8	2.17	2.17	16.9
4	1	8.8	77.4	1.70	1.70	15.0
5	1	8.8	77.4	1.21	1.21	10.6
6	1	7.8	60.8	0.74	0.74	5.8
7	1	5.7	32.5	0.32	0.32	1.8
8	1	2.2	4.8	0.04	0.04	0.1
			351.0	9.12	9.12	65.7

El momento de inercia de la sección respecto al eje neutro será:

$$I_x = \sum y^2.dA = 351.0$$

El momento flexionante respecto al eje neutro XX será:

$$M_x = \sum Md.y.dA = 65.7$$

El esfuerzo sobre la columna análoga en el punto C o momento indeterminado será:

$$f_c = \frac{(65.7)(9)}{351} = 1.68 \text{ Lbs-pie}$$

El momento estático Md en la clave del arco es 1.46, de tal manera que el momento real será:

$$\begin{aligned} M_c &= 1.46 - f_c \\ &= 1.46 - 1.68 \\ M_c &= -0.22 \text{ Lbs-pie} \end{aligned}$$

Aplicando las leyes de estática pueden calcularse las reacciones verticales y horizontales en los apoyos.

Las reacciones verticales son:

$$V_A = \frac{23.1}{26} = 0.888 \text{ Lbs}$$

$$V_B = \frac{2.9}{26} = 0.112 \text{ Lbs}$$

Las reacciones horizontales son:

$$H_B = \frac{13 V_B + 0.22}{9} = \frac{(13)(0.112) + 0.22}{9}$$

$$H_B = 0.186 \text{ Lbs}$$

$$H_A = \frac{0.22 + 13 V_A - (1)(10.1)}{9}$$

$$= \frac{0.22 + 13(0.888) - 10.1}{9}$$

$$H_A = 0.186 \text{ Lbs} = H_B \therefore \text{bien}$$

Debe hacerse notar que en el arco de dos articulaciones, la suposición de una viga en voladizo para volver la estructura estáticamente determinada, no es permitida, puesto que la misma está articulada en sus apoyos.

#### 4.5 ARCOS ASIMETRICOS

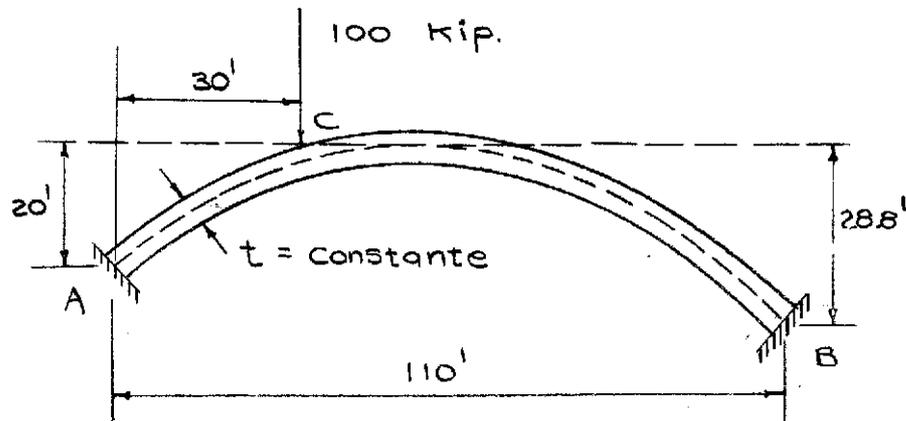
Los arcos asimétricos son los que no tienen eje de simetría y por consiguiente se desconoce la dirección de los ejes principales, es decir que para analizarlos por el método de la analogía de la columna, habrá que usar la supresión (1.41) del capítulo 1, o fórmula general de flexión en columnas. En este caso no puede considerarse una sola mitad del arco y obtener las propiedades de la columna análoga por duplicación de resultados, es decir que debe trabajarse con el arco completo.

##### 4.5.1 ARCOS ASIMETRICOS NO ARTICULADOS

Como se sabe, tienen sus apoyos fijos o empotrados.

EJEMPLO:

Analizar el arco parabólico de sección constante, doblemente empotrado de la Fig. 4.22, por el método de la analogía de la columna.



Arco Parabólico  
asimétrico

Fig 4.22

### ANÁLISIS

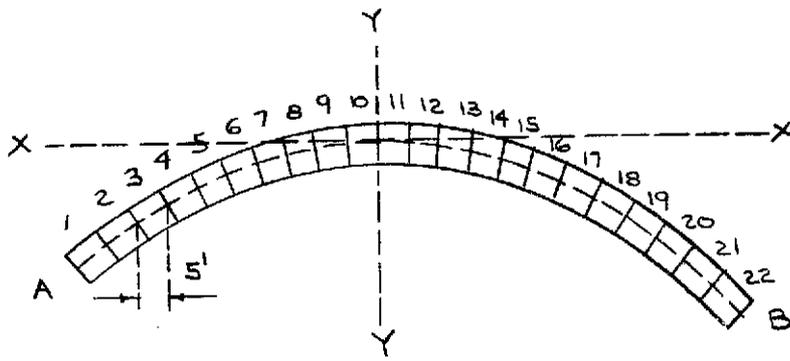
Se dividirá el arco en 22 segmentos o dovelas de proyección horizontal constante e igual a 5'. Al asumir un valor para la constante  $EI$  igual a uno, el espesor de la columna análoga será:

$$1/EI = 1/1 = 1$$

El área de cada dovela, será su longitud  $ds$  sobre la constante  $EI$ :

$$dA = \frac{ds}{EI}$$

La sección transversal de la columna análoga, su división en dovelas y los centros de las mismas que son los puntos del 1 al 22 se indican en la Fig. 4.23. Se usarán los ejes de referencia  $XX$  y  $YY$  que pasan por la clave del arco, para establecer la posición del centroide de la sección.



Sección de la columna análoga

Fig. 4.23

Las longitudes de dovela  $ds$ , su área  $dA$ , las coordenadas de sus centros respecto a los ejes de referencia  $XX$  y  $YY$ , así como los cálculos para las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centroide, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección respecto a los mismos ejes se incluyen en la tabla 4.11.

Tabla 4.11

Dovela	$ds$	$\frac{1}{EI}$	$dA$	$x$	$y$	$y \cdot dA$	$y^2 \cdot dA$	$x \cdot dA$	$x^2 \cdot dA$	$x \cdot y \cdot dA$
1	6.29	1	6.29	-47.5	-18.05	-113.5	2,050		14,150	
2	6.05	1	6.05	-42.5	-14.45	- 87.3	1,260		10,950	
3	5.83	1	5.83	-37.5	-11.25	- 65.6	740		8,200	
4	5.64	1	5.64	-32.5	- 8.45	- 47.7	403		5,970	
5	5.46	1	5.46	-27.5	- 6.05	- 33.0	200		4,130	
6	5.32	1	5.32	-22.5	- 4.05	- 21.3	87		2,700	
7	5.20	1	5.20	-17.5	- 2.45	- 12.8	31		1,600	
8	5.10	1	5.10	-12.5	- 1.25	- 6.4	8		795	
9	5.04	1	5.04	- 7.5	- 0.45	- 2.3	1		284	
10	5.02	1	5.02	- 2.5	- 0.05	- 0.3	0		31	
11	5.02	1	5.02	2.5	- 0.05	- 0.3	0		31	
12	5.04	1	5.04	7.5	- 0.45	- 2.3	1		284	
13	5.10	1	5.10	12.5	- 1.25	- 6.4	8		795	
14	5.20	1	5.20	17.5	- 2.45	- 12.8	31		1,600	
15	5.32	1	5.32	22.5	- 4.05	- 21.3	87		2,700	
16	5.46	1	5.46	27.5	- 6.05	- 33.0	200		4,130	
17	5.64	1	5.64	32.5	- 8.45	- 47.7	403		5,970	
18	5.83	1	5.83	37.5	-11.25	- 65.6	740		8,200	
19	6.05	1	6.05	42.5	-14.45	- 87.3	1,260		10,950	
20	6.29	1	6.29	47.5	-18.05	-113.5	2,050		14,150	
21	6.53	1	6.53	52.5	-22.05	-144.0	3,175	342.8	17,997	-7,560
22	6.79	1	6.79	57.5	-26.45	-179.6	4,750	390.4	22,448	-10,327
			123.22			-1,104.0	17,485	733.2	138,065	-17,887

$\sum x \cdot dA = 0$

$\sum x \cdot y \cdot dA = 0$

El área de la sección transversal de la columna análoga será:

$$A = \sum dA = 123.22$$

Las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centroide de la sección, respecto a los ejes YY y XX serán:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot dA}{\sum dA} = \frac{733.2}{123.22}$$

$$\bar{x} = 5.95'$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot dA}{\sum dA} = \frac{-1104.0}{123.22}$$

$$\bar{y} = -8.96'$$

El momento de inercia respecto a un eje centroidal paralelo al eje XX será:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum y^2 \cdot dA - A \cdot \bar{y}^2 \\ &= 17,485 - (123.22)(-8.96)^2 \\ I_x &= 7,593 \end{aligned}$$

El momento de inercia respecto a un eje centroidal paralelo al eje YY será:

$$\begin{aligned} I_y &= \sum x^2 \cdot dA - A \cdot \bar{x}^2 \\ &= 138,065 - (123.22)(5.95)^2 \\ I_y &= 133,703 \end{aligned}$$

El producto de inercia respecto a los ejes centroidales anteriores será:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum x \cdot y \cdot dA - \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot A \\ &= -17,887 - (5.95)(-8.96)(123.22) \\ I_{xy} &= -11,318 \end{aligned}$$

La estructura se vuelve estáticamente determinada suprimiendo el apoyo en B y considerándola como un voladizo libre en este punto y empotrado en A. Los momentos determinados serán el producto de la carga concentrada P de 100 kip por la distancia horizontal entre su punto de aplicación y el centro de la dovela considerada.

En la tabla 4.12 se muestran los valores de los momentos determinados  $M_d$ , así como los productos de los mismos por las áreas parciales de cada dovela y los momentos ocasionados por el diagrama  $M_d$  sobre EI, respecto a los ejes de referencia; se puede notar que en dicha tabla solo aparece hasta la dovela 6, debido a que hasta ese punto ocurren momentos en la estructura determinada.

Tabla 4.12

Dovela	x	y	d	Md	Md.dA	x.Md.dA	y.Md.dA
1	-47.5	-18.05	-27.5	-2,750	-17,300	820,000	312,000
2	-42.5	-14.45	22.5	-2,250	-13,600	577,000	196,500
3	-37.5	-11.25	17.5	-1,750	-10,200	382,500	114,500
4	-32.5	- 8.45	12.5	-1,250	- 7,070	230,000	59,800
5	-27.5	- 6.05	7.5	750	- 4,100	112,500	24,800
6	-22.5	- 4.05	2.5	250	- 1,330	29,500	5,400
					-53,600	2,151,500	713,000

La carga total sobre la columna análoga es negativa y de dirección ascendente, dado que los momentos en la estructura determinada, también lo son, ya que provocan tensión en el lado exterior del arco. La carga se calcula así:

$$W = \frac{\sum Md.ds}{EI} = \sum Md.dA = -53,600$$

El momento flexionante ocasionado por la carga  $W$ , respecto al eje centroidal paralelo al  $YY$  será:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum x.Md.dA - W.\bar{x} \\ &= 2,151,500 - (-53,600)(5.95) \\ M_y &= 2,470.00 \end{aligned}$$

El momento flexionante ocasionado por la carga  $W$ , respecto al eje centroidal paralelo al  $XX$  será:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum y.Md.dA - W.\bar{y} \\ &= 713,000 - (-53,600)(-8.96) \\ M_x &= 223,000 \end{aligned}$$

Debido a la asimetría del arco, los momentos de inercia, así como los momentos flexionantes calculados anteriormente respecto a los ejes de referencia, deben ser corregidos en la forma siguiente, de acuerdo a la fórmula general de flexión en columnas

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x - \frac{I_{xy}^2}{I_y} \\ &= 7,593 - \frac{(-11,318)^2}{133,703} \end{aligned}$$

$$I_{x'} = 6,635$$

$$I_{y'} = I_y - \frac{I_{xy}^2}{I_x}$$

$$= 133,703 - \frac{(-11,318)^2}{7,593}$$

$$I_{y'} = 116,833$$

$$M_{x'} = M_x - \frac{M_y \cdot I_{xy}}{I_y}$$

$$= 233,000 - \frac{(2,470,000)(-11,318)}{133,703}$$

$$M_{x'} = 442,300$$

$$M_{y'} = M_y - \frac{M_x \cdot I_{xy}}{I_x}$$

$$= 2,470,000 - \frac{(233,000)(-11,318)}{7,593}$$

$$M_{y'} = 2,818,000$$

Las reacciones en el punto neutral se pueden calcular de acuerdo a las ecuaciones siguientes deducidas en el capítulo 1:

$$H_o = \frac{M_{x'}}{I_{x'}} \quad V_o = \frac{M_{y'}}{I_{y'}}$$

$$H_o = \frac{442,300}{6,635} \quad V_o = \frac{2,818,000}{116,833}$$

$$H_o = 66.66 \text{ kip} \quad V_o = 24.11 \text{ kip}$$

Por las ecuaciones de estática, pueden calcularse las reacciones horizontales y verticales en los puntos A y B:

$$H_A = H_B = H_o = 66.66 \text{ kip}$$

$$V_A = 100 - 24.11 = 75.89 \text{ kip}$$

$$V_B = V_o = 24.11 \text{ kip}$$

Los esfuerzos en la columna análoga, son los momentos indeterminados en la estructura original y se calculan así:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_{x'} \cdot y}{I_{x'}} + \frac{M_{y'} \cdot x}{I_{y'}}$$

$$f_A = \frac{-53,600}{123.22} + \frac{(442,300)(-11.04)}{6,635} + \frac{(2,818,000)(-55.95)}{116,833}$$

$$f_A = -2521 \text{ kip-pie}$$

$$f_B = \frac{-53,600}{123.22} + \frac{(442,300)(-19.84)}{6,635} + \frac{(2,818,000)(54.05)}{116,833}$$

$$f_B = -458 \text{ kip-pie}$$

$$f_C = \frac{-53,600}{123.22} + \frac{(442,300)(5.76)}{6,635} + \frac{(2,818,000)(-25.95)}{116,833}$$

$$f_C = -676 \text{ kip-pie}$$

Los momentos reales en A, B y C, se calculan así:

$$M = M_d - f$$

$$M_A = -3,000 - (-2,521)$$

$$M_A = -479 \text{ kip-pie}$$

$$M_B = 0 - (-458)$$

$$M_B = 458 \text{ kip-pie}$$

$$M_C = 0 - (-676)$$

$$M_C = 676 \text{ kip-pie}$$

Conociendo los momentos y reacciones verticales y horizontales en los apoyos, el arco estará analizado.

#### 4.5.2 ARCOS ASIMÉTRICOS ARTICULADOS

Sus apoyos son articulaciones; al igual que en el caso de los arcos simétricos, originan una área infinita para la sección transversal de la columna análoga.

#### EJEMPLO

Analizar el arco de sección constante y doblemente articulado de la Fig. 4.24 por el método de la analogía de la columna.

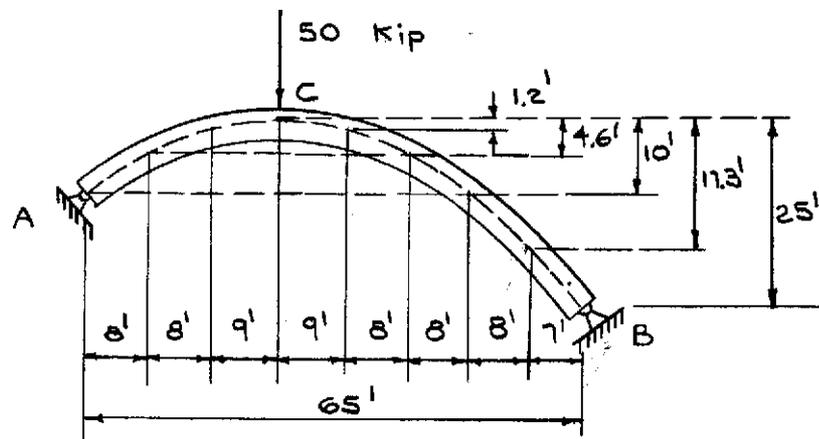


Fig. 4.24

### ANALISIS

El arco será dividido en ocho dovelas, cuyos límites coinciden con los puntos que lo definen y que aparecen en la Fig. 4.24, no siendo constante la longitud de las mismas. Se asumirá un valor de  $EI$  igual a la unidad, o sea que el espesor de la columna análoga será:

$$1/EI = 1/1 = 1$$

La longitud de cada dovela será  $ds$  y las áreas correspondientes a las mismas serán:

$$dA = \frac{ds}{EI}$$

En la Fig. 4-25 se muestra la sección transversal de la columna análoga, su división en dovelas y los centros de dovela que serán los puntos 1, 2, ..., 8. Por existir dos articulaciones en los extremos, el eje neutro  $XX$ , coincidirá con las mismas. La localización del centro de de la sección, así como del otro eje principal centroidal no interesa ya que para este caso particular sabemos que:

$$A = \infty \quad \text{y} \quad I_y = \infty$$

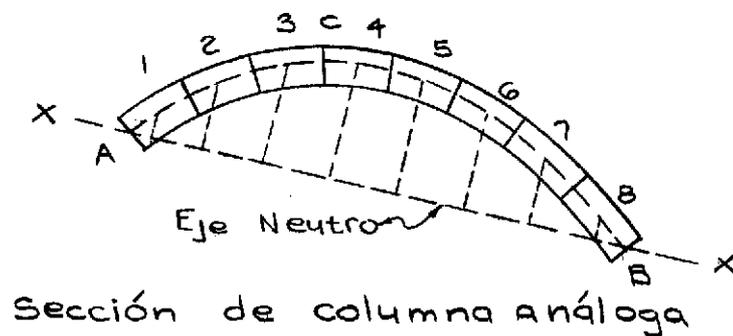


Fig. 4.25

El arco original es estáticamente indeterminado de primer grado y se vuelve determinado, suponiéndolo simplemente soportado, resultando un diagrama de momentos triangular; en tal caso las reacciones en los extremos son:

$$R_A = \frac{(50)(40)}{65} \quad R_B = \frac{(50)(25)}{65}$$

$$R_A = 30.8 \text{ kip} \quad R_B = 19.2 \text{ kip}$$

Los momentos determinados  $M_d$  en los centros de dovela y la clave  $c$  del arco se calculan en la forma siguiente:

A la izquierda de la carga concentrada

$$M_d = R_A \cdot d$$

A la derecha de la carga concentrada

$$M_d = R_B \cdot d$$

$d$  = distancia horizontal entre el apoyo y el centro de dovela considerado.

En la tabla 4.13 aparecen las longitudes de dovela  $d_s$ , sus áreas  $dA$ , las coordenadas de los centros de dovela, los momentos determinados  $M_d$  en estos puntos, así como los cálculos para el momento de inercia y momento flexionante, respecto al eje neutro  $XX$ . Las coordenadas "y" de los centros de dovela y de la clave  $c$ , respecto al eje neutro  $XX$ , se midieron gráficamente en la sección de la columna análoga en la Fig. 4.25.

El momento determinado en la clave  $c$ , será:

$$(M_d)_c = (30.8)(25) = 770$$

Tabla 4.13

Dovela	$d_s$	$\frac{I}{EI}$	$dA$	$y$	$y^2 dA$	$M_d$	$M_d \cdot dA$	$y \cdot M_d \cdot dA$
1	10	1	10	3.8	144.4	123.2	1,232.0	4,682
2	9	1	9	9.8	864.4	369.6	3,326.4	32,599
3	9	1	9	13.8	1,714.0	631.4	5,682.6	78,420
4	9	1	9	16.0	2,304.0	681.6	6,134.4	98,150
5	9	1	9	15.5	2,162.2	518.4	4,665.6	72,317
6	10	1	10	13.4	1,795.6	364.8	3,648.0	48,883
7	11	1	11	8.8	851.8	211.2	2,323.2	20,444
8	11	1	11	3.0	99.0	67.2	739.2	2,218
					9,935.4		27,751.4	357,713

La carga total sobre la columna análoga será:

$$W = \sum \frac{Md \cdot ds}{EI} = \sum Md \cdot dA = 27,751.4$$

El momento de inercia de la sección respecto al eje neutro XX será:

$$I_x = \sum y^2 \cdot dA = 9,935.4$$

El momento flexionante respecto al eje neutro XX será

$$M_x = \sum Md \cdot dA \cdot y = 357,713$$

El esfuerzo sobre la columna análoga en C, o sea el momento indeterminado  $M_i$  para tal punto en la estructura real será:

$$f_c = \frac{M_x \cdot y}{I_x} = \frac{(357,713)(15.4)}{9,935.4}$$

$$f_c = 555 \text{ kip-pie}$$

El momento real en la clave del arco será:

$$M_c = (Md)_c - f_c = 770 - 555$$

$$M_c = 215 \text{ kip-pie}$$

Aplicando las condiciones de estática a las ramas del arco a cada lado de la clave, pueden plantearse las siguientes ecuaciones:

$$10 H + 215 - 25 V_A = 0$$

$$215 + 25 H - 40(50 - V_A) = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones se llega a los siguientes resultados:

$$H = H_A = H_B = 35.3 \text{ kip}$$

$$V_B = 27.3 \text{ kip}$$

$$V_A = 22.7 \text{ kip}$$

Conociendo las reacciones verticales y horizontales en los apoyos, puede determinarse el momento en cualquier punto del arco. Para verificar los resultados obtenidos, puede plantearse la línea de presiones.

#### 4.6 LINEAS DE INFLUENCIA EN ARCOS

Para determinar las líneas de influencia para diversas funciones en un arco, se requiere conocer la forma de los ejes del mismo, así como la magnitud relativa de los momentos de

inercia en las diferentes secciones.

La línea de influencia para una cierta función, se define como la curva que muestra la variación de esta función, cuando una carga unitaria se desplaza a lo largo de la luz libre del arco considerado; por tal razón, el problema de análisis de un arco, por ejemplo doblemente empotrado, se puede reducir a establecer las seis reacciones en los apoyos, cuando una carga toma diversas posiciones con lo cual se está en posibilidad de conocer el comportamiento de la estructura, bajo la acción de diversos sistemas de cargas aplicados.

### EJEMPLO

Por medio del método de la analogía de la columna, calcular las líneas de influencia para la reacción horizontal, reacción vertical y momento en el apoyo izquierdo del arco simétrico, parabólico de peralte variable de la Fig. 4.26:

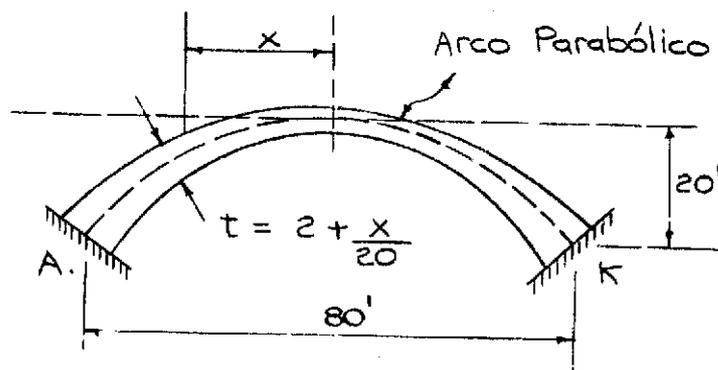


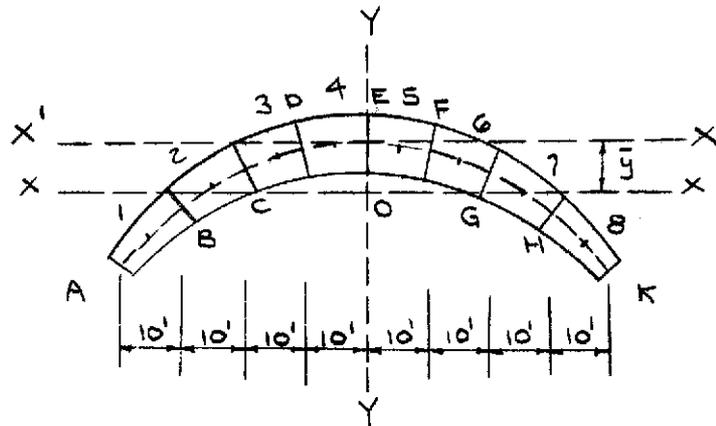
Fig 4.26.

### ANÁLISIS

El arco será dividido en 8 dovelas de proyección horizontal constante que serán AB, BC, CD, .. tal como se indica en la Fig. 4.27 donde aparece la sección transversal de la columna análoga. Los momentos de inercia de los segmentos serán considerados constantes e iguales al de la sección que pasa por el centroide de los mismos; el momento o producto de inercia de cada segmento respecto a cualquier eje que pase por su centroide será despreciado. El momento de inercia en la clave o corona del arco E, se denominará  $I_c$  y los momentos de inercia de las secciones correspondientes a los centros de dovela restantes, serán expresados en términos de  $I_c$ . Para establecer las propiedades de la sección de la columna análoga, se asumirá que  $E I_c$  es igual a la unidad. La carga unitaria móvil, tomará sucesivamente las posiciones B, C, D, E, F, G, H (Ver Fig. 4.27), pero puede ser considerada únicamente en las posiciones B, C, D, E, ya que por ejemplo las reacciones y momento en el apoyo A, cuando la carga está en C, serán iguales a las reacciones y momento que ocurren en el apoyo K de la derecha cuando la carga está en G.

Como existe un eje YY de simetría, el centroide de la sección, estará sobre el mismo,

para determinar su posición nos valdremos del eje auxiliar  $X'X'$ . Los cálculos para las propiedades de la sección de columna análoga, así como para la localización del centroide, se indican en la tabla 4.14.



Sección de la columna análoga

Fig 4.27

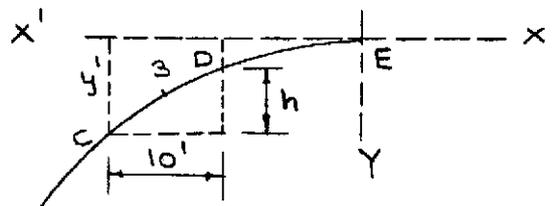


Fig 4.28

Cada dovela debe trabajarse en la forma siguiente, por ejemplo para el segmento CD de la Fig. 4.28

$$y' \text{ del punto D} = \left(\frac{10}{40}\right)^2(20) = -1.25$$

$$y' \text{ del punto 3} = \left(\frac{15}{40}\right)^2(20) = -2.81$$

$$y' \text{ del punto C} = \left(\frac{20}{40}\right)^2(20) = -5.00$$

$$h = 5.00 - 1.25 = 3.75$$

ds = longitud de dovela

$$ds = \sqrt{(10)^2 + (3.75)^2}$$

$$ds = 10.68'$$

$$\text{Peralte: } t = 2 + \frac{15}{20} = 2.75'$$

$n$  = relación entre la inercia de la sección en el centro de dovela considerado y la inercia de la sección en la clave

$$n = \frac{I}{I_c} = \frac{(1)(t)^3(12)}{(12)(2)^3(1)} = \left(\frac{t}{2}\right)^3$$

$$n = \left(\frac{2.75}{2}\right)^3$$

$$n = 2.6$$

Las áreas de cada dovela serán:

$$dA = \frac{ds}{EI} = \frac{ds}{n \cdot EI_c} \quad \text{pero} \quad EI_c = 1$$

$$dA = \frac{10.68}{(2.6)(1)} = 4.108$$

Tabla 4.14

Dovela	centroide	ds	t	n	dA	y'	y'.dA
AB	1	13.29	3.75	6.592	2.016	-15.31	-30.86
BC	2	11.79	3.25	4.291	2.748	- 7.81	-21.46
CD	3	10.68	2.75	2.600	4.108	- 2.81	-11.54
DE	4	10.08	2.25	1.424	7.079	- 0.31	- 2.19
					15.951		-66.05

centroide	x	y	x <sup>2</sup> .dA	y <sup>2</sup> .dA
1	-35	-11.17	2,470	251.5
2	-25	- 3.67	1,718	37.0
3	-15	+ 1.33	924	7.3
4	- 5	+ 3.83	177	103.8
			5,289	399.6

El área total de la sección de la columna análoga será:

$$A = 2 \sum dA = (2)(15.951)$$

$$A = 31.902$$

La coordenada  $\bar{y}$  del centroide respecto al eje  $X'X'$  será:

$$\bar{y} = \frac{\sum y'.dA}{\sum dA} = \frac{-66.05}{15.951}$$

$$\bar{y} = -4.14'$$

El momento de inercia de la sección respecto al eje centroidal  $YY$  será:

$$I_y = 2 \sum x^2.dA = (2)(5,289)$$

$$I_y = 10,578$$

El momento de inercia de la sección respecto al eje centroidal  $XX$  será:

$$I_x = 2 \sum y^2.dA = (2)(399.6)$$

$$I_x = 799.2$$

El arco original se vuelve estáticamente determinado, suprimiendo el apoyo derecho y considerando la estructura como un voladizo libre en este punto y empotrado en A.

A continuación se calculan los momentos flexionantes respecto a los ejes centroidales  $XX$  e  $YY$  en la columna análoga, provocados por las cargas del diagrama  $M_d$  sobre  $EI$ , las reacciones en el centro elástico, así como los momentos en los apoyos y clave del arco, o sean los puntos A, E y K, cuando la carga unitaria se desplaza a lo largo de la luz en diferentes posiciones.

Si la carga unitaria se sitúa en el punto B, los cálculos para los momentos flexionantes y carga sobre la columna análoga, se indican en la tabla 4.15.

Tabla 4.15

Dovela	centroide	x	y	dA	Md	Md.dA	Md.x.dA	Md.y.dA
AB	1	-35	-11.17	2.016	-5	-10.08	352.8	112.6
BC	2	-25	- 3.67	2.748				
CD	3	-15	+ 1.33	4.108				
DE	4	- 5	+ 3.83	7.079				
						-10.08	352.8	112.6

La carga total sobre la columna análoga será:

$$W = \sum \frac{Md.ds}{EI} = \sum Md.dA = -10.08$$

El momento flexionante respecto al eje centroidal YY será:

$$M_y = \sum \frac{Md.x.ds}{EI} = \sum Md.x.dA$$

$$M_y = 352.8$$

El momento flexionante respecto al eje centroidal XX será:

$$M_x = \sum \frac{Md.y.ds}{EI} = \sum Md.y.dA$$

$$M_x = 112.6$$

Por medio de las ecuaciones del método del centro elástico, se calculan las reacciones en este punto:

$$M_o = \frac{W}{A} = \frac{(10.08)}{31.902} = 0.316$$

$$H_o = \frac{M_x}{I_x} = \frac{(112.6)}{799.2} = 0.1409$$

$$V_o = \frac{M_y}{I_y} = \frac{(352.8)}{10,578} = 0.0334$$

Los esfuerzos sobre la columna análoga, por tratarse de un arco simétrico se calculan así:

$$f = \frac{W}{A} + \frac{M_x.y}{I_x} + \frac{M_y.x}{I_y}$$

Los cálculos para los miembros de la fórmula anterior, cuando la carga unitaria se sitúa en B, están indicados en la tabla 4.16.

Tabla 4.16

Punto	x	y	Md	$\frac{W}{A}$	$\frac{Mx.y}{Ix}$	$\frac{My.x}{Iy}$	f
A	-40	-15.86	-10	$\frac{(-10.08)}{31.902}$ = -0.316	$\frac{(112.6)(-15.86)}{799.2}$ = -2.234	$\frac{(352.8)(-40)}{10,578}$ = -1.334	-3,884
E	0	+ 4.14	-	= -0.316	$\frac{(112.6)(+ 4.14)}{799.2}$ = +0.583	$\frac{(352.8)(0)}{10,578}$ = 0	+0,267
K	+40	-15.86	-	= -0.316	$\frac{(112.6)(-15.86)}{799.2}$ = -2.234	$\frac{(352.8)(+40)}{10,578}$ = +1.334	-1,216

Los momentos reales en los puntos analizados serán:

$$M_x = M_d - f$$

$$M_A = -10 - (-3.884) = -6.116 \text{ kip-pie}$$

$$M_E = 0 - (0.267) = -0.267 \text{ kip-pie}$$

$$M_K = 0 - (-1.216) = +1.216 \text{ kip-pie}$$

Las reacciones en el apoyo A serán:

$$H_A = H_o = 0.1409 \text{ kip}$$

$$V_A = 1 - 0.0334 = 0.9666 \text{ kip}$$

$$M_A = -(1)(10) + (15.86)(0.1409) + (40)(0.0334) + 0.316$$

$$M_A = -6.166$$

Las reacciones en el apoyo K serán:

$$H_K = H_o = 0.1409 \text{ kip}$$

$$V_K = V_o = 0.0334 \text{ kip}$$

$$M_K = (0.1409)(15.86) + 0.316 - (40)(0.0334)$$

$$M_K = 1.216$$

Los momentos en A y K coinciden con los calculados directamente por la analogía de la columna, lo que indica que el proceso está correcto.

En la Fig. 4.29 se muestra la estructura básica determinada, la posición del centro elástico y las reacciones en este punto, así como las reacciones en los extremos con el arco doblamente empotrado.

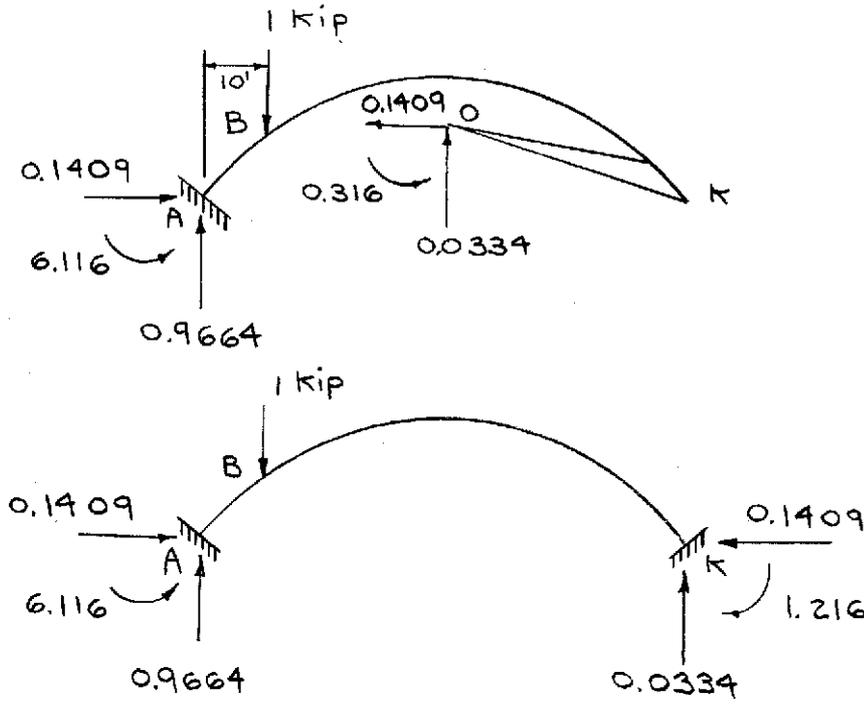


Fig. 4.29

Procediendo en igual forma para las posiciones de la carga unitaria en los puntos C, D y E, se obtienen los valores para las reacciones vertical y horizontal, así como el momento en A y el momento en la clave E del arco, estos resultados aparecen en la tabla 4.17.

Tabla 4.17

Carga en	Distancia desde A	H <sub>A</sub>	V <sub>A</sub>	M <sub>A</sub>	M <sub>C</sub>
A	0	0	1.000	0	0
B	10	0.141	0.967	-6.12	+1.11
C	20	0.486	0.868	-5.62	+4.44
D	30	0.860	0.707	-1.12	+0.12
E	40	1.029	0.500	+3.73	-1.71
F	50	0.860	0.293	+5.42	-1.61
G	60	0.486	0.132	+3.78	-0.86
H	70	0.141	0.033	+1.22	-0.23
K	80	0	0	0	0

De acuerdo a estos resultados pueden plotearse las líneas de influencia correspondientes, tal como aparecen en la Fig. 4.30.

Líneas de influencia

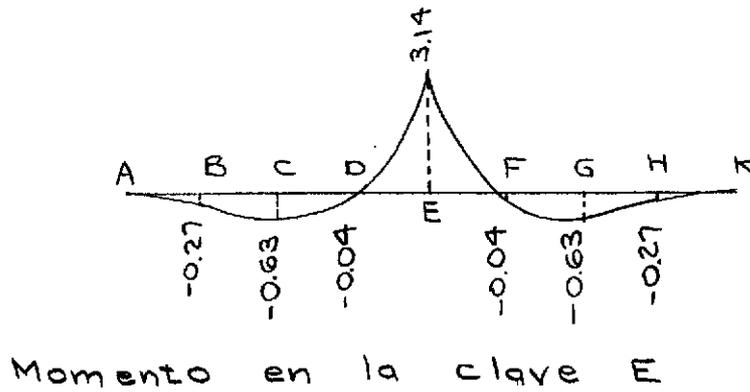
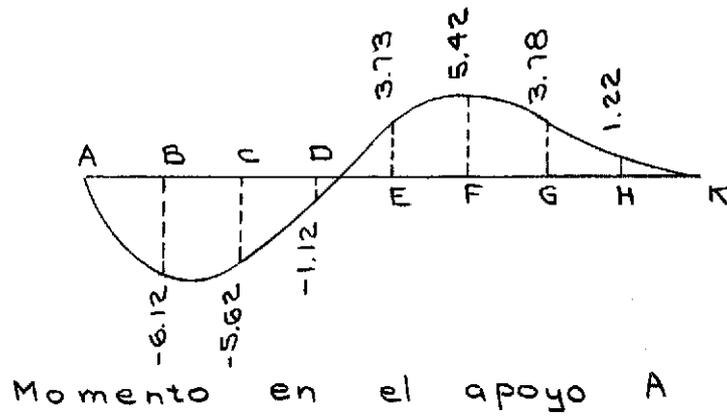
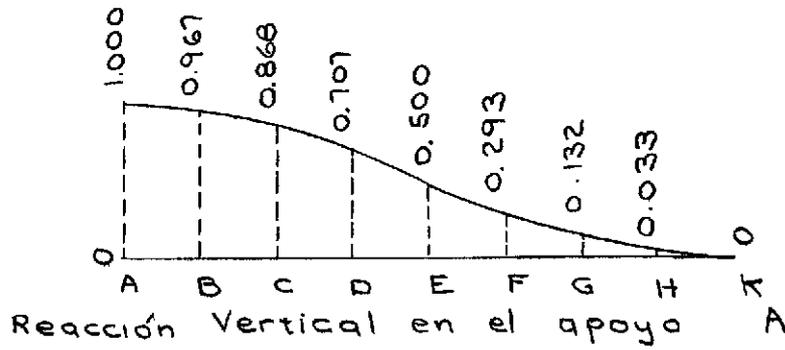
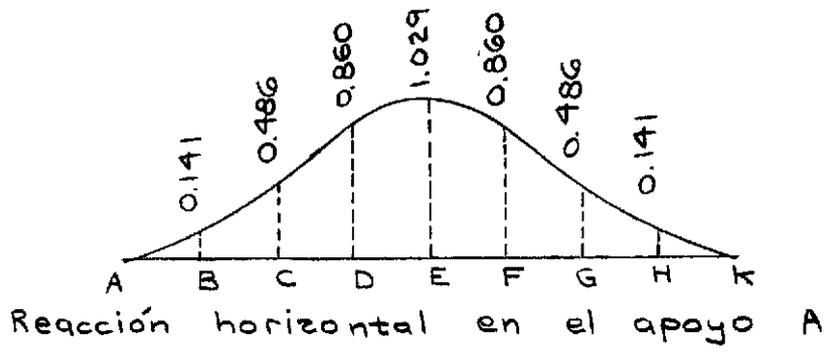


Fig. 4.30

#### 4.7 EFECTOS DE TEMPERATURA, ACORTAMIENTO POR CARGA AXIAL Y OTROS FACTORES

Al inicio de este capítulo se mencionó ciertos factores que influyen en el análisis de arcos, tales como aumentos o disminuciones de temperatura, flujo plástico y fraguado en arcos de concreto, acortamiento por carga axial y desplazamiento de apoyos. Por ejemplo el arco doblemente empotrado, estará sujeto a reacciones equilibrantes que induce por sí mismo, debido a la acción de los cambios de temperatura.

Puede decirse que los efectos de temperatura, encogimiento por flujo plástico, acortamiento por carga axial o asentamiento de apoyos en un arco doblemente empotrado, se reducen a tres acciones, las cuales pueden o no producirse combinadamente y que son:

- 1) Una rotación de un ángulo  $\alpha$  en sentido contrario al movimiento del reloj, en la tangente al arco en el apoyo derecho B.
- 2) Un desplazamiento horizontal "a", hacia la derecha en el soporte B.
- 3) Un desplazamiento vertical "b" hacia abajo en el soporte B.

Las reacciones en el centro elástico del arco se establecen mediante las expresiones que se muestran en la tabla 4.18 en función del desplazamiento vertical "b", desplazamiento horizontal "a" y giro  $\alpha$  en el soporte B. Las fórmulas de la tabla 4.18 se aplican a arcos simétricos doblemente empotrados.

Tabla 4.18

Rotación $\alpha$	Desplazamiento a	Desplazamiento b
$M_o = + \frac{\alpha}{A}$	$M_o = 0$	$M_o = 0$
$H_o = + \frac{Y_B \cdot \alpha}{I_x}$	$H_o = + \frac{a}{I_x}$	$H_o = 0$
$V_o = - \frac{X_B \cdot \alpha}{I_y}$	$V_o = 0$	$V_o = - \frac{b}{I_y}$

$X_B$  e  $Y_B$  son las coordenadas del soporte B respecto a los ejes centroidales de referencia, que en los arcos simétricos serán los ejes principales.

## EJEMPLO

Determinar las reacciones inducidas en el arco parabólico simétrico de la Fig. 4.26, debidas a las causas siguientes:

- Incremento de temperatura de 50°F.
- Encogimiento por flujo plástico
- Acortamiento por carga axial equivalente a un esfuerzo de 300 p.s.i

Asumir que  $E = 2 \times 10^6$  Lbs./Pulg.<sup>2</sup>

$c =$  coeficiente de expansión térmica

$c = 6 \times 10^{-6}$ /grado F.

## DESARROLLO

Las propiedades de la sección de columna análoga son tomadas del ejemplo de la Fig. 4.26 siendo estas

$$A = \frac{31.902}{E/c}$$

$$I_x = \frac{799.2}{E/c}$$

$$I_y = \frac{10,578}{E/c}$$

En este caso debe ser usado el verdadero valor de  $E/c$ , por lo que el valor de estas propiedades será:

$$A = \frac{(31.902)(12)}{(2,000 \times 144)(1)(2)^3} = 0.16616 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{kip-pies}}$$

$$I_x = \frac{(799.2)(12)}{(2,000 \times 144)(1)(2)^3} = 4.1625 \times 10^{-3} \frac{\text{pies}}{\text{kip}}$$

$$I_y = \frac{(10,578)(12)}{(2,000)(144)(1)(2)^3} = 55.094 \times 10^{-3} \frac{\text{pies}}{\text{kip}}$$

- a) Cuando aumenta la temperatura el arco sufre una dilatación que se traduce en un deslizamiento horizontal del soporte K, si este se supone libre, por lo que es necesario provocar un desplazamiento igual al anterior pero de sentido contrario, para que la longitud de la luz libre se mantenga inalterable. La magnitud del desplazamiento horizontal será:

$$\begin{aligned} a &= -L.c.t \\ &= (80)(6 \times 10^{-6})(50) \\ a &= 24 \times 10^{-3} \text{ pies} \end{aligned}$$

Las reacciones en el centro elástico serán:

$$M_o = 0$$

$$H_o = + \frac{a}{I_x} = + \frac{(-24)(10^{-3}) \text{ Pies}}{4.1625 \times 10^{-3} \frac{\text{Pies}}{\text{kip}}}$$

$$H_o = -5.766 \text{ kip}$$

$$V_o = 0$$

Conociendo las reacciones en el centro elástico, pueden calcularse las reacciones y momentos en los apoyos (Ver Fig. 4.31).

$$H_A = H_K = H_o = 5.766 \text{ kip}$$

$$M_A = M_K = (5.766)(15.86) = 91.45 \text{ K-P}$$

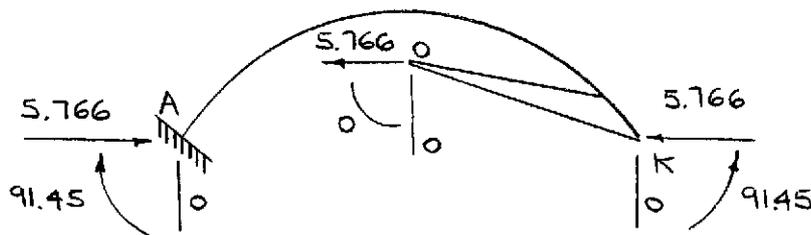


Fig. 4.31

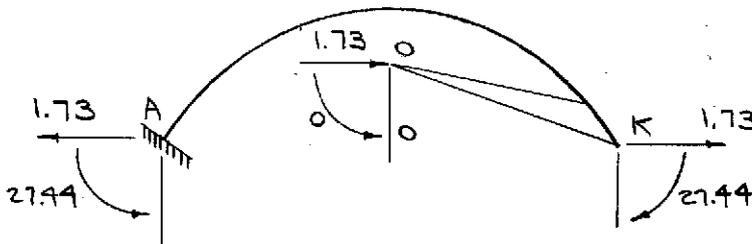
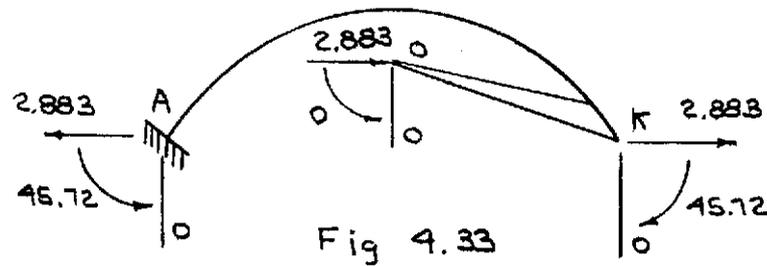


Fig. 4.32



- b) Encogimiento por flujo plástico: equivale a una baja de temperatura de  $15^{\circ}\text{F}$ , por lo que se procede como en el caso anterior:

$$a = (15)(6 \times 10^{-6})(80) = 7.2 \times 10^{-3} \text{ Pies}$$

Las reacciones en el centro elástico serán:

$$M_o = 0$$

$$H_o = \frac{a}{l_x} = \frac{(7.2)(10^{-3})}{(4.1625)(10^{-3})}$$

$$H_o = 1.730 \text{ kip}$$

$$V_o = 0$$

Conociendo las reacciones en el centro elástico, pueden calcularse las reacciones y momentos en los apoyos (Ver Fig. 4.32):

$$H_A = H_K = H_o = 1.730 \text{ kip}$$

$$M_A = M_K = (1.73)(15.86) = 27.44 \text{ kip}$$

- c) Acortamiento por carga axial en el nervio, equivalente a un esfuerzo axial de  $300 \text{ psi}$  a lo largo de todo el arco.

El valor del desplazamiento "a" será:

$$a = \frac{f_c \cdot L}{E} = \frac{(300)(80)}{(2)(10)^6} = 12 \times 10^{-3}$$

Las reacciones en el centro elástico serán:

$$M_o = 0$$

$$H_o = \frac{\alpha}{I_x} = \frac{12 \times 10^{-3}}{4.1625 \times 10^{-3}}$$

$$H_o = +2.883$$

$$V_o = 0$$

Por estática se pueden determinar las reacciones y momentos en los soportes. (Ver Fig. 4.33).

$$H_A = H_K = H_o = 2.883 \text{ kip}$$

$$M_A = M_K = (2.883)(15.86) = 45.72 \text{ kip-pie}$$

Por razones de espacio, no podemos continuar tratando otros casos más complejos, pero se espera que los ejemplos desarrollados anteriormente, sirvan de base para poder comprender sin dificultad, la aplicación y funcionamiento del método de la analogía de la columna en el análisis de arcos.

## CAPITULO 5

LA ANALOGIA DE LA COLUMNA  
COMPARADA CON OTROS METODOS DE ANALISIS

La posibilidad de usar varios métodos en el análisis de una estructura, plantea la interrogante sobre cual de los mismos puede resultar más adecuado de acuerdo a las condiciones del problema, por ofrecer mayores ventajas, como podrían ser empleo de expresiones más fáciles de operar, procesos menos laboriosos, cálculos rápidos, etc. lo que dá lugar a una economía de tiempo y trabajo. Conociendo las propiedades y funcionamiento del método de la analogía de la columna, se tratará de hacer una exposición breve sobre la conveniencia de su empleo en diversos casos, efectuando además un balance comparativo entre tales situaciones y las que ocurrirán al aplicar otros métodos de análisis a las mismas estructuras. La comparación entre métodos se hará en el análisis de vigas y especialmente en arcos.

## 5.1 VIGAS

Las vigas frecuentemente son analizadas por el método de área momento, dicho método involucra el planteo de tres ecuaciones fundamentales que son:

$$\Delta.\theta_{A-B} = \left(\frac{A.d.m.}{EI}\right) \quad (5.1)$$

$$\Delta.X_{A-B} = \left(\frac{A.d.m.}{EI}\right)(y) \quad (5.2)$$

$$\Delta.Y_{A-B} = \left(\frac{A.d.m.}{EI}\right)(x) \quad (5.3)$$

Tales ecuaciones se interpretan en la siguiente forma:

- 5.1) El desplazamiento angular del punto A, respecto al punto B de una estructura, es igual a la suma de las áreas de los diagramas de momento sobre EI entre tales puntos.
- 5.2) El desplazamiento horizontal del punto A respecto al punto B será igual a la suma de las áreas de los diagramas de momento sobre EI multiplicadas por las respectivas distancias de sus centroides al eje horizontal que pasa por A.
- 5.3) El desplazamiento vertical del punto A respecto al punto B, será igual a la suma de las áreas de los diagramas de momento sobre EI entre tales puntos, multiplicadas por

las respectivas distancias de sus centroides al eje vertical que pasa por el punto A.

En el caso de una viga de sección constante y extremos fijos como la de la Fig. 3.9, cuando se aplica el método de Area-momento, los momentos de empotramiento se calculan en la forma siguiente:

- a) Plotear los diagramas de momento ocasionados por las redundantes en un extremo de la viga, así como por las cargas aplicadas.
- b) Plantear e igualar a cero las expresiones 5.1 y 5.3, con lo cual se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- c) Resolver este sistema para obtener el valor de las reacciones en el extremo considerado.
- d) Calcular los efectos en el otro extremo por medio de las ecuaciones de Estática.

Para calcular el coeficiente de transmisión que en este caso será igual en ambos sentidos, se procede así:

- a) Suprimir el sistema de cargas sobre la viga y aplicar un momento concentrado en cualquiera de los dos extremos, al que se supone articulado, mientras que el otro estará empotrado.
- b) Plotear los diagramas de momento correspondientes.
- c) Plantear la expresión (5.3) e igualarla a cero.
- d) Establecer la relación del momento resultante en el extremo fijo al momento aplicado en el extremo articulado que será el coeficiente de transmisión.
- e) La rigidez absoluta también será igual en cualquiera de los dos extremos y se obtiene planteando la expresión (5.1) que se iguala a la unidad, dejando como incógnita únicamente el momento aplicado, que es precisamente la rigidez absoluta.

La aplicación del método de la Analogía de la columna en esta viga aunque no significa una gran economía de trabajo, presenta las siguientes ventajas respecto al método Area-Momento:

- a) Se evita el planteo y resolución de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.
- b) Se calculan los momentos en los extremos y en cualquier otro punto de la viga en forma directa sin que un resultado dependa de otro.
- c) No hay que plotear los diagramas de momento provocados por los efectos en el extremo considerado, sino únicamente el que resulta cuando la viga se hace Estáticamente Determinada.

- d) Al calcular el coeficiente de Transmisión o la rigidez absoluta, no se dibujan diagramas de momento y la operación se reduce al cálculo de esfuerzos en una columna corta con carga excéntrica.

Si se trata de vigas de sección no constante, apoyos fijos y asimétricas respecto a su línea central transversal, como la de la Fig. 3.13, el proceso se alarga cuando se analizan por medio del método Area-Momento; los momentos de empotramiento se calculan así:

- a) Plotear los diagramas de momento ocasionados por las redundantes en el extremo considerado, así como por las cargas aplicadas.
- b) Plantear las expresiones (5.1) y (5.3) e igualarlas a cero.
- c) Resolver el sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas que resulta del planteo anterior.
- d) Conociendo el valor de las redundantes en el extremo donde se situó el origen de los ejes coordenados, calcular por medio de las ecuaciones de estática las reacciones en el otro apoyo.

En este caso los diagramas de momento sufren complicaciones, al producirse quiebres en los puntos donde cambia el momento de inercia de la sección de la viga, resultando figuras trapezoidales que dificultan el planteo de las ecuaciones. El coeficiente de transmisión no es igual en un sentido que en otro, para calcularlo por el método Area-momento se procede así:

- a) Eliminar el sistema de cargas sobre la viga, aplicando un momento concentrado en el extremo que corresponda al que se supone articulado, dejando al otro empotrado.
- b) Plotear los diagramas de momento sobre El que también resultan bastante complejos.
- c) Plantear la expresión (5.3) para obtener una ecuación en función del momento inducido y el momento aplicado, cuya relación es el coeficiente de transmisión.

Para calcular las rigideces absolutas que en este caso tampoco son iguales en ambos sentidos se procede así:

- a) Con base en los diagramas de momento sobre El ploteados en el caso del coeficiente de transmisión, plantear la expresión (5.1) e igualarla a la unidad; en dicha ecuación aparecen como incógnitas el momento aplicado y el momento inducido, por lo que este último debe expresarse en función del primero por medio del mismo coeficiente de transmisión ya calculado.
- b) Calcular el valor de la incógnita de la ecuación, o sea el momento aplicado que provoca el giro unitario, que será la rigidez absoluta.

El método de la Analogía de la columna a pesar de complicarse en este caso por la

asimetría de la sección transversal de la columna equivalente, siempre resulta un proceso más corto que presenta las siguientes ventajas sobre el método de Area-momento:

- a) Se evita plotear los diagramas de momento sobre EI provocados por los efectos en el extremo considerado, así como por las cargas aplicadas; solamente debe plotearse el diagrama de momento sobre EI que resulta cuando la viga se vuelve Estáticamente De terminada.
- b) No hay que plantear ni resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.
- c) Se puede calcular el momento flexionante en cualquier punto de la viga considerada, en forma directa sin que un resultado dependa de otro.
- d) En el caso de los coeficientes de transmisión y rigideces absolutas, no es necesario plotear diagramas de momento, ni plantear ecuaciones, sino solamente calcular esfuerzos en una columna corta con carga excéntrica.

Para una viga acartelada como la de la Fig. 3.20, el cálculo de momentos fijos, coeficientes de transmisión y rigideces absolutas por medio del método Area-momento constituye un trabajo considerablemente complicado, puesto que el diagrama de momento sobre EI en la parte correspondiente a la cartela, varía de acuerdo a una curva cuya tendencia debe ser establecida; la forma de operar el método es la siguiente:

- a) Dividir la cartela en segmentos de longitud constante, al centro de los cuales se calcula la inercia relativa respecto a la de la sección constante de la viga que puede considerarse como la unidad.
- b) Plotear los diagramas de momento ocasionados por los efectos en el extremo considerado y cargas aplicadas, como si la viga fuera de sección constante y luego dividirlos entre las inercias relativas.

A mayor número de segmentos, más se aproxima el polígono resultante a la curva verdadera del diagrama de momentos sobre EI en la cartela, pero esto origina mayor número de figuras trapezoidales, lo que dificulta y alarga en alto grado el planteo de las expresiones 5.1 y 5.3 a lo cual debe agregarse el hecho de tener que repetir esta operación cuando se van a calcular las Rigideces absolutas y Factores de Transporte; por estas razones el método de Area momento casi no se aplica para tales propósitos en vigas acarteladas.

Afortunadamente se cuenta con tabulaciones y curvas, que como las de la Portland Cement Association (P.C.A.), suministran coeficientes para la determinación de momentos fijos por carga uniforme y carga concentrada, así como factores de rigidez y Transporte, en función de la longitud de la cartela y la relación entre el peralte mínimo y el peralte máximo de la viga considerándose el caso de acartelamientos rectos y acartelamientos parabólicos, tanto para vigas simétricas como asimétricas.

Si no se cuenta con la información de la P.C.A. u otro tipo de tablas, el método de

La Analogía de la Columna resulta un proceso bastante cómodo y práctico para abordar el problema del cálculo de momentos fijos, coeficientes de transmisión y Rigideces absolutas en una viga acartelada, presentando las siguientes ventajas sobre el método de Area-momento:

- a) No hay que plantear ni resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.
- b) Tampoco hay que plotear una serie de diagramas de momento sobre EI, los cuales se complican en la longitud de la cartela, alargando y dificultando considerablemente el análisis.

## 5.2 ARCOS

En el capítulo anterior los arcos se constituyeron en dos grupos: los marcos rígidos y las estructuras curvas o arcos propiamente dicho; a continuación se harán algunas discusiones sobre estos casos si se emplearan otros métodos de análisis, buscando establecer comparaciones con el método de la Analogía de la columna en tales situaciones.

En el caso de un marco simétrico de apoyos fijos como el de la Fig. 4.2, si se usa el método Area-momento para analizarlo, se procede de la siguiente manera:

- a) Plotear los diagramas de momento debidos a los efectos en el apoyo considerado, así como los que ocasionan las cargas aplicadas.
- b) Calcular las áreas en función de las reacciones y momento en el extremo considerado y establecer las distancias centroidales de estas áreas a los ejes de referencia.
- c) Factorar las incógnitas y multiplicar por los brazos respectivos o distancias centroidales a los ejes de referencia, para obtener un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas.

El proceso es bastante largo y tedioso, debiéndose tener mucho cuidado al operar, tomando en cuenta los signos de las áreas y las distancias a los ejes, ya que frecuentemente se cometen errores que inciden en el planteo de las ecuaciones y pueden afectar seriamente los resultados.

En este caso el método de Analogía de la Columna ofrece un proceso mucho más simple que el anterior por las siguientes razones:

- a) No hay que plantear ni resolver un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas.
- b) Se pueden calcular los momentos en los nudos y en cualquier otro punto de la estructura en forma directa.
- c) Se puede hacer un chequeo de los resultados por medio de las reacciones horizontales

en los apoyos del marco que se calculan independientemente, lo cual no es posible en el método Área-momento donde solamente se establecen en forma directa las redundantes en el apoyo considerado, debiéndose llegar a las reacciones y momentos en el otro apoyo con base en los resultados anteriores.

El método Pendiente-deflexión suele ser muy usado en el caso de los marcos rígidos de determinado número de lados; en dicho método se procede de acuerdo a las siguientes normas:

- a) Plantear una serie de ecuaciones que deben ser resueltas para solucionar el problema.
- b) Existen tantas incógnitas como nudos tenga el marco analizado, sin contar los apoyos fijos donde no hay giros, además de la incógnita por lado.
- c) El número de ecuaciones resultantes, es igual al número de nudos de la estructura, incluyendo apoyos articulados, más una ecuación de corte por cada nivel.
- d) Para plantear las ecuaciones de momento en los nudos, hay que calcular previamente los momentos fijos debidos a las cargas aplicadas sobre el marco y emplear la expresión general del método.
- e) Plantear la ecuación de corte, que es sin duda alguna la fase más complicada, ya que las columnas y vigas de la estructura se deben analizar por separado, para poder expresar las reacciones horizontales inducidas en los apoyos del marco en función de los momentos en los extremos de sus miembros.

Puede verse que en el método Pendiente-deflexión el proceso resulta bastante laborioso solamente en el planteo de las ecuaciones, a lo que debe agregarse el problema de la resolución de las mismas y el tener que usar el valor de las incógnitas para calcular los momentos en los nudos. El número de ecuaciones que resultan puede ser alto, debiendo recurrirse preferiblemente a una computadora para resolver el sistema.

En el método de la Analogía de la Columna, aunque no es aplicable a marcos de más de un nivel y un claro, se tienen las siguientes ventajas respecto al método anterior:

- a) Se pueden calcular directamente los momentos en los nudos de la estructura, sin plantear ni resolver ningún sistema de ecuaciones, ni considerar los ladeos de los miembros.
- b) Se puede aplicar al análisis de marcos de claro simple y un nivel, sin tener que usar computadora de la cual no siempre puede disponerse.

El método de Distribución de momentos de Cross goza de bastante aceptación, pero su aplicación está restringida a estructuras con nudos sujetos a giros que es el caso de los marcos rígidos.

Para analizar un marco de claro simple, un nivel, apoyos fijos y asimétrico como el

de la Fig. 4.10, por el método de Distribución de Momentos, se siguen los pasos siguientes;

- a) Calcular las rigideces relativas de los miembros, así como los factores de distribución.
- b) Calcular los momentos fijos debidos a las cargas aplicadas sobre el marco.
- c) Efectuar la distribución de los momentos fijos en los nudos y analizar las columnas del marco para establecer las reacciones horizontales en los apoyos y consecuentemente una Fuerza tope para evitar el ladeo.
- d) Asumiendo un desplazamiento horizontal, calcular los momentos fijos por ladeo y efectuar la distribución correspondiente.
- e) Analizar las columnas del marco para determinar las reacciones horizontales en los apoyos, cuya suma será la magnitud de la fuerza horizontal aplicada.
- f) Establecer un factor de corrección que será la relación entre la fuerza tope y la fuerza aplicada, corrigiendo luego los momentos por ladeo resultantes en los nudos.
- g) Superponer los momentos por ladeo corregidos y los momentos por carga y fuerza tope, para obtener los momentos reales en los nudos.

Puede decirse que para el caso considerado, el método de Distribución de momentos y el de Analogía de la Columna implican casi el mismo trabajo, pero éste último presenta las siguientes ventajas sobre el primero:

- a) No hay que ocuparse en ningún caso del ladeo de los miembros de la estructura.
- b) No se necesita conocer ciertas fórmulas para calcular los momentos fijos, las cuales en muchos casos debido a la posición de las cargas o a su naturaleza, pueden ser complejas o tienen que ser calculadas por separado.
- c) Solamente debe tenerse presente la fórmula para el cálculo de esfuerzos por flexión en una columna corta con carga excéntrica, así como las áreas y posición de los centros de algunas figuras especiales.
- d) Se establecen los momentos en los nudos sin tener que hacer una suposición para el desplazamiento horizontal, ni determinar un factor de corrección para rectificar momentos.
- e) Las columnas del marco solo se analizan una vez para chequear las reacciones horizontales en los apoyos, cuya suma debe ser igual a la resultante de las cargas horizontales aplicadas.

Para analizar una estructura curva o arco propiamente dicho, se divide en segmentos o davelas según se vió en el capítulo anterior; a mayor número de segmentos, más exacto resulta el análisis.

El método Pendiente-deflexión no puede aplicarse a estructuras curvas ya que éstas se consideran formadas por un número infinito de lados, o sea que existen un número infinito de nudos que darían lugar a un sistema de infinito número de ecuaciones que no es posible plantear ni resolver. El método de Distribución de momentos de Cross, tampoco se usa en estructuras curvas, ya que al dividir el arco en dovelas, es difícil efectuar la distribución en un número elevado de lados.

Area-Momento, Centro Elástico y Analogía de la Columna son métodos que pueden usarse en el análisis de estructuras curvas.

La diferencia entre el método del Centro Elástico y el de Analogía de la Columna, es que en el primero se calculan las reacciones y momento en el Centro elástico de la estructura el cual debe suponerse unido a uno de los apoyos del arco por medio de un brazo rígido, para calcular las reacciones y momentos en los extremos o en cualquier otro punto; en el segundo método, los momentos en los apoyos o cualquier otro punto del arco son calculados directamente y mediante estos pueden establecerse las reacciones en los extremos; pero en ambos métodos se usa la sección transversal de la columna análoga, así como la fórmula general de flexión en columnas.

Al emplear el método Area-momento en el análisis de un arco simétrico doblemente empotrado como el de la Fig. 4.19 debe recurrirse a las ecuaciones del método en la forma que se indica a continuación:

$$\Delta \cdot X_A = \sum \frac{M \cdot y \cdot \Delta s}{EI} \quad (5.4)$$

$$\Delta \cdot Y_A = \sum \frac{M \cdot x \cdot \Delta s}{EI} \quad (5.5)$$

$$\Delta \cdot \theta_A = \sum \frac{M \cdot \Delta s}{EI} \quad (5.6)$$

En las expresiones anteriores  $M$  es el momento en el centro de dovela considerado y se expresa en función de las reacciones en un extremo tal como se indica a continuación:

$$M = M_A = H_A \cdot y - V_A \cdot x + m \quad (5.7)$$

Donde:

$M_A$ ,  $V_A$  y  $H_A$  son las redundantes en el apoyo A.

$x$  e  $y$  son las coordenadas del centro de dovela.

" $m$ " es el momento en el centro de dovela debido a las cargas sobre el arco.

Los pasos a seguir son:

- a) Dividir el arco en determinado número de segmentos o dovelas; hacer pasar un sistema de ejes rectangulares por el apoyo A y tomar las coordenadas de los centros de dovela

respecto a los mismos.

- b) Calcular las inercias relativas, así como los inversos de las mismas en cada centro de dovela, que en este caso son iguales debido al peralte constante del arco.
- c) Hacer una tabulación para establecer los valores del momento  $M$  en cada centro de dovela.
- d) Multiplicar cada uno de los valores de  $M$  por la respectiva longitud de dovela  $\Delta s_i$ , expresando en otras dos columnas los productos de los valores anteriores multiplicados por la coordenada  $x$  o la coordenada  $y$  de cada centro de dovela.
- e) Efectuar las sumas de los valores de las columnas mencionadas anteriormente, para establecer las expresiones (5.4), (5.5) y (5.6) que se igualan a cero y constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya resolución permite conocer el valor de las redundantes en el apoyo A.
- f) Calcular las reacciones y momento en el apoyo B por medio de las ecuaciones de Estática.

El planteo de las ecuaciones en el método Area-momento resulta bastante difícil y largo ya que además de tener que considerar en cada centro de dovela el planteo de la expresión (5.7), multiplicar la misma por la respectiva longitud de dovela, así como por el inverso de las inercias relativas si el peralte del arco no es constante y luego por las distancias a los ejes vertical y horizontal; deben también calcularse los momentos que ocasionan las cargas aplicadas al arco en cada centro de dovela.

Al aplicar la Analogía de la columna el arco considerado, se obtienen las siguientes ventajas sobre el procedimiento anterior:

- a) Resulta un número mucho menor de operaciones, lo que reduce la posibilidad de una equivocación.
- b) No hay que plantear ni resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.
- c) Se pueden establecer los momentos en cualquier punto del arco en forma directa, es decir sin usar las reacciones en los apoyos.
- d) Se calculan las reacciones horizontales en los apoyos del arco en forma independiente, lo que permite un chequeo de los resultados. En el método de Area-momento solamente puede efectuarse este chequeo si se plantean dos veces las ecuaciones del método, considerando el origen del sistema de ejes rectangulares tanto en uno como en otro apoyo lo cual equivale a duplicar el trabajo.

Si se trata de un arco simétrico de apoyos articulados como el del ejemplo del artículo 4.4.2, al analizarlo por el método de Area-momento, el proceso se simplifica, porque únicamente es necesario plantear una ecuación adicional sobre las tres de Estática, que será la

expresión (5.4). Los pasos a seguir son los siguientes:

- a) Considerar en cada centro de dovela la expresión (5.7), que se multiplica en cada caso por la longitud de dovela y por la distancia al eje horizontal.
- b) Si el peralte del arco es variable, las cantidades anteriores se multiplican por los inversos de las inercias relativas respecto a la inercia en la clave, en cada centro de dovela.
- c) Si el peralte es constante, se puede considerar la inercia relativa igual a la unidad.
- d) La suma de estos productos conduce a la expresión (5.4) que igualada a cero es la primera ecuación de un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, el cual se completa con la ecuación  $\sum M = 0$ .
- e) Resolver el anterior sistema de ecuaciones para establecer las reacciones en el apoyo considerado.
- f) Calcular las reacciones en el otro apoyo por medio de las ecuaciones de Estática.

El método de la Analogía de la columna no presenta en este caso ninguna complicación y tiene las siguientes ventajas respecto al método anterior:

- a) La fórmula general para el cálculo de esfuerzos por flexión en columnas, según se vió en el capítulo anterior se reduce a un término.
- b) Se evita el planteo de la expresión (5.4) y las numerosas operaciones a que dá lugar.
- c) No hay que calcular los momentos en cada centro de dovela debidos a las cargas aplicadas sobre el arco.
- d) No se debe resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas para calcular las reacciones en el apoyo considerado.
- e) Se pueden chequear los resultados por medio de las reacciones horizontales en los apoyos que son establecidas independientemente una de la otra.

Los conceptos anteriores sobre comparación entre métodos en el análisis de arcos simétricos, pueden ser extendidos al caso de los arcos asimétricos, teniendo presente únicamente, ciertas variantes que ocurren al plantear las ecuaciones en el método Area-momento, o las reacciones por asimetría que se hacen en la fórmula de flexión en columnas si se emplea el método de la Analogía de la columna.

## CONCLUSIONES

- 1) Los principios en que se basa la teoría de la Viga Conjugada, así como los que definen a la Estructura Conjugada son de mucha importancia para el estudio y desarrollo del método de la Analogía de la Columna, debido a la estrecha relación que guardan entre sí.
- 2) El método del Centro Elástico es parte integral del de la Analogía de la Columna, ya que por medio de sus ecuaciones se puede llegar a establecer la expresión general de la columna análoga.
- 3) A diferencia del método del Centro Elástico que se limita al cálculo de las redundantes en el punto neutral y se recomienda cuando solamente se requieren las reacciones y momentos en los apoyos, el método de la Analogía de la Columna permite determinar los momentos por flexión en cualquier punto de una estructura estáticamente indeterminada de claro simple con redundancia al tercer grado como máximo.
- 4) En vigas de sección constante el método de la Analogía de la Columna está a la par de otras formas de análisis, pero en el caso de vigas de sección transversal con distintos peraltes, sí se logra una apreciable economía de trabajo en el análisis.
- 5) La investigación de momentos fijos, coeficientes de transporte y rigideces absolutas en vigas acarteladas, cuando no se dispone de tablas o gráficas para el efecto, únicamente puede efectuarse por medio de la Analogía de la Columna, ya que la aplicación de cualquier otro método de análisis resulta impráctica.
- 6) Los arcos estáticamente indeterminados pueden ser analizados ventajosamente por los métodos de Área-momento, Centro Elástico y Analogía de la Columna.
- 7) Se recomienda el uso del método de la Analogía de la Columna en el análisis de arcos estructurales que por razones de orden práctico se construyen de un solo claro.



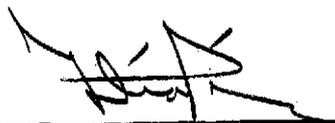
## BIBLIOGRAFIA

1. John I. Parcel and Robert B. Moorman  
"Analysis of Statically Indeterminate Structures"  
John Wiley. New York. Segunda Edición, Feb. 1957.
2. James Michalos  
"Theory of Structural Analysis and Design"  
The Ronald Press Company. New York, 1958.
3. Clifford David Williams  
"Analysis of Statically Indeterminate Structures"  
International Textbook Company  
Scranton, Pennsylvania. Cuarta Edición, 1959.
4. Linton E. Grinter  
"Theory of Modern Steel Structures"  
Vol. II "Statically Indeterminate Structures and Space Frames"  
The Mac Millan Company, New York. Tercera Edición 1949.
5. Carlos Fernández Casado  
"Cálculo de Arcos"  
Editorial Dossat S.A. Madrid. 1955.
6. J. Sterling Kinney  
"Análisis de Estructuras Indeterminadas"  
Compañía Editorial Continental S.A. México D.F. 1963.
7. Hale Sutherland and Harry L. Bowman  
"Structural Theory"  
John Wiley. New York. Cuarta Edición, Mayo 1956.
8. Chu Kia Wang  
"Statically Indeterminate Structures"  
Mac Graw-Hill Book Company, New York. 1965.
9. Cross y Morgan  
"Estructuras Continuas de Hormigón Armado"  
Editorial Dossat S.A. Madrid, 1961.

PROPIEDAD DE

UNIVERSIDAD DE GUATEMALA

10. **Carlos Fernández Casado**  
**"Cálculo de Estructuras Reticulares"**  
Editorial Dassat S.A. Madrid, 1952.
11. **Copias del Curso de Diseño Estructural II, impartido en la Facultad de Ingeniería.**  
**Catedrático: Ing. Joaquín Lottmann E.**  
**Primer Semestre de 1969.**



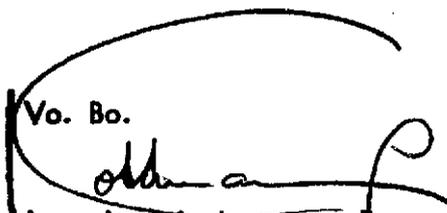
José Fernando Díaz Pérez

Vo. Bo.



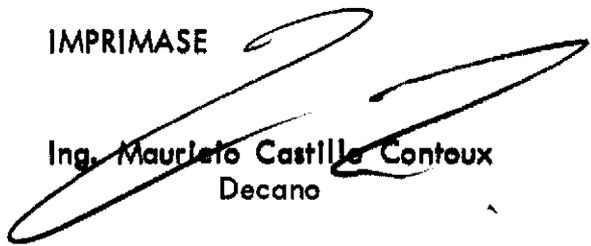
Ing. Antonio Meneses Cruz  
Asesor

Vo. Bo.



Ing. Joaquín Löffmann B.  
Jefe del Departamento  
de Estructuras

IMPRIMASE



Ing. Mauricio Castilla Contoux  
Decano