

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA



Guatemala, noviembre de 1975.

7

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE  
INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD DE  
SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano: Ing. Hugo Quan Mé

Vocal Primero: Ing. Julio Campos B.

Vocal Segundo: Ing. Roberto Barrios Morataya

Vocal Tercero: Ing. Leonel Aguilar Girón

Vocal Cuarto: Br. Jorge Venancio Guzmán B.

Vocal Quinto: Br. Felipe Alejandro Berganza R.

Secretario: Ing. Manuel Angel Castillo G.

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN  
GENERAL PRIVADO

Decano: Ing. Hugo Quan Mé

Examinador: Ing. Emilio Beltranena M.

Examinador: Ing. Leonel Pinot Leiva

Examinador: Ing. Luis Pineda del Cid

Secretario: Ing. José Luis Terrón

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR:

Cumpliendo con lo establecido por los estatutos de la Universidad de San Carlos de Guatemala, tengo el honor de someter a vuestra consideración mi trabajo de tesis titulado:

ANALISIS PLASTICO DE ESTRUCTURAS  
RETICULARES DE ACERO

Tema que me fuera asignado por la Honorable Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.

ACTO QUE DEDICO:

Al Supremo Creador.

A mi padre:

José Luis Reyes Orellana  
Q.E.P.D.

A mi madre:

Dora Estela Flores vda. de Reyes

A mi esposa:

Thelma Idania Leytán de Reyes

A mi hijita:

Lorna Mariela

A mi hermana:

Flor de María

A mi abuela:

Angela Flores

## AGRADECIMIENTO

Agradezco, de manera muy especial, al Ing. Julio González y al Ing. Juan Torres su colaboración en la realización de este trabajo de tesis.

## C O N T E N I D O

1.	INTRODUCCION.	1
2.	CONCEPTOS FUNDAMENTALES.	2
	2.1 Ductilidad del acero.	2
	2.2 Diseño elástico convencional.	4
	2.3 Esfuerzos residuales, de fabricación y montaje.	7
	2.4 Capacidad de carga y coeficiente de seguridad real en estructuras isostáticas e hiperestáticas.	8
3.	TEORIA SIMPLE DE LA FLEXION PLASTICA.	13
	3.1 Aspectos generales.	13
	3.2 Hipótesis fundamentales.	13
	3.3 Flexión de barras de sección transversal rectangular.	15
	3.4 Gráfica momento-curvatura para la sección rectangular.	18
	3.5 Flexión de vigas I y H.	21
	3.6 Articulación plástica.	23
	3.7 Secciones transversales de distintas formas.	26
4.	FACTORES QUE AFECTAN LA RESISTENCIA A LA FLEXION Y LA CAPACIDAD DE FORMACION DE ARTICULACIONES PLASTICAS.	28
	4.1 Aspectos generales.	28
	4.2 Propiedades del material.	28
	4.3 Esfuerzos residuales.	29
	4.4 Concentración de esfuerzos.	31
	4.5 Endurecimiento por deformación.	32
	4.6 Fuerza normal, fuerza de corte, pandeo local y lateral.	32
5.	DETERMINACION DE LA CARGA DE COLAPSO PLASTICO EN ALGUNAS ESTRUCTURAS SENCILLAS.	32
	5.1 Aspectos generales.	32

5.2	Viga libremente apoyada con carga uniformemente repartida.	34
5.3	Viga doblemente empotrada con carga uniformemente repartida.	38
5.4	Viga doblemente empotrada con carga concentrada en el centro.	43
5.5	Marco rígido rectangular doblemente empotrado.	44
6.	TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL ANALISIS PLASTICO DE ESTRUCTURAS.	53
6.1	Aspectos generales.	53
6.2	Características de la distribución de momentos flexionantes durante el colapso.	55
6.3	El principio del trabajo virtual.	56
6.4	Teorema del límite inferior.	57
6.5	Teorema del límite superior.	64
6.6	Teorema de unicidad.	67
7.	METODOS GENERALES DE ANALISIS.	68
7.1	Aspectos generales.	68
7.2	Método estático.	68
7.3	Método estático analítico (distribución plástica de momentos).	73
7.4	El método de los mecanismos.	82
7.5	Ejemplos de aplicación.	89
7.6	Cargas uniformemente distribuidas.	100
7.7	Marcos con cabezal inclinado, (Método de los mecanismos).	107
8.	CONCLUSIONES.	115
9.	BIBLIOGRAFIA.	116

## ANALISIS PLASTICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES DE ACERO

### 1

#### INTRODUCCION

Los primeros estudios hechos para dimensionar elementos estructurales sometidos a diversas solicitaciones se basaron en la determinación de la carga última que esos elementos fuesen capaces de soportar, sin embargo, desde principios del siglo pasado se pretende diseñar los elementos estructurales de tal manera que los esfuerzos máximos en ellos no alcancen el valor correspondiente al límite de proporcionalidad, en la que es válida la ley de Hooke.

Con ésto se persigue que no se presenten en las estructuras deformaciones permanentes y poder basar los cálculos en la ley de Hooke, que permite establecer fórmulas relativamente simples.

En consecuencia, contamos en nuestros días con métodos refinados para el análisis y diseño de estructuras basados en la Teoría de la Elasticidad, cuya premisa fundamental consiste en no sobrepasar el esfuerzo correspondiente al límite de proporcionalidad.

Sin embargo, el comportamiento real de las estructuras diseñadas elásticamente no puede explicarse, en muchos casos, más que admitiendo que los esfuerzos sobrepasan el límite de elasticidad y que, más allá, el material deja de ser elástico para convertirse en plástico, lo que invalida una de las suposiciones fundamentales de la teoría elástica.

Se han desarrollado métodos que tratan de utilizar la propiedad del acero de comportarse plásticamente más allá de la zona de validez de la ley de Hooke; estos métodos tratan de estudiar las condiciones de colapso de la estructura, con el objeto de diseñarla dándole un coeficiente de seguridad adecuado para evitar la falla. Desde luego la estructura experimentará deformaciones permanentes para cargas menores que las de colapso, pero esas deformaciones no tienen mucha importancia en la capacidad última de carga.

Los métodos plásticos de análisis y diseño serán aplicables si el acero se comporta como un material elasto-plástico, lo que no sucede siempre; por consiguiente, no podremos utilizarlos cuando las condiciones --

del problema sean tales que tengamos otra clase de comportamiento.

La capacidad de una estructura para soportar las cargas que obran sobre ella puede determinarse por cualquiera de los comportamientos siguientes:

1. Pandeo, localizado o general, ya sea elástico, plástico o una combinación de ambos.
2. Resistencia a la fatiga.
3. Fractura frágil bajo carga estática, resultante, en general, de la combinación de una serie de factores adversos (bajas temperaturas, estados triaxiales de esfuerzos, material deficiente y defectos locales de diseño o fabricación).
4. Flujo plástico y deformaciones cada vez mayores bajo carga creciente.

Los métodos plásticos de análisis y diseño, evidentemente, no serán aplicables en ninguno de los tres primeros casos, pero sí lo serán en el cuarto; y son muchas las estructuras que caen en él.

Sin embargo, habrá ocasiones en que no podrán ser utilizados los métodos plásticos y será necesario recurrir a los procedimientos elásticos tradicionales; pero cuando aquellos sean válidos, serán, en general, más fáciles de aplicar que los elásticos y nos proporcionarán, además, una visión más correcta del comportamiento de la estructura y un coeficiente de seguridad más confiable; por otro lado, las enseñanzas que se obtienen de los métodos plásticos son aplicables aún en el diseño elástico de las estructuras.

## 2

### CONCEPTOS FUNDAMENTALES

#### 2.1 DUCTILIDAD DEL ACERO.

El acero es el más dúctil de los materiales utilizados en la actualidad en la construcción. Por lo tanto, el acero estructural admite grandes deformaciones más allá del límite de elasticidad sin peligro de fractura y hace posible la aplicación de los métodos plásticos al diseño estructural.

La Fig. 2.1, que es la curva esfuerzo-deformación del acero, muestra claramente la ductilidad antes mencionada.

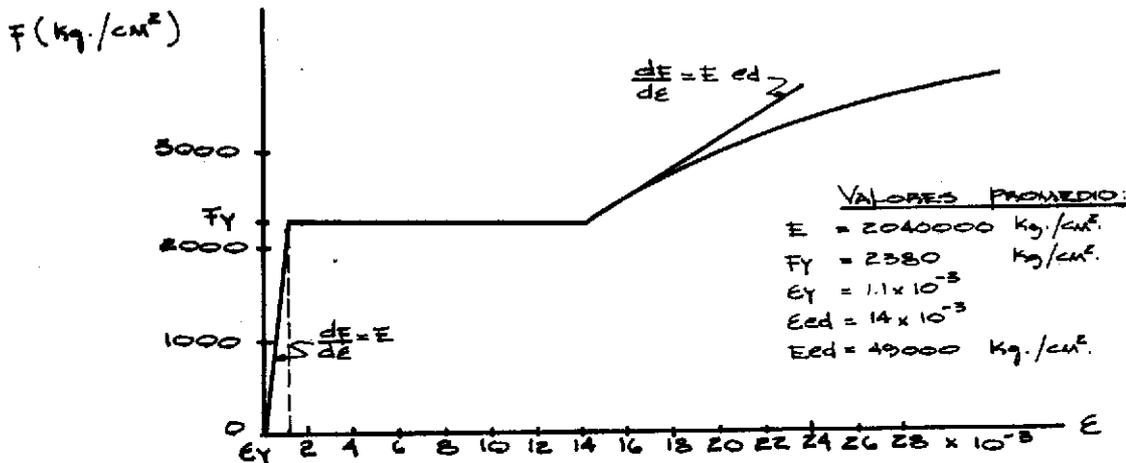


Fig. 2.1

La figura corresponde a un ensayo de tensión, pero para cualquier otro tipo de sollicitación se obtiene una curva semejante.

Aunque el acero estructural no puede proporcionar una cantidad indefinida de deformación plástica, su ductilidad es suficiente para llenar -- las necesidades de los métodos plásticos de diseño; las deformaciones requeridas en éstos no suelen llegar a la iniciación del endurecimiento -- por deformación, por lo que el acero suele idealizarse como un material elasto-plástico perfecto, como se muestra en la Fig. 2.2a, suponiéndolo capaz de soportar deformaciones indefinidas bajo esfuerzo constante (en algunas ocasiones se le idealiza como un material rígido-plástico, Fig. 2.2b).

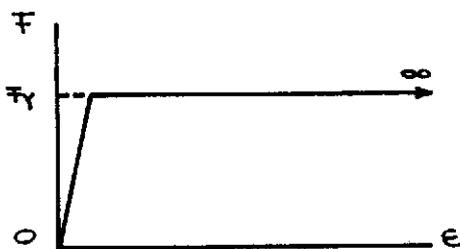


Fig. 2.2a

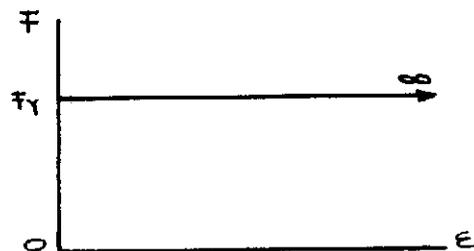


Fig. 2.2b

No se toma en cuenta el aumento del esfuerzo más allá del correspondiente al límite inferior de fluencia,  $F_y$ , que suele presentarse antes -

de iniciarse el flujo plástico, y que sólo introduciría notables complicaciones en el problema, sin afectar notablemente los resultados; ni tampoco el endurecimiento por deformación, que se deja como un margen de seguridad, ya que, evidentemente, antes de que el acero falle el esfuerzo a que está sometido debe crecer más allá de  $F_y$ ; sin embargo, este esfuerzo se considera como el máximo que puede presentarse.

Conviene hacer notar que la elongación correspondiente a la iniciación del endurecimiento por deformación es de sólo 1.4% aproximadamente, mientras que la ruptura final se presenta para elongaciones del 25% o más; en diseño plástico, las deformaciones unitarias críticas rara vez son mayores de 1.4%, de manera que aún queda por utilizar la mayor parte de la ductilidad del acero, lo que proporciona un margen adicional de seguridad.

Las deformaciones máximas arriba mencionadas corresponden a cargas de colapso, no de trabajo, y no se presentan en toda la estructura, sino únicamente en algunas zonas críticas de dimensiones reducidas; en la mayoría de los casos las deformaciones permanecen debajo del límite elástico para cargas de trabajo.

## 2.2 DISEÑO ELÁSTICO CONVENCIONAL.

Consideremos una viga de sección transversal constante apoyada libremente en un extremo y empotrada en el otro, cargada como se muestra en la Fig. 2.3.

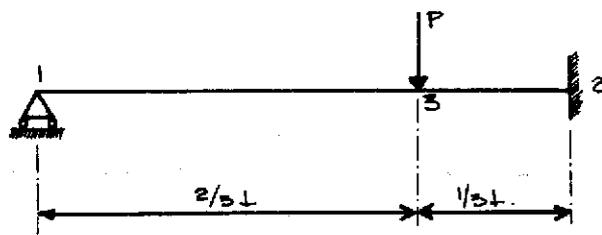


FIG. 2.3

Aplicando el criterio elástico, obtenemos los valores siguientes para los momentos bajo la carga y en el empotramiento:

$$M_3 = \frac{8}{81} PL \quad \text{y} \quad M_2 = -\frac{5}{27} PL = M_{\max.}$$

La viga se dimensionará de tal manera que el esfuerzo máximo que se presente en ella no sobrepase al de trabajo,  $F_t$ , de manera que deberá cumplirse la condición:

$$F_{\max} = \frac{M_2}{S} \leq F_t$$

Donde  $S$ =módulo de sección ordinario= $I/y$  ( $I$  es el momento de inercia y  $y$  es la distancia del centroide de la sección a la fibra extrema). Sustituyendo  $M_2$  por su valor, obtenemos:

$$F_{\max} = \frac{5PL}{27S} \leq F_t$$

De esta expresión despejamos la carga máxima admisible, a la que llamaremos  $P_t$ :

$$P_t = \frac{27SF_t}{5L}$$

Si incrementamos el valor de la carga  $P$ , llegará un instante en que el esfuerzo máximo en la viga alcance el valor  $F_y$ , correspondiente al límite inferior de fluencia; ésto sucederá cuando  $P$  valga:

$$P_y = \frac{27SF_y}{5L}$$

El factor de seguridad con respecto al límite inferior de fluencia es tá dado por:

$$F.S. = \frac{\text{esf. en el lím. inferior de fluencia}}{\text{esf. de trabajo}} = \frac{F_y}{F_t} = \frac{P_y}{P_t}$$

De esta manera se define el factor de seguridad en estructuras diseñadas elásticamente, y nos indica que si la carga de trabajo  $P_t$  se incrementa hasta alcanzar el valor de  $F.S.P_t$ , en ese instante aparece el esfuerzo de fluencia  $F_y$  en las fibras más cargadas de la viga.

Es decir, el diseño elástico se debe efectuar de tal manera, y el coeficiente de seguridad se debe escoger con un valor tal, que nunca, durante la vida útil de la estructura se alcance, en ningún punto de la misma, el esfuerzo de fluencia. Esto se debe, aparentemente, al deseo de que no aparezcan deformaciones permanentes, pero la razón real es que si nos salimos del rango elástico (en el acero estructural el límite de pro

porcionalidad y el inferior de fluencia prácticamente coinciden) todas las fórmulas basadas en la ley de Hooke dejan de ser válidas y, por consiguiente, la Teoría de la Elasticidad se vuelve inaplicable.

En realidad, en las estructuras diseñadas elásticamente no se cumple la condición mencionada anteriormente, ya que se salen continuamente del rango de aplicación de la ley de Hooke a causa de una serie de factores, de los cuales mencionaremos algunos a continuación.

1. Conexiones. En el diseño de conexiones remachadas en las que existen varios remaches en línea en la dirección de la fuerza, se supone que ésta se reparte por igual entre todos ellos; esta suposición se cumple, desde luego, cuando el número de remaches es dos, pero deja de ser cierta para tres o más; en efecto, cuando la fuerza que obra sobre la junta es relativamente baja, los remaches extremos toman una porción de ella - mucho mayor que la que toman los centrales, debido a la diferencia en deformaciones del material que los rodea. Por consiguiente, si la distribución elástica de la fuerza se conservase hasta la falla de la junta, se romperían primero los remaches extremos, y la falla de éstos provocaría - posteriormente la falla total.

Experimentalmente se ha comprobado, sin embargo, que poco antes de -- que la junta falle, la fuerza que obra sobre ella está efectivamente distribuida por partes iguales entre todos los remaches, debido a que cuando el esfuerzo en los de los extremos alcanza  $F_y$ , fluyen plásticamente y pasan el exceso de carga a los del centro, por lo que todos los remaches están igualmente cargados en el momento del colapso.

Por lo tanto, no sólo se admite que el esfuerzo en los remaches llegue al valor  $F_y$ , sino que el diseño de la junta está basado, de hecho, - en su resistencia final, y no en su comportamiento elástico.

2. Influencia de agujeros en placas. Un agujero circular en una placa ocasiona una concentración de esfuerzos que, en el rango elástico, hace que los esfuerzos en los bordes del agujero alcancen valores hasta tres veces mayores que los que existirían si la placa no estuviese agujereada, para estados de esfuerzos de tensión o compresión pura.

Sin embargo, las placas se diseñan suponiendo una distribución uniforme de los esfuerzos, descontando simplemente del área total la del agujero.

De nuevo no se cumple la condición de que los esfuerzos sean menores que  $F_y$ , ya que este esfuerzo aparecerá en los bordes del agujero, y la distribución uniforme de esfuerzos que antecede a la falla se presentará únicamente a causa de las redistribuciones ocasionadas por la ductilidad del acero.

### 2.3 ESFUERZOS RESIDUALES, DE FABRICACION Y MONTAJE.

Los esfuerzos residuales se deben al enfriamiento no uniforme de los perfiles después de la laminación, alcanzando valores del orden de la mitad a dos tercios de  $F_y$ ; sin embargo, en los métodos elásticos se admite la hipótesis del estado inicial neutro, y se toman en cuenta únicamente los esfuerzos ocasionados por las cargas que obran sobre la estructura. La superposición de éstos con los que ya existían previamente dará lugar a que se alcance el esfuerzo  $F_y$  y se presenten plastificaciones en la estructura.

Análogamente, los esfuerzos residuales debidos a la ejecución de soldaduras y los ocasionados al enderezar o dar contraflecha a las piezas, así como los que aparecen al formar a éstas durante el montaje y los debidos a hundimientos no previstos de los apoyos, dan lugar, al superponerse con los producidos por las cargas, a que en muchas secciones de las estructuras se alcance el esfuerzo de fluencia del material.

Por otra parte, y con la única excepción de las estructuras muy simples, los métodos elásticos exactos son sumamente tediosos, por lo que raramente se usan en la práctica; en lugar de aplicarlos, se hacen simplificaciones que permitan reducir los cálculos. Por lo tanto no puede esperarse que los esfuerzos calculados de esta manera guarden con los que en realidad existen en la estructura una relación muy cercana.

Como último ejemplo, podemos citar el de las estructuras construídas en zonas sísmicas; en muchas ocasiones su comportamiento ante temblores importantes no se ha podido explicar más que teniendo en cuenta la ductilidad del material de que están constituídas, al grado de que las precauciones más importantes que deben tomarse en estructuras que se construyan en zonas sísmicas deben tender a hacer que tengan la mayor ductilidad posible.

Podemos concluir, pues, que en estructuras diseñadas elásticamente, los esfuerzos reales son muy frecuentemente mayores que  $F_t$  y alcanzan, también con mucha frecuencia, el valor  $F_y$ ; por consiguiente, los esfuerzos calculados al emplear métodos elásticos guardan muy poca relación -- con los reales, y no son, de hecho, más que un índice para diseño estructural; por otro lado, en muchas ocasiones hay que invocar la ductilidad del acero para explicar fenómenos que, desde el punto de vista elástico, son inexplicables.

Los métodos plásticos simplemente pretenden tener en cuenta, de una manera consciente, esa ductilidad del acero, con lo que se obtiene, con mayor exactitud, la capacidad de carga real de las estructuras.

#### 2.4 CAPACIDAD DE CARGA Y COEFICIENTE DE SEGURIDAD REAL EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS E HIPERESTATICAS.

Consideraremos dos estructuras sencillas, una isostática y la otra hiperestática, formadas por barras sometidas a tensión.

1. Barra a tensión (sistema isostático). Las expresiones que nos dan el esfuerzo y el alargamiento total de la barra mostrada en la Fig. 2.4 son:

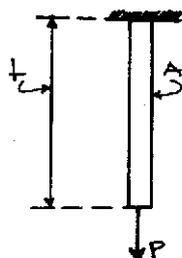


Fig. 2.4

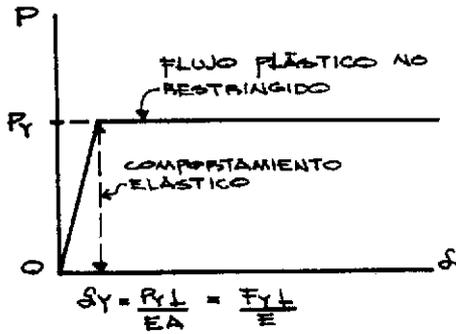
$$F = \frac{P}{A}$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

La carga máxima admisible es la que produce el esfuerzo  $F_y$  en la barra, o sea  $P_y = AF_y$ , ya que en cuanto se plastifica alguna de las secciones transversales de la barra (teóricamente toda la barra se plastifica al mismo tiempo) se presenta en ella un flujo plástico no restringido; por consiguiente, al alcanzar los esfuerzos en las secciones transversales el valor  $F_y$ , la barra sigue largándose sin que la fuerza  $P$  aumente, y puede considerarse agotada su capacidad de carga.

En la Fig. 2.5 se muestra la gráfica carga-deformación de la barra.

El coeficiente de seguridad de la pieza es:



$$F.S. = \frac{P_y}{P_t} = \frac{A F_y}{A F_t} = \frac{F_y}{F_t}$$

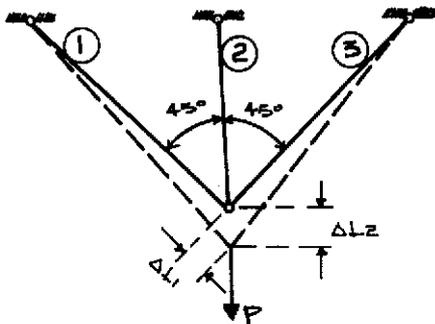
Si utilizamos para el diseño - los esfuerzos especificados por - el AISC para el acero A36, tendremos:

FIGURA 2.5

$$F.S. = \frac{2530}{1400} = 1.81$$

Evidentemente este factor de seguridad, determinado con respecto al - esfuerzo de fluencia, es también el coeficiente de seguridad de la barra respecto al colapso, puesto que hemos visto que en este caso la falla de la barra coincide con la iniciación del flujo plástico.

2. Tres barras concurrentes en un punto (sistema hiperestático). Las tres barras que forman el sistema mostrado en la Fig. 2.6 tienen la misma sección transversal, constante en toda su longitud.



Areas:  $A_1 = A_2 = A_3 = A$

Longitudes:  $L_1 = L_3 = \sqrt{2}L_2$

Fuerzas:  $T_1, T_2, T_3$

(Por simetría,  $T_1 = T_3$ )

Alargamientos:  $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3$

(Por simetría,  $\Delta L_1 = \Delta L_3$ )

FIGURA 2.6

Se trata de determinar la intensidad de la fuerza que aparece en cada una de las barras.

a) Solución elástica: Escribiremos la ecuación de equilibrio de proyecciones sobre un eje vertical.

$$2T_1 \cos 45^\circ + T_2 = P$$

Como la estructura es hiperestática de primer grado, necesitamos una ecuación adicional, de compatibilidad de deformaciones:

$$\Delta L_2 \cos 45^\circ = \Delta L_1$$

Sustituimos en esta ecuación a  $\Delta L_1$  y  $\Delta L_2$  por sus valores dados por la ley de Hooke:

$$(T_2 L_2 / EA) \cos 45^\circ = T_1 L_1 / EA \quad \therefore \quad T_1 = T_2 (L_2 / L_1) \cos 45^\circ$$

Llevamos este valor a la ecuación de equilibrio:

$$2T_2 (L_2 / L_1) \cos^2 45^\circ + T_2 = P \quad \therefore \quad T_2 = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} \quad \text{y} \quad T_1 = T_3 = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}$$

La barra central está sometida a una fuerza mayor que la que aparece en las laterales, por consiguiente, puesto que las secciones transversales de las tres tienen la misma área, el esfuerzo máximo se presentará también en la barra central y, si el valor de P va aumentando, en ella a parecerá primero el esfuerzo de fluencia  $F_y$ .

Este esfuerzo se presentará por primera vez en la estructura cuando:

$$T_2 = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} = AF_y$$

O sea cuando P alcance el valor:

$$P_y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} AF_y = 1.707 AF_y$$

Siguiendo un criterio elástico, la carga de trabajo de la estructura será:

$$P_t = 1.707 AF_t$$

Por consiguiente, el coeficiente de seguridad elástico, respecto a la iniciación del flujo plástico, vale:

$$F.S. = \frac{P_y}{P_t} = \frac{1.707 AF_y}{1.707 AF_t} = 1.81$$

Este valor es el mismo que en la estructura isostática estudiada previamente.

b) Solución elasto-plástica: A diferencia de lo que sucede en la estructura isostática, la aparición del esfuerzo  $F_y$  en la barra central no implica la falla de la estructura, ya que el alargamiento de esa barra está limitado por las dos laterales, que se comportan aún elásticamente;

es decir, se presenta un flujo plástico restringido por las porciones de la estructura que se mantienen aún en estado elástico.

Por consiguiente, la carga  $F_y$  no será máxima en el sistema (la máxima que pueda soportar), ya que las barras laterales podrán tomar incrementos adicionales de carga, mientras que la fuerza en la barra central se mantiene constante e igual a  $AF_y$ , puesto que a los alargamientos elásticos de las primeras corresponderán alargamientos en el rango plástico -- (con esfuerzo constante) en la última.

Al incrementar la carga más allá de  $F_y$ , la estructura se comporta como si fuese un sistema isostático formado por dos barras, sometido a la acción de una fuerza  $P$ , creciente hacia abajo, y una constante  $AF_y$ , hacia arriba (Fig. 2.7).

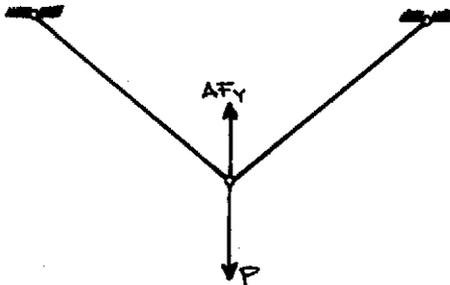


FIGURA 2.7

La falla de la estructura se presentará cuando se plastifiquen también las barras laterales, ya que en ese momento las deformaciones no tendrán control e irán aumentando bajo carga constante (flujo plástico no restringido).

Cuando la carga alcance su valor máximo posible,  $P_u$ , la fuerza en cada una de las tres barras valdrá ---

$AF_y$ ; de la condición de equilibrio obtenemos el valor  $P_u$  (Fig. 2.8). Obsérvese que la condición de compatibilidad no es ya necesaria.

$$\begin{aligned} P_u &= AF_y + 2AF_y \cos 45^\circ \\ &= AF_y (1 + \sqrt{2}) \\ &= 2.4142 AF_y \end{aligned}$$

El coeficiente de seguridad real (respecto a la falla) del sistema diseñado elásticamente es:

$$\begin{aligned} F.S. &= \frac{P_u}{P_t} = 2.4142 AF_y / 1.707 AF_t \\ &= 1.42 \frac{F_y}{F_t} = 1.42 \times 1.81 \end{aligned}$$

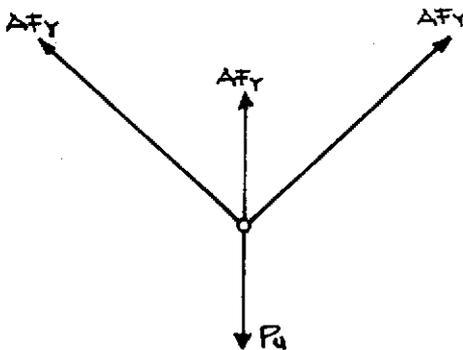


FIGURA 2.8

F.S. = 2.57

La comparación de este valor con el obtenido para la barra aislada sometida a tensión (isostática) hace evidente uno de los puntos difícilmente defendibles del diseño elástico: la existencia de coeficientes de seguridad diferentes respecto al colapso para diversos tipos de estructuras, aunque la seguridad con respecto a la iniciación del flujo plástico sea, al menos aparentemente, igual en todas. En cambio, utilizando métodos plásticos podemos tener un coeficiente de seguridad constante, pues una vez calculada la carga de falla nos bastará con dividirla entre un número cualquiera fijo, mayor que uno, para obtener la carga de trabajo, con el coeficiente de seguridad real que hayamos escogido.

En la Fig. 2.9 se muestra la gráfica carga-deformación de la estructura; sobre el eje de las ordenadas hemos llevado la relación adimensional  $P/Af_y$  y sobre el de las abscisas el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga,  $\Delta L_2$ .

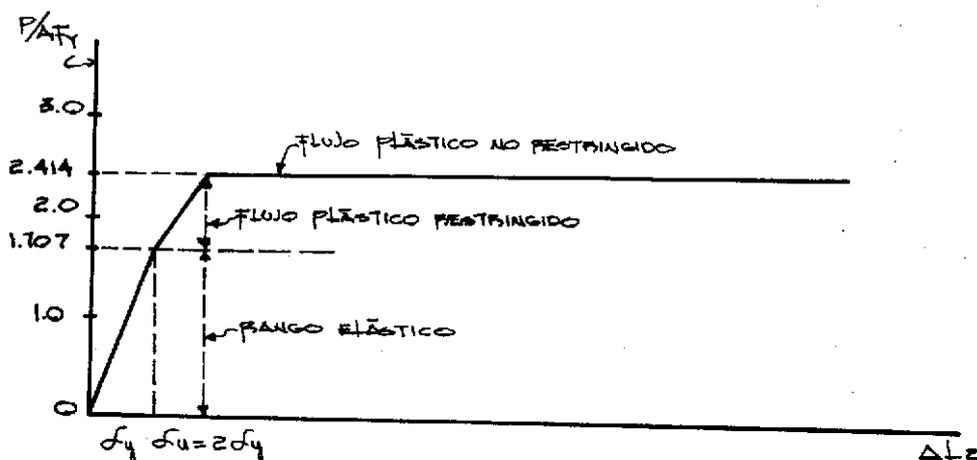


FIGURA 2.9

En la primera etapa del proceso de carga, las tres barras se encuentran en estado elástico; después de que se plastifica la central, los incrementos de carga son tomados únicamente por las dos barras laterales, de manera que a un mínimo incremento de carga le corresponde una deformación mayor que en la primera etapa (flujo plástico restringido); luego, al plastificarse también las dos barras laterales, se presenta un flujo plástico no restringido, con aumento indefinido de la deformación, bajo carga constante.

Llamamos carga última o carga de colapso a la carga que ocasiona el flujo plástico no restringido de la estructura sobre la que actúa, es decir, a la carga para la cual las deformaciones de la estructura aumentan mientras que ella se mantiene constante.

3

TEORIA SIMPLE DE LA FLEXION PLASTICA

3.1 ASPECTOS GENERALES.

Los adelantos más importantes que se han logrado hasta la fecha en los métodos plásticos han sido en el estudio de estructuras reticulares planas, en las que todos los miembros y las cargas que obran sobre ellas se encuentran en un mismo plano.

La capacidad de carga de una estructura de este tipo se debe, principalmente, a la capacidad de sus juntas para transmitir momentos flexionantes y a la resistencia a la flexión de los miembros que la componen, aunque sobre ellos obran también, casi siempre, fuerzas cortantes y normales (que por ahora despreciaremos su influencia sobre la resistencia última a la flexión).

3.2 HIPOTESIS FUNDAMENTALES.

1. El material sigue la ley de Hooke hasta que el esfuerzo alcanza el valor correspondiente al límite superior de fluencia; al aumentar la deformación, el esfuerzo baja bruscamente hasta el límite inferior de fluencia, y a partir de ese punto se mantiene constante, hasta que se presenta el endurecimiento por deformación. Es decir, la gráfica esfuerzo-deformación tiene la forma indicada en la Fig. 3.1.



FIGURA 3.1

En la práctica se suele ignorar el aumento de esfuerzo hasta el límite superior de fluencia ( $L_sF$ ) y el descenso brusco del mismo, así como el endurecimiento por deformación, con lo que se obtiene un diagrama idealizado formado por dos tramos de recta (indicado con línea punteada en la figura).

Entre 0 y  $F_y$  el material sigue la ley de Hooke, de manera que en esa zona está dado por la relación esfuerzo-deformación  $F = E\epsilon$ .

Más allá de la deformación correspondiente al límite inferior de fluencia,  $\epsilon_y$ , las condiciones que deben llenarse son  $\epsilon > \epsilon_y$ ,  $F = F_y$ .

2. Las propiedades del material en compresión son las mismas que en tensión, conservándose los mismos valores para  $E$  y  $F_y$ .

3. El material es homogéneo e isótropo, tanto en el rango elástico como en el plástico.

4. Cada fibra de la pieza sometida a flexión se comporta igual que a tensión o compresión simple, es decir, se supone que cada una de las fibras está en libertad de alargarse y contraerse longitudinal y transversalmente, o viceversa, bajo la acción de las fuerzas exteriores, como si estuviera separada de las demás.

5. Toda sección transversal de la viga es simétrica respecto a un eje que está alojado en el plano de la flexión.

6. Las secciones transversales planas antes de la deformación permanecen planas después de ésta, y se conservan normales al eje longitudinal deformado de la pieza (esta hipótesis se cumple rigurosamente en vigas sujetas a flexión pura; en los demás casos su aceptación equivale a desprestigiar el efecto de las fuerzas cortantes sobre las deformaciones).

7. No hay fuerza axial resultante en las secciones transversales de la viga (es decir, las fuerzas normales interiores son mecánicamente equivalentes a un par en cada sección transversal).

8. Las deformaciones son suficientemente pequeñas para que pueda considerarse que  $\delta = \tan \phi$ , siendo  $\phi$  la curvatura en un punto cualquiera del eje de la barra.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, al analizar una estructura plásticamente se supone que las deformaciones se deben únicamente a los momentos flexionantes, suposición análoga a la que se hace, en general, en análisis elástico (por ejemplo, al resolver una estructura elástica--

mente por distribución de momentos, las rigideces suelen calcularse sin tener en cuenta el efecto de las fuerzas normales que obran en las barras); después, al hacer el diseño por cualquier método, elástico o plástico, sí se tomarán en cuenta las fuerzas normales y tangenciales.

### 3.3 FLEXION DE BARRAS DE SECCION TRANSVERSAL RECTANGULAR.

Basados en las hipótesis anteriores, estudiaremos el desarrollo de deformaciones y esfuerzos y la distribución de zonas plastificadas cuando se flexiona una viga de sección transversal rectangular, en etapas sucesivas y partiendo del estado inicial neutro, primero hasta alcanzar el límite elástico en las fibras de los bordes superior e inferior, y después, más allá de ese límite, hasta la plastificación completa de la sección (Fig. 3.2).

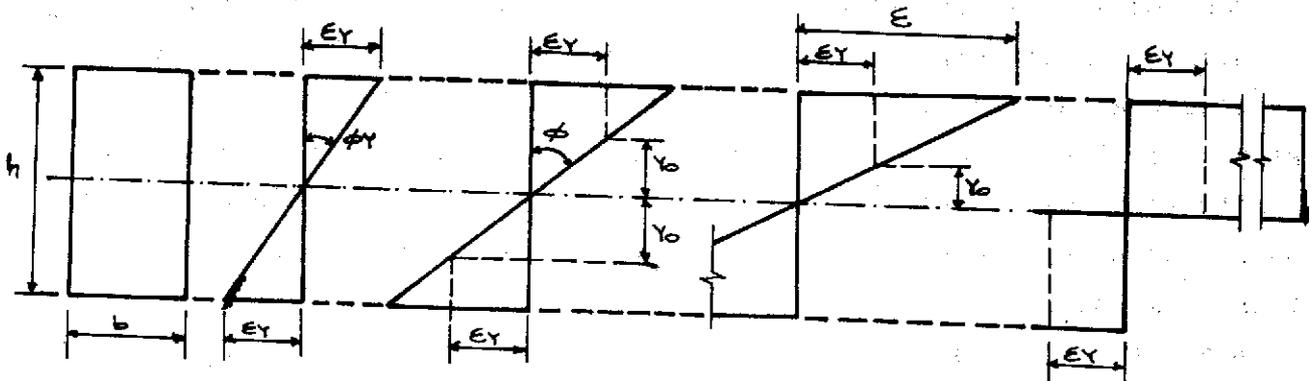
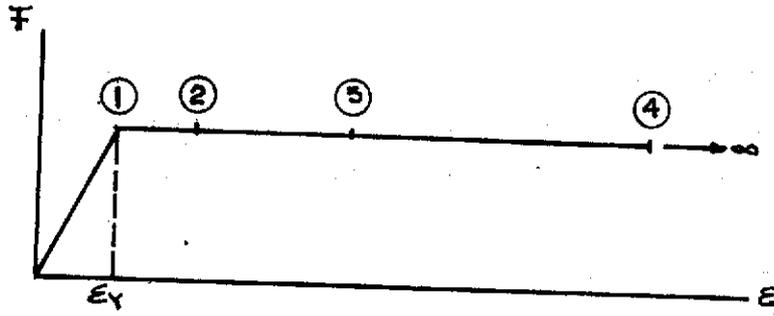
Las figuras 1 a 4 (Fig. 3.2) representan las distribuciones de deformaciones, esfuerzos y zonas plastificadas correspondientes a distintas etapas de la flexión de una viga rectangular, sometida a momentos flexionantes crecientes, y en el diagrama esfuerzo-deformación idealizado de la figura se han mostrado los puntos que corresponden a cada una de esas etapas.

En la etapa 1 aparece por primera vez el esfuerzo  $F_y$ , en las fibras de la sección más alejadas del eje neutro; evidentemente, hasta ese instante la viga se ha comportado elásticamente. Al momento flexionante correspondiente lo llamaremos  $M_y$ , y su valor puede calcularse utilizando la condición de equivalencia entre los sistemas de fuerzas exterior e interior (Fig. 3.3).

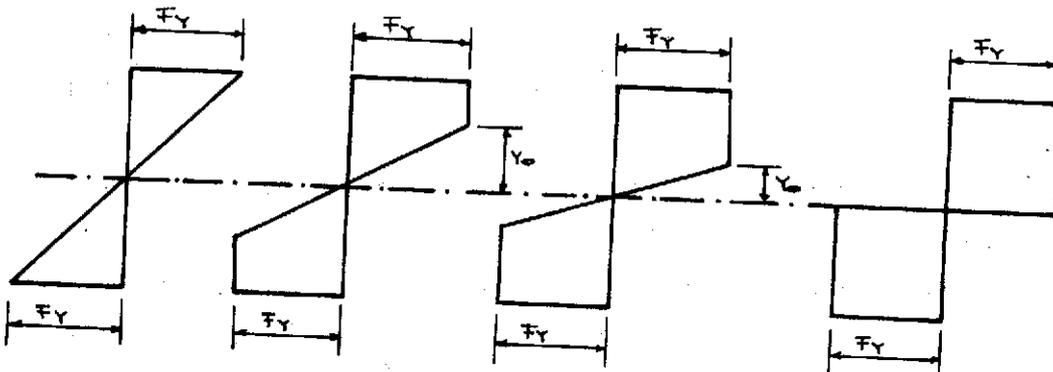
$$M_y = \frac{1}{2} F_y \frac{h}{2} b \left( \frac{2h}{2} \right)^2 = F_y \frac{bh^2}{6} = F_y S$$

Donde  $S = bh^2/6$  es el módulo de sección ordinario (de una sección rectangular).

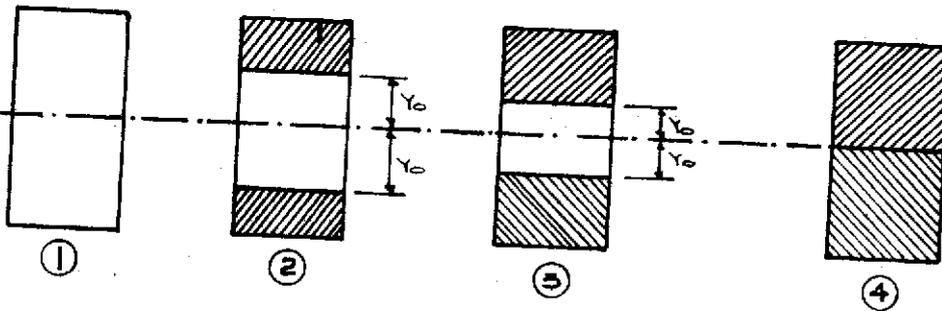
Al aumentar el valor del momento flexionante más allá de  $M_y$ , el esfuerzo  $F_y$  es alcanzado por fibras cada vez más cercanas al eje neutro, es decir, la zona plastificada se va extendiendo, en forma simétrica, partiendo de los bordes superior e inferior de la sección y hacia el interior de la misma; al mismo tiempo, aumentan rápidamente las deformacio



DEFORMACIONES



ESFUERZOS



DISTRIBUCIÓN DE ZONAS PLASTIFICADAS

FIGURA 3.2

nes de las fibras exteriores (punto 3 en la gráfica F- $\xi$ , de la Fig.3.2).

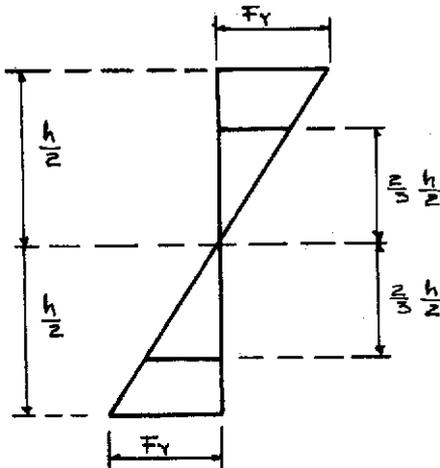


FIGURA 3.3

El valor máximo al que tiende - como límite el momento flexionante es el que ocasionaría la plastificación total de la sección; lo llamaremos momento plástico,  $M_p$ . (Evidentemente, de acuerdo con el diagrama F- $\xi$  idealizado, el momento plástico es el máximo que puede soportar una sección, ya que corresponde a la aparición de esfuerzos  $F_y$  en todos sus puntos, y ese es el valor máximo posible de los esfuerzos normales.)

En realidad, el momento plástico no es más que una idealización del problema, ya que, por un lado, la distribución de esfuerzos de la etapa 4 no puede lograrse, pues corresponde a la aparición de esfuerzos  $F_y$  hasta el eje neutro, tanto en la zona de tensión como en la de compresión, lo que implicaría deformaciones infinitas en la viga, y, por otro lado, el endurecimiento por deformación da lugar a que aparezcan esfuerzos mayores que  $F_y$  en los bordes de la sección; sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que esa idealización conduce a resultados muy cercanos a los reales.

Calculemos, ahora, el valor de  $M_p$ , utilizando, de nuevo, la condición de equivalencia entre las fuerzas exteriores e interiores (Fig. 3.4).

$$M_p = F_y b \frac{h}{2} \frac{h}{2} = F_y \frac{bh^2}{4}$$

Por semejanza con el módulo de sección ordinario, a la cantidad por la que hay que multiplicar el esfuerzo  $F_y$  para obtener el momento plástico vamos a llamar módulo de sección plástico y la representaremos con la letra  $Z$ . Por consiguiente, para la sección rectangular escribiremos:

$$\text{Módulo de sección plástico} = Z = \frac{bh^2}{4}.$$

La relación entre los momentos  $M_p$  y  $M_y$ , correspondientes respectivamente a la plastificación completa de la sección y a la iniciación del -

flujo plástico en ella, vale:

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{F_y Z}{F_y S} = \frac{Z}{S}$$

Al cociente  $Z/S$  entre los dos módulos de sección, plástico y elástico, se le da el nombre de factor de forma, ya que depende, exclusivamente, de la forma de la sección, y representa el aumento de resistencia de ésta debido a su comportamiento plástico. Lo representaremos por  $f$ , y toma el valor de:

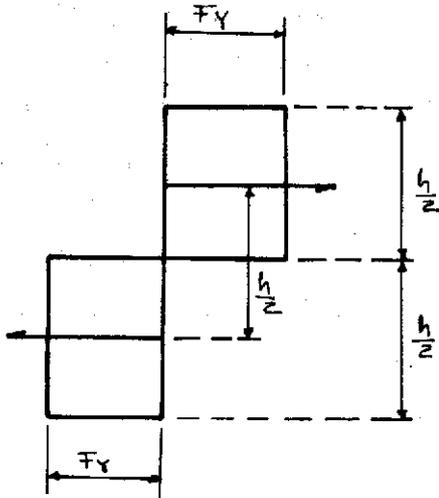


FIGURA 3.4

$$f = \frac{Z}{S} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1.5$$

### 3.4 GRAFICA MOMENTO-CURVATURA PARA LA SECCION RECTANGULAR.

Para obtener la expresión para el cálculo de la curvatura de una barra inicialmente recta al flexionarse durante la etapa de flexión elástica, consideramos dos secciones separadas una distancia unitaria, como se aprecia en la Fig. 3.5.

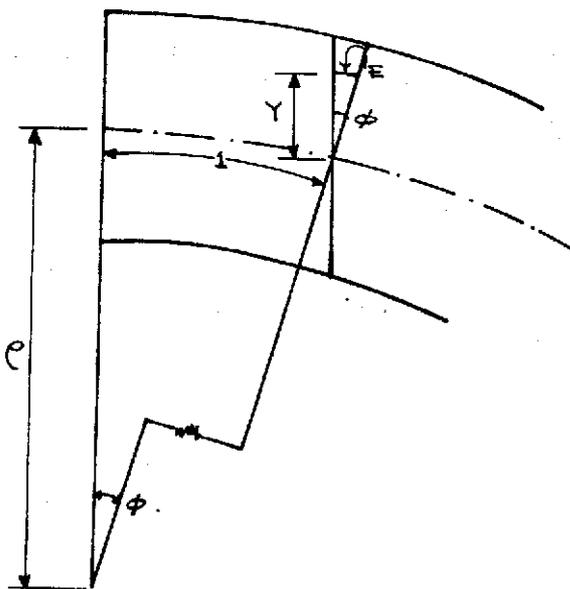


FIGURA 3.5

Como las deformaciones son pequeñas, podemos escribir:

$$\phi = \text{Tan} \phi = \frac{1}{\rho} = \text{curvatura de la pieza.}$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{y} = \frac{F}{E y} \quad (1)$$

De la fórmula de la escuadría:

$$F = \frac{M}{I} y \quad \therefore \quad \frac{F}{y} = \frac{M}{I}$$

Sustituyendo en (1) obtenemos:

$$M = EI\phi \quad (2)$$

Dividimos ambos miembros entre  $M_y = SF_y$  para obtener una relación adimensional entre momentos y curvaturas:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{EI}{SF_y} \phi$$

Ahora bien, si llamamos  $\phi_y$  al ángulo de rotación correspondiente a la iniciación del flujo plástico, podremos escribir:

$$\phi_y = \frac{F_y}{Eh/2} = \frac{2F_y}{Eh}$$

De esta expresión despejamos  $F_y$  y lo llevamos a la ecuación anterior:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{EI}{SEh\phi_y/2} \phi = \frac{2I\phi}{Sh\phi_y}$$

Es decir, en el rango elástico, momento y curvatura están relacionados por la ecuación adimensional:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\phi}{\phi_y} \quad (0 < \phi \leq \phi_y) \quad (3)$$

Estudiaremos ahora las relaciones entre momento y curvatura durante la flexión en el rango plástico.

Al aumentar el momento flexionante más allá de  $M_y$ , una parte de la sección se plastifica, pero la relación  $\phi = \epsilon/y$  sigue siendo válida. Ahora bien, puesto que la curvatura de una sección parcialmente plastificada es controlada por las deformaciones de las fibras interiores que permanecen aún elásticas (ya que las fibras exteriores en estado plástico no ofrecen ninguna resistencia adicional a la deformación), podemos escribir  $\phi = \epsilon_y/y_0$ , donde  $\epsilon_y$  es la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo  $F_y$  y  $y_0$  es la semi-amplitud de la zona central elástica de la viga (Fig. 3.2). Es decir, tenemos:

$$\phi = \frac{\epsilon_y}{y_0} \quad \text{y que} \quad \epsilon_y = \frac{F_y}{E}$$

Luego, podemos escribir:

$$\phi = \frac{F_y}{E y_0} \quad (4)$$

El momento en una etapa cualquiera del proceso de carga se obtiene --

partiendo de los diagramas de distribución de esfuerzos en la sección. - En la Fig. 3.6 reproducimos el diagrama de esfuerzos correspondientes a la etapa 2 de la Fig. 3.2 y lo dividimos en tres partes convenientemente escogidas para el cálculo del momento.

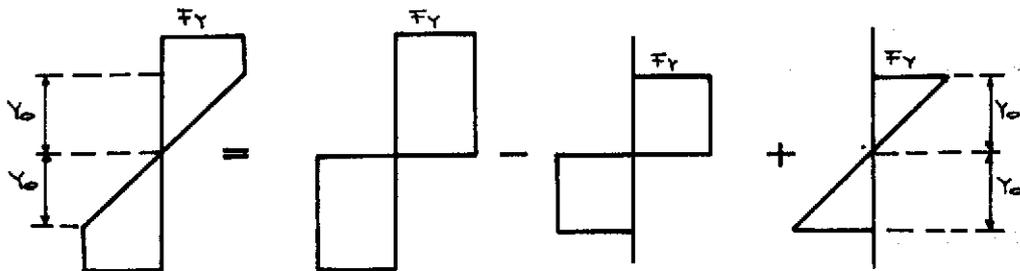


FIGURA 3.6a

Podemos escribir:

$$M = FyZ - FyZe + FySe \quad (5)$$

Donde  $Z$  es el módulo de sección plástico de la sección total y  $Ze$  y  $Se$  son, respectivamente, los módulos de sección plástico y elástico de la porción central de la viga, que está aún en estado elástico.

Los valores de los tres módulos de sección que aparecen en (5) son:

$$Z = bh^2/4$$

$$Ze = (b/4)(2y_0)^2 = by_0^2$$

$$Se = (b/6)(2y_0)^2 = (2/3)by_0^2 = (2/3)Ze$$

La ec. (5) puede escribirse en la forma siguiente:

$$M = FyZ - FyZe + Fy(2/3)Ze = Fy(Z - Ze/3) \quad (6)$$

El valor máximo de  $M$  se obtiene cuando la amplitud de la zona elástica se reduce a cero; entonces  $M=M_p=FyZ$ .

La ec. (6) puede escribirse:

$$M = Fy\left(Z - \frac{by_0^2}{3}\right) \quad (7)$$

De (4) despejamos el valor de  $y_0$  y lo sustituimos en (7), con lo que obtenemos:

$$M = F_y \left( Z - \frac{F_y^2 b}{3\phi^2 E^2} \right) \quad (\phi_y < \phi < \infty) \quad (8)$$

Se obtiene una relación no dimensional entre momento y curvatura dividiendo ambos miembros de (8) entre  $M_y = F_y S$ , lo que da:

$$\frac{M}{M_y} = \frac{Z}{S} - \frac{b F_y^2}{3 S \phi^2 E^2} \quad (9)$$

Hemos visto con anterioridad que  $\phi_y = 2F_y/Eh$ ; de aquí despejamos  $F_y$ , y llevamos su valor a la ec. (9), al mismo tiempo que sustituimos en ella  $S$  y  $Z$  por sus valores  $bh^2/6$  y  $bh^2/4$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= \frac{bh^2/4}{bh^2/6} - \frac{b(Eh\phi_y/2)^2}{3(bh^2/6)\phi^2 E^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \\ \frac{M}{M_y} &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] \quad (\phi > \phi_y) \end{aligned} \quad (10)$$

Las ecuaciones (3) y (10) nos dan, en forma completa, la relación entre momento y curvatura, ya que la primera es aplicable en el rango elástico y la segunda en el plástico.

La curva  $M-\phi$  adimensional resultante se muestra en la Fig. 3.6b. Los números en círculos que aparecen en esta figura corresponden a las etapas mostradas en la Fig. 3.2. La etapa 4, a la que se tiende como límite, representa la plastificación completa de la sección, en cuyo caso  $M = M_p = F_y Z$ . Nótese que el momento plástico es, en la sección rectangular, 50% mayor que el correspondiente a la iniciación del flujo plástico, como ya habíamos visto con anterioridad.

De la simple inspección de la ec.  $\phi = \xi y / y_o$ , puede deducirse que la curvatura crece indefinidamente al aumentar el momento flexionante, puesto que al ampliarse las regiones plastificadas  $y_o$  se reduce, tendiendo a cero cuando  $M$  tiende a  $M_p$ . Por consiguiente, al tender  $M$  a  $M_p$ ,  $y_o$  tiende a cero y la curvatura  $\phi$  tiende al infinito.

### 3.5 FLEXION DE VIGAS I Y H.

Siguiendo un camino análogo al empleado en el caso de vigas de sección transversal rectangular se llega a las expresiones siguientes, que relacionan momentos y curvaturas en el caso de vigas I o H, idealizadas como se muestra en las Figs. 3.7 y 3.8.

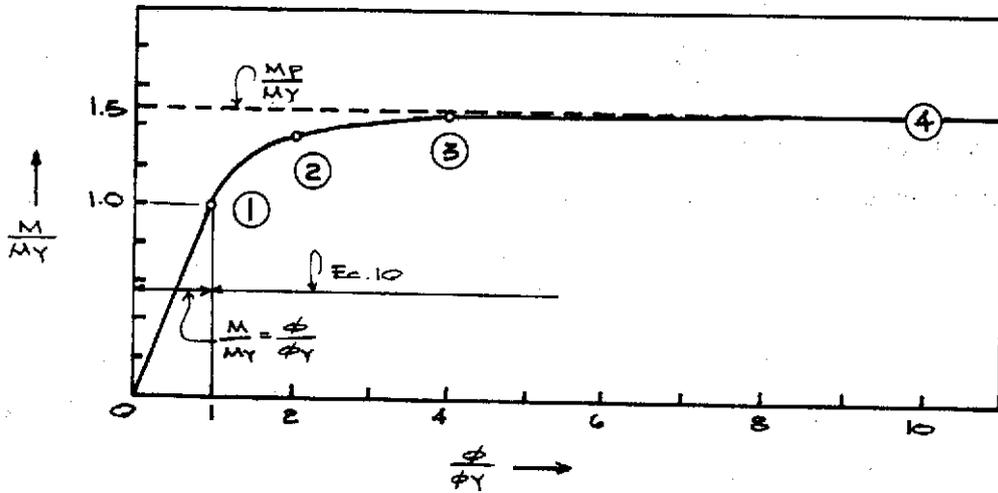


FIGURA 3.6b

Cuando la zona plastificada abarca parte de los patines (Fig. 3.7):

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} \left( 1 - \frac{bh^2}{6S} \right) - \frac{bh^2}{4S} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \left( 1 < \frac{\sigma}{\sigma_y} < \frac{h/2}{d/2 - t} \right) \quad (11)$$

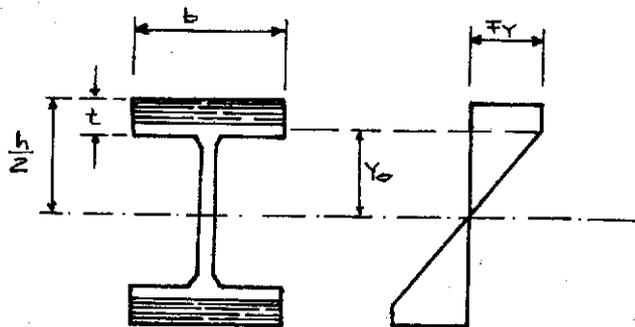


FIGURA 3.7

Al aumentar el momento flexionante, la zona plastificada penetra en el alma; entonces se obtiene (Fig. 3.8):

$$\frac{M}{M_y} = f - \frac{wh^2}{12S} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \quad \left( \frac{d/2}{d/2 - k} < \frac{\sigma}{\sigma_y} < \infty \right) \quad (12)$$

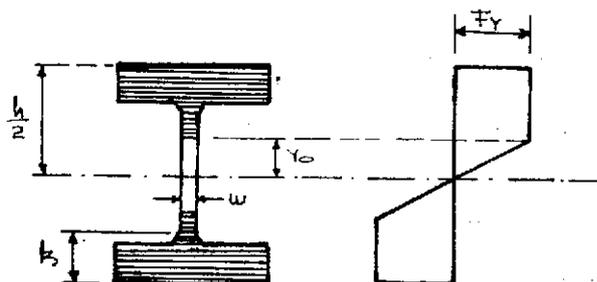


FIGURA 3.8

En la ec. (12),  $f$  es el factor de forma de la sección.

La curva resultante de aplicar las ecs. (11) y (12) a una sección H-típica se muestra en la Fig. 3.9, en la que están indicadas también las distribuciones de esfuerzos "a" a "e", correspondientes a los puntos señalados en la curva. Puede verse que la plastificación de los patines se produce muy rápidamente y que la curva es gobernada principalmente por la ec. (3), que describe el comportamiento elástico de la sección, y la ec. (12), que corresponde a la plastificación progresiva del alma.

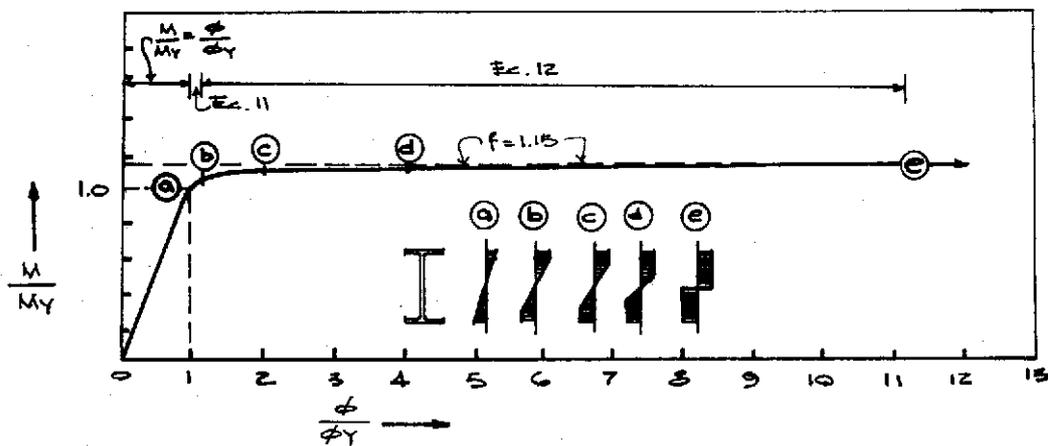


FIGURA 3.9

El factor de forma es mucho menor que el del rectángulo, debido a que la mayor parte del área está concentrada lejos del eje neutro, por lo que el momento plástico  $M_p$  se alcanza muy poco después de que se inicie la plastificación de la sección. (El valor promedio de  $f$  para perfiles H e I es 1.14 y 1.18, respectivamente.)

### 3.6 ARTICULACION PLASTICA.

Supongamos que el factor de forma de una sección dada fuese igual a la unidad, es decir que el esfuerzo  $F_y$  se alcanzase simultáneamente en todos los puntos de la sección (éste sería el caso de una viga I idealizada, en la que supusiésemos despreciable el efecto del alma y considerásemos concentrada toda el área en dos patines de espesor infinitamente pequeño); en ese caso, la curva  $M-\phi$  sería la dibujada con línea llena en la Fig. 3.10, formada por dos tramos de recta.

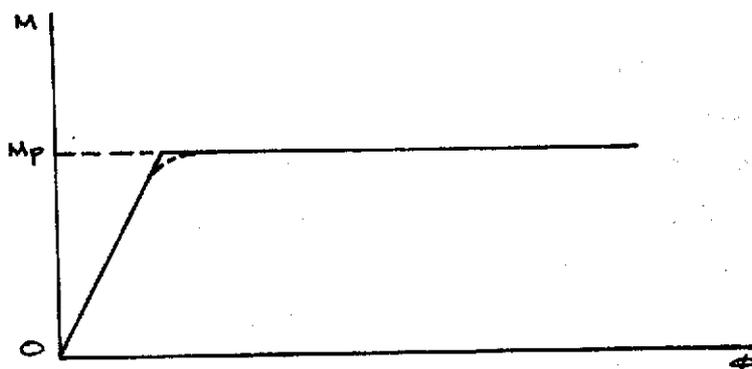


FIGURA 3.10

De acuerdo con esta curva, la viga se comporta elásticamente mientras  $M$  es menor que  $M_p$ , y se plastifica instantáneamente al alcanzar el momento flexionante el valor  $M_p$ ; a partir de este instante, todas las fibras que componen la viga se encuentran plastificadas, de manera que pueden deformarse libremente sin incremento de carga, acortándose o alargándose; por consiguiente, en la sección considerada se presenta una discontinuidad angular, característica de una articulación, pero no con momento flexionante nulo, como en las articulaciones reales, sino con un momento constante, igual a  $M_p$ ; si el resto de la estructura no lo impide, la curvatura en la sección en estudio crecerá rápidamente, tendiendo a  $\infty$  como límite, y conservándose constante el momento.

En realidad, los patines se plastifican progresivamente y el alma tiene una ligera influencia en la relación momento-curvatura, de manera que entre las dos rectas aparece una pequeña curva de transición, indicada con línea punteada en la Fig. 3.10. Sin embargo, el error que se comete al sustituir la curva real por los dos tramos de recta es muy pequeño y lleva a resultados que concuerdan muy aceptablemente con los obtenidos experimentalmente.

Por consiguiente, cuando en una sección transversal de una pieza sometida a flexión el momento alcanza el valor  $M_p$ , decimos que en esa sección se forma una articulación plástica, caracterizada porque puede admitir rotaciones indefinidas mientras el momento flexionante se mantiene constante en ella, e igual a  $M_p$  (ver Fig. 3.11).

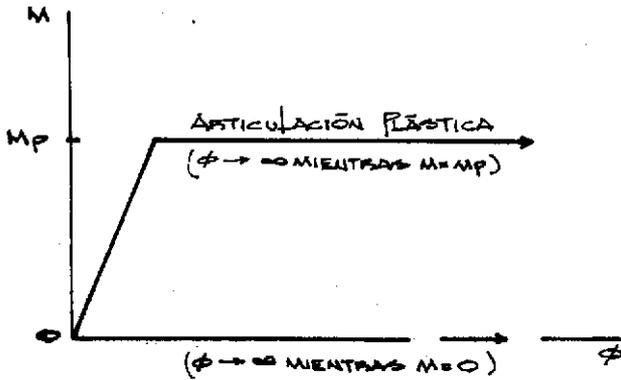


FIGURA 3.11

De acuerdo con la curva --  
 $M-\phi$  idealizada (Fig. 3.11) --  
 las articulaciones plásticas  
 se forman en puntos discretos  
 en los que se presenta toda --  
 la rotación plástica. No es --  
 ésto, sin embargo, cierto, ya  
 que en realidad las grandes --  
 curvaturas características de  
 una articulación plástica apa-  
 recen en un tramo de cierta --

longitud de la pieza flexionada, cuyas dimensiones dependen de la forma de la sección transversal y de la ley de variación del momento flexionante a lo largo de la pieza.

Consideremos una viga libremente apoyada, con una carga concentrada en el centro del claro (Fig. 3.12).

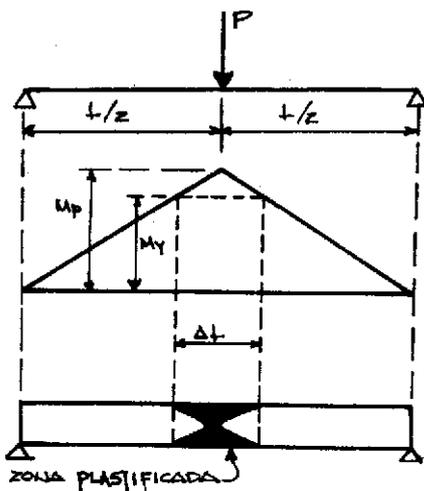


FIGURA 3.12

Cuando el momento bajo la carga --  
 alcance el valor  $M_p$ , la sección cen-  
 tral de la viga se encontrará total-  
 mente plastificada, pero tendremos u-  
 na zona adyacente a ella con la que  
 las secciones transversales estarán  
 plastificadas parcialmente: toda a--  
 aquella región en la que el momento --  
 flexionante sea mayor que  $M_y$ .

Tratemos de determinar la ampli-  
 tud  $\Delta L$  de esa región. Del diagrama --  
 de momentos vemos que:

$$\frac{M_p}{L/2} = \frac{M_y}{L/2 - \Delta L/2}$$

De donde:  $\Delta L = \frac{M_p - M_y}{M_p} L = (1 - \frac{M_y}{M_p}) L = (1 - \frac{1}{f}) L$  y  $\Delta L = \frac{f-1}{f} L$

La amplitud de la zona parcialmente plastificada depende del factor --  
 de forma, es decir, de las características geométricas de la sección ---  
 transversal de la viga.

Para una sección transversal rectangular:

$$f = 1.50 \quad \text{y} \quad \Delta L = \frac{1.5 - 1.0}{1.5} L = 0.33 L$$

Para una sección I o H:

$$f = 1.14 \quad \text{y} \quad \Delta L = \frac{1.14 - 1.00}{1.14} L = 0.123 L$$

Si el factor de forma valiese 1.0, la amplitud de la articulación sería nula, y ésta se formaría en un punto del eje de la viga; cuanto mayor es el factor de forma, más amplia es la zona de formación de la articulación, aunque esa amplitud depende también de la ley de variación del momento flexionante, puesto que abarca todo el tramo de la viga en que el momento es mayor que  $M_y$ .

### 3.7 SECCIONES TRANSVERSALES DE DISTINTAS FORMAS.

Hemos visto con anterioridad que el momento flexionante resistente máximo de un miembro flexionado es su momento plástico  $M_p$ , el cual corresponde a la plastificación total de la pieza; se obtiene multiplicando el esfuerzo  $F_y$  por un número, que depende de la geometría de la sección, al que hemos llamado módulo de sección plástico,  $Z$ .

Veamos cual es el valor de  $Z$  para una sección de forma cualquiera (-- Fig. 3.13).

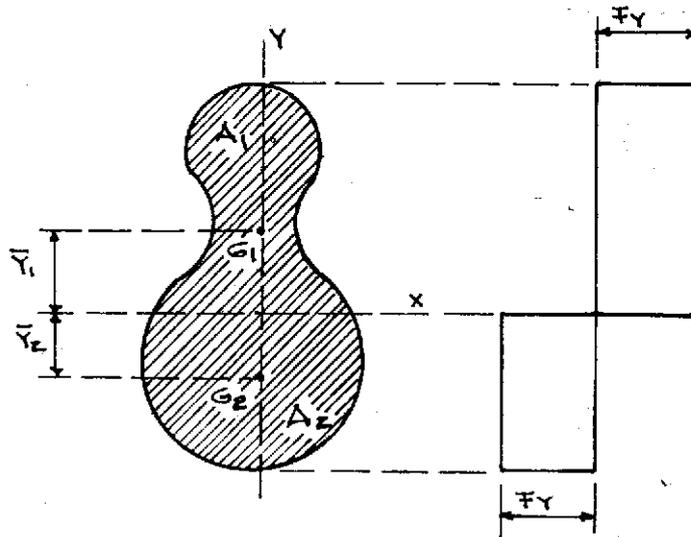


FIGURA 3.13

Puesto que la viga está sometida a flexión pura, es necesario, por equilibrio, que los dos volúmenes de esfuerzos, de tensión y compresión, sean iguales durante todas las etapas del proceso de carga. Al plastificarse la sección íntegramente bajo la acción del momento  $M_p$ , el esfuerzo normal alcanza el valor  $F_y$  en todos los puntos, de manera que para que se cumpla la condición de igualdad de volúmenes de esfuerzos es necesario que el eje neutro divida la sección en dos partes de áreas iguales ( $A_1=A_2$ ) y tendremos:

$$M_p = F_y (A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2) = F_y \left[ \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \right] \quad (13)$$

En esta ecuación,  $A$  es el área total de la sección transversal y  $\bar{y}_1$  y  $\bar{y}_2$  son las distancias de los centros de gravedad de las dos porciones al eje  $x$ , el que divide a la sección en dos partes de áreas iguales. (Evidentemente, si el eje  $x$  es un eje de simetría de la sección, el eje neutro plástico coincidirá con el elástico; en caso contrario, los dos ejes no coincidirán).

De la ec. (13) podemos escribir:

$$Z = (A/2)(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$$

Si el eje  $x$  es de simetría:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y} \quad \text{y} \quad Z = \frac{A}{2} 2\bar{y} = A\bar{y}$$

Por ejemplo, para el rectángulo:

$$A = bh, \quad \bar{y} = \frac{h}{4} \quad \text{y} \quad Z = \frac{bh^2}{4}$$

A la relación entre los módulos de sección plástico y elástico,  $Z/S$ , que es igual al cociente  $M_p/M_y$ , la hemos llamado factor de forma,  $f$ . Evidentemente, el valor de éste dependerá de la magnitud en que sea necesario incrementar el momento  $M_y$  para llegar a  $M_p$ ; por consiguiente,  $f$  será grande para secciones que tengan mucho material cerca del eje neutro (— por ejemplo, el círculo) y pequeño cuando la mayor parte esté concentrada lejos de él (una vigueta I), ya que en el primer caso será necesario un incremento considerable del momento a partir de la aparición del esfuerzo  $F_y$  y hasta plastificar totalmente la sección, mientras que en el segundo caso el incremento será mucho menor.

En la Fig. 3.14 se muestran las gráficas  $M-\phi$  para varias secciones -- transversales y se indican los factores de forma correspondientes.

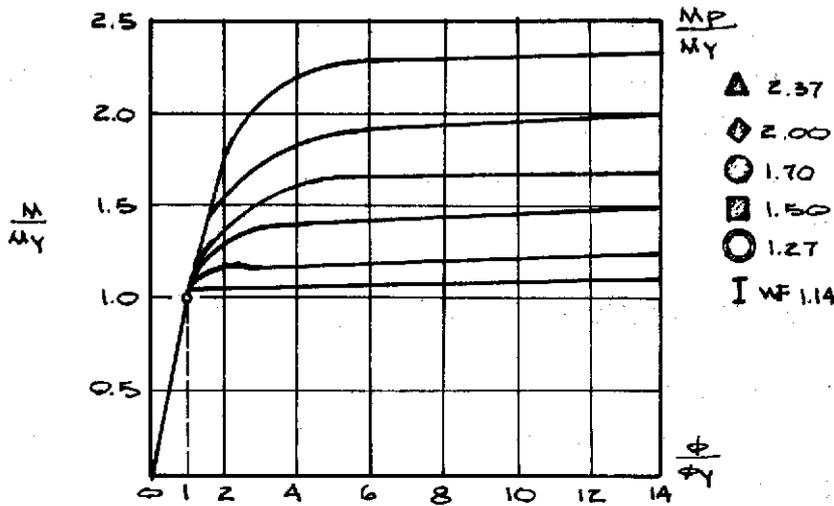


FIGURA 3.14

4

FACTORES QUE AFECTAN LA RESISTENCIA A LA FLEXION Y LA CAPACIDAD DE FORMACION DE ARTICULACIONES PLASTICAS

4.1 ASPECTOS GENERALES.

Mencionaremos a continuación algunos de los factores más importantes que influyen en la capacidad de los miembros de acero estructural para desarrollar el momento plástico teórico  $M_p$  y para conservarlo durante -- las rotaciones correspondientes a la formación de una articulación plástica.

4.2 PROPIEDADES DEL MATERIAL.

Evidentemente, puesto que  $M_p = F_y Z$ , cualquier variación en el esfuerzo de fluencia del acero modificará el valor del momento plástico  $M_p$ . El valor del esfuerzo  $F_y$  es afectado considerablemente por varios factores, -- tales como el grueso del material, el punto de la sección transversal de donde se extrae el acero para la probeta de ensayo, la velocidad de de--

formación utilizada en la prueba, la historia previa de carga y deformación del material, etc. Sin embargo, a través de numerosas experiencias se ha encontrado que los valores mínimos especificados por la A.S.T.M. - para el esfuerzo de fluencia son adecuados para el diseño. (Así, para el acero A36 se tomará  $F_y=2530 \text{ Kg/cm}^2=36000 \text{ Lb/plg}^2$ ).

(Por muchos años el acero estructural utilizado en la construcción de edificios había sido el A7, con  $F_y=2320 \text{ Kg/cm}^2$ , pero en la actualidad éste ya no es el acero estructural básico; existen seis tipos nuevos de aceros estructurales, pero el más comúnmente utilizado es el ASTM A36, -- que permite el uso de miembros de menor tamaño y por consiguiente se logran estructuras más ligeras).

Otra propiedad fundamental del acero es su ductilidad, necesaria para que se puedan admitir grandes deformaciones características de las articulaciones plásticas. Bajo ciertas condiciones de carga y temperatura, - el acero puede perder su ductilidad y fallar en forma frágil, por lo que deben tomarse en cuenta todas las precauciones posibles para evitar este tipo de falla, y no diseñar plásticamente si no es posible evitarlo.

El límite de proporcionalidad no tiene importancia práctica en la flexión plástica, pues si bien reduce el valor de  $M_y$ , no tiene efecto en el momento plástico.

#### 4.3 ESFUERZOS RESIDUALES.

Después de la laminación de un perfil, la región central del alma y - los extremos de los patines se enfrían más rápidamente que las zonas de unión del alma y patines, ashuradas en la Fig. 4.1.

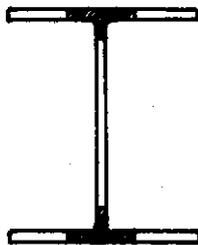


FIGURA 4.1

Cuando la temperatura ha descendido lo suficiente para que el metal deje de ser pastoso la diferencia de temperaturas entre las zonas ashuradas y las no ashuradas da lugar a una diferencia en las dilataciones de las fibras correspondientes, ya que las zonas que se enfrían primero, y que se contraen libremente, no permiten después la contracción libre de las regiones ashuradas.

Es evidente que cuando el perfil se haya enfriado por completo las zo

nas que se enfriaron primero quedarán en un estado de compresión residual, mientras que las últimas en enfriarse quedarán sometidas a esfuerzos residuales de tensión.

El doblado en frío de los perfiles y la soldadura ocasionan también esfuerzos residuales que, a veces, pueden ser tan importantes como los debidos al enfriamiento no uniforme después del laminado.

Los esfuerzos residuales reducen el límite de proporcionalidad en compresión axial y en flexión, por lo que tienen una gran importancia en el comportamiento de perfiles de acero sometidos a condiciones de carga que originen problemas de inestabilidad elástica, pero no cambien el valor del momento plástico; por consiguiente, no ocasionan ningún efecto sobre la carga de colapso, aunque sí tienden a incrementar las deformaciones.

Para estudiar la influencia de los esfuerzos residuales sobre la curva  $M-\phi$  y sobre el momento plástico de las vigas laminadas, consideremos la viga I idealizada de la Fig. 4.2, en la que hemos supuesto que todo el material está concentrado en los patines; además, supongamos que la distribución de esfuerzos residuales es la mostrada en la Fig. 4.2b, distribución que corresponde, desde luego, a un estado de equilibrio interno.

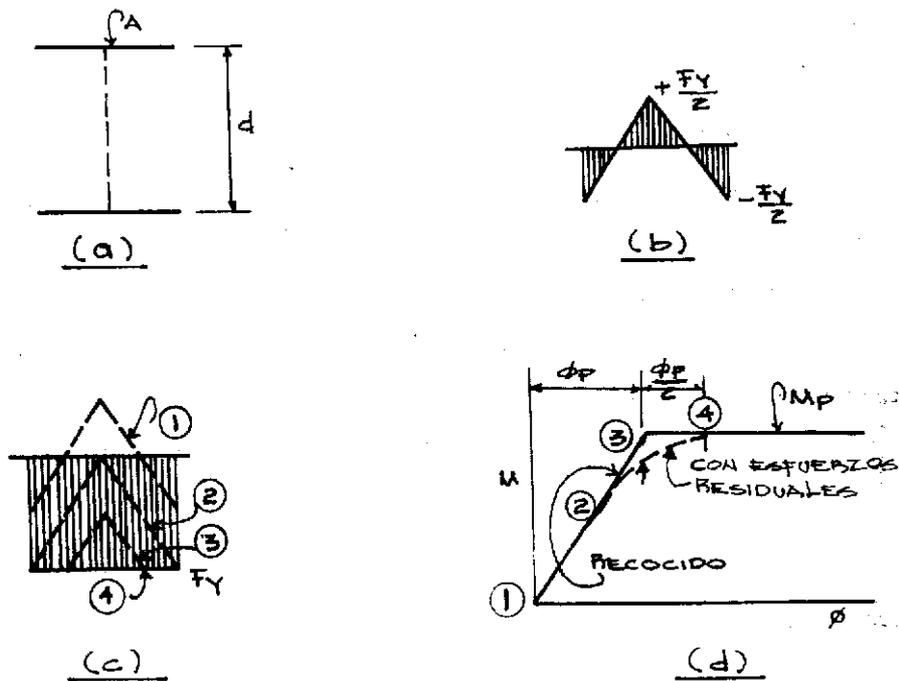


FIGURA 4.2

El momento plástico resistente teórico de la viga vale  $A F_y d$ , siendo  $A$  el área de cada patín, y se alcanza cuando los patines están totalmente plastificados.

Veamos que sucede al superponer a los esfuerzos mostrados en la Fig. 4.2b una distribución de esfuerzos uniforme, debida a la flexión; consideremos el caso en que estos esfuerzos uniformes son de compresión.

Evidentemente, durante las primeras etapas del proceso de carga los esfuerzos de tensión de la zona central irán disminuyendo al mismo tiempo que aumentan los de compresión en los extremos del patín, hasta que éstos alcanzan el valor del límite de fluencia,  $F_y$ ; en ese instante, en el punto medio del patín el esfuerzo será nulo (etapa 2, Fig. 4.2c).

Al seguir aumentando el momento, las fibras extremas, en estado plástico, se deformarán bajo carga constante, de manera que todo el incremento de carga será tomado por la zona central, aún elástica, hasta que el esfuerzo normal alcance el valor  $F_y$  en todo el patín (etapa 4, Fig. 4.2c), lo que sucede cuando el momento aplicado a la sección alcanza el valor  $M_p$ .

En efecto, para llegar a la etapa 4 han sido necesarios esfuerzos menores que  $F_y$  en los extremos de los patines, que desde un principio estaban sometidos a compresiones residuales, pero en cambio en la zona central se han aplicado esfuerzos totales mayores que  $F_y$ , ya que existían originalmente tensiones; puesto que los esfuerzos residuales estaban en equilibrio, la fuerza necesaria para lograr la plastificación total de cada patín ha sido la misma que si los esfuerzos residuales no existiesen, es decir,  $A F_y$ , y el momento total aplicado a la sección es  $A F_y d = M_p$ .

La relación  $M-\theta$  se modifica como se muestra con línea punteada en la Fig. 4.2d, lo que da lugar a un incremento en las rotaciones de la sección, el que, sin embargo, es despreciable cuando se le compara con las importantes rotaciones que se presentan en las articulaciones plásticas.

#### 4.4 CONCENTRACION DE ESFUERZOS.

Las concentraciones de esfuerzos ocasionan efectos semejantes a los debidos a esfuerzos residuales. Debido a la distribución no uniforme de esfuerzos, el flujo plástico se presenta en algunos puntos antes que en otros, pero el elemento completo soportará la misma carga de plastifica-

ción total que otro elemento semejante sin esas concentraciones.

Cuando las concentraciones de esfuerzos se deban a agujeros hechos en los patines, puede ignorarse la disminución en el área de la sección para reducciones hasta de 15% del área inicial, pues el endurecimiento por deformación equilibra la pérdida de área. Si las disminuciones son mayores, los cálculos se basarán en el área neta.

#### 4.5 ENDURECIMIENTO POR DEFORMACION.

Este fenómeno, que se presenta cuando el acero se deforma más allá de la zona plástica (unas quince veces más que la deformación elástica), ocasiona un aumento en el momento resistente de la sección, el que se vuelve mayor que  $M_p$ , ya que aparecen esfuerzos mayores que  $F_y$ . Sin embargo, el tenerlo en cuenta da lugar a considerables complicaciones en el cálculo de cargas últimas y deformaciones, por lo que en la teoría plástica simple se desprecia, dejándolo como un margen de seguridad.

#### 4.6 FUERZA NORMAL, FUERZA DE CORTE, PANDEO LOCAL Y LATERAL.

Todos estos fenómenos tienden a disminuir el momento plástico resistente y la capacidad de carga última de las estructuras, pero no los consideraremos en la teoría plástica simple. Más adelante veremos como tenerlos en cuenta en el diseño.

### 5

#### DETERMINACION DE LA CARGA DE COLAPSO PLASTICO EN ALGUNAS ESTRUCTURAS SENCILLAS

##### 5.1 ASPECTOS GENERALES.

El objeto de la teoría plástica es el cálculo de las cargas de colapso, bajo la acción de las cuales las deformaciones de las estructuras continúan aumentando sin incrementos adicionales de carga, debido a la formación de un número suficiente de zonas plastificadas.

Efectivamente, de acuerdo con lo que hemos visto, cuando el momento flexionante en una sección transversal de una barra alcanza el valor  $M_p$

correspondiente a la sección de que se trate, aparece en ella una articulación plástica, caracterizada porque puede admitir giros ilimitados, -- conservándose el momento  $M_p$  constante. La magnitud de esas rotaciones es función de las restricciones que el resto de la estructura impone sobre la sección, restricciones que desaparecerán cuando se haya formado un número de articulaciones plásticas suficiente para que toda la estructura, o una parte de ella, que contenga a la sección en estudio, se convierta en un mecanismo, el cual no será capaz de equilibrar a las cargas exteriores y, por consiguiente, experimentará deformaciones crecientes mientras aquellas permanecen constantes.

Si la estructura es isostática, una viga libremente apoyada, por ejemplo, el colapso se presenta tan pronto como se forma la primera articulación plástica, ya que la supresión de una restricción interna cualquiera es suficiente para transformar una estructura isostática en un mecanismo.

En cambio, una estructura hiperestática no falla, en general, cuando se forma la primera articulación plástica (ésta aparece en la sección de momento flexionante máximo en el rango elástico), ya que esa articulación no es suficiente para permitir un movimiento de mecanismo; la estructura sigue siendo estable y, por consiguiente, puede soportar incrementos adicionales de carga, durante los cuales se producen rotaciones en la articulación plástica mientras que el momento flexionante en ella se mantiene constante e igual a  $M_p$ .

A diferencia de lo que ocurre en la estructura isostática, las rotaciones en la primera articulación plástica de una estructura hiperestática, correspondientes a incrementos posteriores de la carga, no son ilimitadas, sino su valor está controlado por las restricciones que el resto de la estructura impone sobre ella; estamos en un estado de flujo plástico restringido.

Al seguir aumentando las cargas llegará un instante en que el momento flexionante alcanzará el valor  $M_p$  en otra sección, en la que se formará una segunda articulación plástica; el colapso se presentará entonces si el efecto combinado de las dos articulaciones convierte a la estructura, o a una parte de ella, en un mecanismo. En caso contrario, podrán aumentarse las cargas aún más, mientras que se presenten rotaciones en ambas articulaciones.

Finalmente, el proceso de formación y rotación de una serie de articu

laciones plásticas, bajo carga creciente, terminará cuando se haya formado un número de articulaciones suficiente para convertir a la estructura (o a una parte de ella) en un mecanismo; en ese instante la estructura será incapaz de admitir nuevas cargas, y sus deformaciones irán en aumento bajo carga constante.

Evidentemente, siempre será posible determinar la carga de colapso de una estructura aplicándole incrementos sucesivos de carga y siguiendo paso a paso la formación de las articulaciones plásticas necesarias para que se convierta en un mecanismo; sin embargo, este método es excesivamente laborioso, aún para estructuras poco complicadas, por lo que su utilidad práctica es casi nula.

Afortunadamente existen métodos que permiten calcular la carga plástica de colapso y determinar el mecanismo correspondiente, para una estructura y un sistema de carga dados, en forma directa, sin tener en cuenta la secuencia de formación de las articulaciones plásticas; de hecho, la simplicidad de los métodos de análisis plástico se debe a que pueden efectuarse cálculos directos de esa naturaleza.

Sin embargo, un estudio detallado del proceso de formación sucesiva de las articulaciones plásticas que participarán en el mecanismo de colapso de una estructura es un antecedente esencial para entender los métodos de análisis plástico propiamente dichos, por lo que estudiaremos a continuación el comportamiento de algunas estructuras sencillas, sometidas a la acción de cargas creciente.

Supondremos que cada una de las barras que componen las estructuras en consideración tiene una rigidez flexionante elástica constante  $EI$ , y que se comporta elásticamente hasta que el momento flexionante alcanza el valor  $M_p$ , es decir, es válida la curva  $M-\theta$  de la Fig. 3.11.

## 5.2 VIGA LIBREMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.

Consideremos una viga de sección transversal constante, de claro  $L$ , libremente apoyada y sometida a la acción de una carga uniformemente repartida cuya magnitud por unidad de longitud es  $w$  (Fig. 5.1a).

Si la intensidad de la carga  $w$  se incrementa lentamente, partiendo de cero, el comportamiento inicial de la viga es elástico; el diagrama de -

momentos flexionantes y la configuración del eje deformado de la viga se muestra en las Figs. 5.1b y 5.1c.

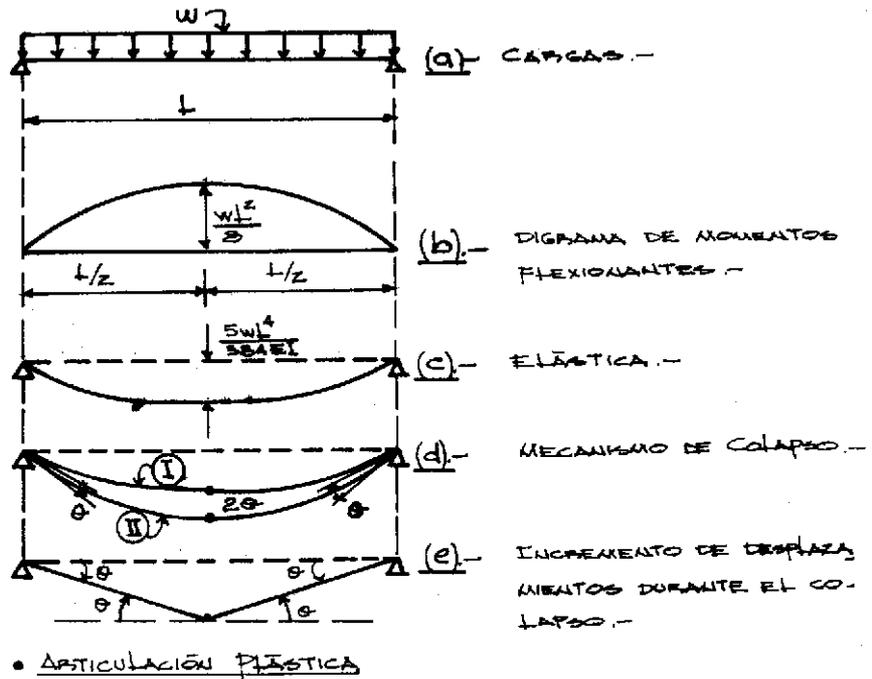


FIGURA 5.1

Eventualmente, para un cierto valor de la carga, el momento máximo en el centro del claro alcanza el valor  $M_p$  y se forma una articulación plástica en esa sección; la viga no puede admitir ningún incremento adicional de carga, ya que el momento flexionante no puede crecer más allá de  $M_p$ . Sin embargo, la articulación plástica puede experimentar una rotación ilimitada mientras que el momento flexionante y, por consiguiente, la carga, se mantienen constantes, de manera que los desplazamientos del eje de la viga pueden continuar aumentando bajo carga constante, condición que corresponde al colapso plástico.

Calculamos la carga de colapso plástico,  $w_c$ , igualando simplemente el momento flexionante máximo al momento plástico resistente de la viga:

$$\frac{w_c L^2}{8} = M_p \quad \therefore \quad w_c = \frac{8M_p}{L^2} \quad (14)$$

En el instante del colapso el momento flexionante es menor que  $M_p$  en todas las secciones, excepto en la central; por consiguiente, la viga permanece elástica en toda su longitud, a uno y otro lado de la articula

ción plástica, y puesto que las cargas y los momentos flexionantes permanecen constantes durante el colapso también deben mantenerse constantes las curvaturas de los dos tramos de la viga; el aumento de las deflexiones durante el colapso se debe sólo a la rotación en la articulación plástica central.

Este efecto se indica en la Fig. 5.1d: la curva I muestra el eje deformado de la viga en el instante en que la carga alcanza el valor de colapso, mientras que la curva II lo muestra después de que se ha producido una cierta deformación adicional bajo carga constante; por consiguiente, entre I y II la viga ha experimentado un movimiento de mecanismo, durante el cual no hay deformaciones en ella, sino únicamente rotaciones de sus dos tramos alrededor de los apoyos y de la articulación plástica, de manera que si de los desplazamientos correspondientes a la curva II restamos los de la I obtenemos los que corresponden al mecanismo de colapso, mostrados en la Fig. 5.1e (los dos tramos de la viga son líneas rectas en esta última figura).

Podremos decir que la Fig. 5.1e representa el mecanismo de colapso de la viga, puesto que en ella se muestran únicamente los aumentos de las deflexiones del eje, debidos exclusivamente a rotaciones en la articulación plástica central.

Si la viga que estamos estudiando se diseñase elásticamente, tendríamos:

$$M_{\max} = \frac{WtL^2}{8} = SFt \quad \therefore \quad Wt = \frac{8SFt}{L^2}$$

Siendo  $Wt$  y  $Ft$  la carga y el esfuerzo de trabajo.

Puesto que la carga máxima que puede soportar la viga es la dada por la ec. (14), el coeficiente de seguridad real, respecto al colapso, de una viga libremente apoyada con carga uniforme, diseñada elásticamente, es:

$$F.S. = \frac{Wc}{Wt} = \frac{8Mp/L^2}{8SFt/L^2} = \frac{8ZFy/L^2}{8SFt/L^2} = \frac{ZFy}{SFt} = 1.81 f$$

El 1.81 se obtiene utilizando el valor de  $Ft$  usual en acero.

Comparando este resultado con el obtenido al estudiar el comportamiento de una barra a tensión vemos que el coeficiente de seguridad es el mismo en ambos casos, con la excepción del factor de forma  $f$  que aparece en la viga. De hecho, el coeficiente de seguridad real de una es---

estructura isostática sometida a flexión y diseñada elásticamente es siempre igual a  $(F_y/F_y)f$ .

El cálculo de la flecha en el centro de la viga en el instante del colapso (antes de que se presenten rotaciones en la articulación plástica) es sencillo; en efecto, puesto que hasta ese momento la viga se comporta elásticamente, su valor será simplemente:

$$\delta_0 = \frac{5W_0L^4}{384EI} = \frac{5}{384} \frac{8M_p}{L^2} \frac{L^4}{EI} = \frac{5M_pL^2}{48EI}$$

El comportamiento de la viga se muestra en el diagrama de la Fig. 5.2, que relaciona la carga con la flecha en el centro del claro. OA representa el comportamiento en el rango elástico, y AB el colapso plástico bajo carga constante.

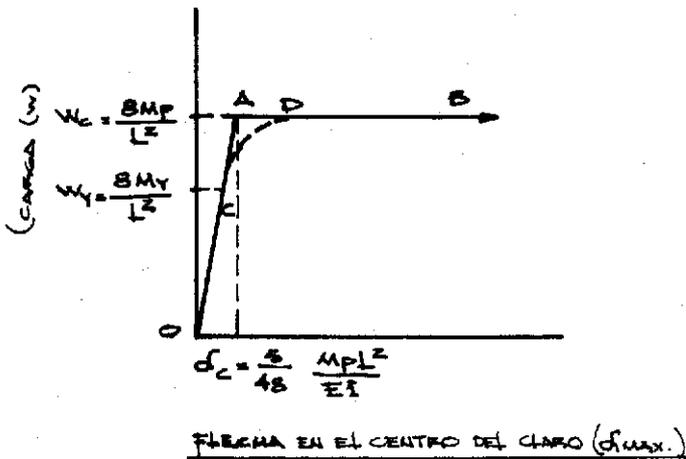


FIGURA 5.2

Cuando las deflexiones son muy grandes, la carga puede ser soportada parcialmente por tensión directa en las dos mitades de la viga (suponiendo que los apoyos sean capaces de equilibrar las reacciones correspondientes); sin embargo, efectos de este tipo no deben tenerse en cuenta en el diseño, ya que no serían apreciables en la práctica más que cuando las deformaciones fuesen excesivas.

La línea curva punteada CD muestra, en forma cualitativa, la gráfica carga-flecha máxima real, correspondiente a la curva  $M-\phi$  no idealizada de la Fig. 3.10. En efecto, como el momento  $M_y$  es menor que  $M_p$ , el comportamiento elástico cesa cuando el momento en el centro del claro alcanza el valor  $M_y$ , lo que corresponde a una carga que vale  $W_y = 8M_y/L^2$ . Para este valor de la carga aparece por primera vez el esfuerzo de fluencia  $F_y$ , en las fibras de la sección transversal más alejadas del eje neutro. Al seguir aumentando la carga, el flujo plástico se extiende hacia dentro en la sección central y también hacia los lados de ésta, a lo largo de la viga, al alcanzar los momentos el valor  $M_y$  en secciones a alguna

distancia del centro. La flecha central crece más rápidamente por incremento unitario de carga, hasta que finalmente aparece el momento  $M_p$  en el centro de la viga con el mismo valor de  $W$  que antes, y la viga falla.

Vemos, entonces, que podemos basar nuestros cálculos en la curva  $M-\theta$  ideal, ya que el valor de la carga de colapso no se afecta por ello, en cambio, las deflexiones anteriores al colapso sí dependen de la forma de la curva  $M-\theta$  que se adopte.

Puesto que basta con la aparición de una articulación plástica para que una estructura isostática se convierta en un mecanismo, es evidente que la carga de colapso de cualquier estructura estáticamente determinada puede obtenerse construyendo su diagrama de momentos flexionantes e igualando el momento máximo a  $M_p$ . Este procedimiento está basado esencialmente en consideraciones de estática.

Las cargas de colapso plástico pueden calcularse también utilizando un procedimiento sinemático: durante el colapso no hay cambio en la energía elástica de deformación almacenada en la viga, puesto que la distribución de momentos flexionantes permanece inalterada. Entonces, el trabajo hecho por las cargas exteriores durante un pequeño movimiento del mecanismo de colapso debe ser igual al trabajo absorbido en las articulaciones plásticas, es decir, al realizado por los momentos  $M_p$  que existen en las secciones en que aparecen esas articulaciones.

En nuestro caso, observando el movimiento del mecanismo indicado en la Fig. 5.1e, vemos que la fuerza exterior realiza un trabajo que vale  $(1/2)W_c L \theta / 2 = W_c L^2 \theta / 4$ , mientras que el trabajo absorbido en la articulación plástica es  $2M_p \theta$ , ya que la rotación en ella es  $2\theta$  y el momento  $M_p$ . Igualando los dos trabajos, obtenemos:

$$\frac{W_c L^2 \theta}{4} = 2M_p \theta \quad \therefore \quad W_c = \frac{8M_p}{L^2}$$

Resultado que concuerda con el dado por la ec. (14).

### 5.3 VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.

Estudiaremos ahora el comportamiento de una viga de sección transversal constante, de claro  $L$ , empotrada en sus dos extremos y sometida a la acción de una carga uniformemente repartida de magnitud  $W$ , por unidad de

longitud (Fig. 5.3a).

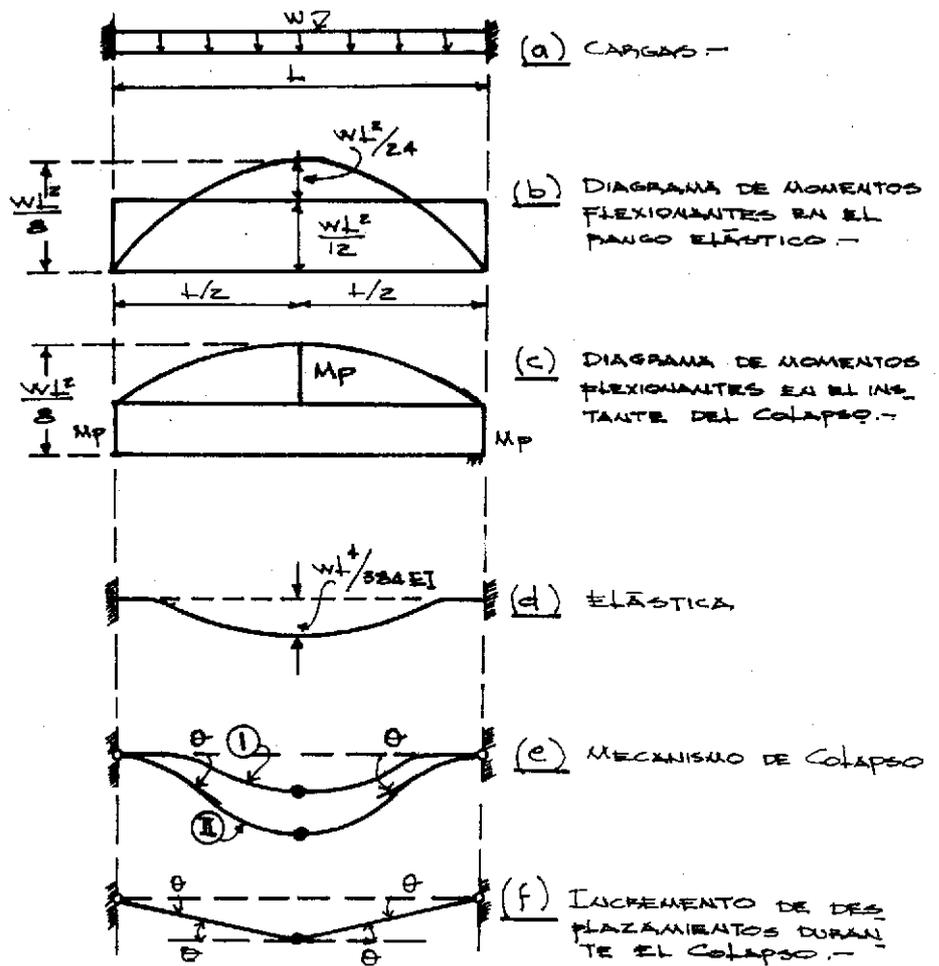


FIGURA 5.3

Este problema difiere del anterior en que la viga libremente apoyada es isostática mientras que ésta es hiperestática de primer grado.

Si la intensidad de la carga crece lentamente, partiendo de cero, el comportamiento inicial de la viga es elástico; en las Figs. 5.3b y 5.3d se muestran el diagrama de momentos y el eje deformado de la pieza correspondientes a esta primera etapa del proceso de carga.

Observando el diagrama de la Fig. 5.3b vemos que los momentos elásticos máximos se presentan en los extremos de la viga; por consiguiente, esas serán las secciones en las que aparecerá primero el momento  $M_p$ , cuando la carga exterior alcance el valor dado por la ecuación:

$$\frac{w_1 L^2}{12} = M_p \quad \therefore \quad w_1 = \frac{12 M_p}{L^2}$$

Al alcanzar la carga exterior el valor  $W_t$  se forman articulaciones plásticas en los extremos de la viga, capaces de admitir rotaciones ilimitadas bajo momento constante,  $M_p$ . Sin embargo, y a diferencia de lo que sucede en la viga libremente apoyada, la aparición de las primeras articulaciones plásticas no implica que la capacidad de carga de la viga doblemente empotrada esté agotada; al contrario, será capaz de aceptar nuevos incrementos de carga durante los cuales las articulaciones plásticas de los extremos girarán bajo momento constante, al mismo tiempo que se incrementa el valor del momento en el centro del claro. Esta segunda y última etapa del proceso de carga termina cuando también el momento en el centro del claro alcanza el valor  $M_p$ , ya que en ese instante se forma una tercera articulación plástica y la viga se convierte en un mecanismo, incapaz de admitir nuevas cargas.

Evidentemente, el comportamiento de la viga después de la formación de las articulaciones plásticas en sus extremos es el de una viga libremente apoyada, y el incremento de carga que es capaz de soportar es el necesario para hacer que el momento en el centro del claro suba de  $W_1 L^2/24$  a  $W_1 L^2/12$ , es decir, de  $M_p/2$  a  $M_p$ . Por consiguiente, la carga correspondiente a la segunda etapa vale:

$$\frac{\Delta W L^2}{8} = \frac{M_p}{2} \quad \therefore \quad \Delta W = \frac{4M_p}{L^2}$$

Y la carga máxima que puede soportar la viga (correspondiente a la formación de la última articulación plástica) es:

$$W_c = W_1 + \Delta W = \frac{12M_p}{L^2} + \frac{4M_p}{L^2} = \frac{16M_p}{L^2} \quad (15)$$

En el instante del colapso toda la viga se encuentra en el rango elástico, excepto en las secciones en que se forman las articulaciones plásticas; por consiguiente, un movimiento de mecanismo consiste únicamente en una rotación de las dos mitades de la viga alrededor de las articulaciones plásticas, sin deformaciones, ya que los momentos flexionantes y, por tanto, las curvaturas, se mantienen constantes en toda la viga; este efecto se indica en las Figs. 5.3e y 5.3f: en la primera se muestra el eje de la pieza en el instante en que se forma la tercera articulación plástica, pero antes de que haya tenido ningún movimiento de mecanismo (I), y cuando ha experimentado un pequeño movimiento (II); en la segunda

se indican las diferencias entre los desplazamientos correspondientes a las curvas II y I, es decir, los desplazamientos que se presentan durante el colapso.

Obsérvese que el mecanismo de colapso, mostrado en la Fig. 5.3f, es semejante al de la viga libremente apoyada (Fig. 5.1e), con la diferencia de que los apoyos de ésta son articulaciones reales, mientras que en los extremos de la viga doblemente empotrada aparecen articulaciones --- plásticas.

Si diseñásemos elásticamente la viga doblemente empotrada, tendríamos:

$$M_{\max} = \frac{WtL^2}{12} = Sft \quad \therefore \quad Wt = \frac{12Sft}{L^2}$$

La carga máxima que puede soportar la viga está dada por la ec. (15); por consiguiente el coeficiente de seguridad real, respecto al colapso, de una viga doblemente empotrada y con carga uniforme diseñada elásticamente es:

$$F.S. = \frac{W_e}{Wt} = \frac{16M_p/L^2}{12Sft/L^2} = \frac{16ZF_y/L^2}{12Sft/L^2} = \frac{16ZF_y}{12Sft} = \frac{4}{3} 1.81f = 2.41f$$

Obsérvese que el coeficiente de seguridad real es 33% mayor que el de la viga libremente apoyada, situación análoga a la que encontramos al estudiar dos estructuras formadas por barras (isostática e hiperestática).

Este incremento en la capacidad de carga con respecto a la de las estructuras isostáticas es característico de la mayor parte de las estructuras hiperestáticas, y se debe a que los comportamientos de los dos tipos de estructuras son esencialmente diferentes.

En efecto, mientras que la capacidad de carga de la viga libremente apoyada se agota en el instante mismo en que aparece el momento plástico  $M_p$  en una de sus secciones, la plastificación de las secciones extremas no ocasiona la falla de la viga doblemente empotrada, sino produce una redistribución de momentos flexionantes en la viga, durante la cual las secciones menos solicitadas acuden en auxilio de las más cargadas. Este fenómeno, característico de los sistemas hiperestáticos, dá lugar a que éstos posean una reserva de resistencia que puede ser explotada gracias a la ductilidad del acero.

El valor de la flecha existente en el centro de la viga cuando aparecen las articulaciones plásticas en sus extremos puede calcularse fácil-

mente, aplicando la fórmula elástica para una viga empotrada:

$$\delta_1 = \frac{W_1 L^4}{384EI} = \frac{12M_p}{L^2} \frac{L^4}{384EI} = \frac{M_p L^2}{32EI}$$

Desde este instante, y hasta la formación de la última articulación plástica, el comportamiento de la viga sigue siendo elástico, pero con libertad de giros en sus extremos; entonces, el aumento de la flecha en el centro del claro durante esta segunda etapa del proceso de carga lo obtenemos con la fórmula para una viga libremente apoyada:

$$\Delta\delta = \frac{5(W)L^4}{384EI} = \frac{5L^4}{384EI} \frac{4M_p}{L^2} = \frac{5M_p L^2}{96EI}$$

La flecha total en el punto medio del claro vale para el colapso:

$$\delta_c = \delta_1 + \Delta\delta = \frac{M_p L^2}{32EI} + \frac{5M_p L^2}{96EI} = \frac{M_p L^2}{EI} \left( \frac{3 + 5}{96} \right) = \frac{M_p L^2}{12EI}$$

En el diagrama de la Fig. 5.4 está representada la gráfica carga-flecha máxima.

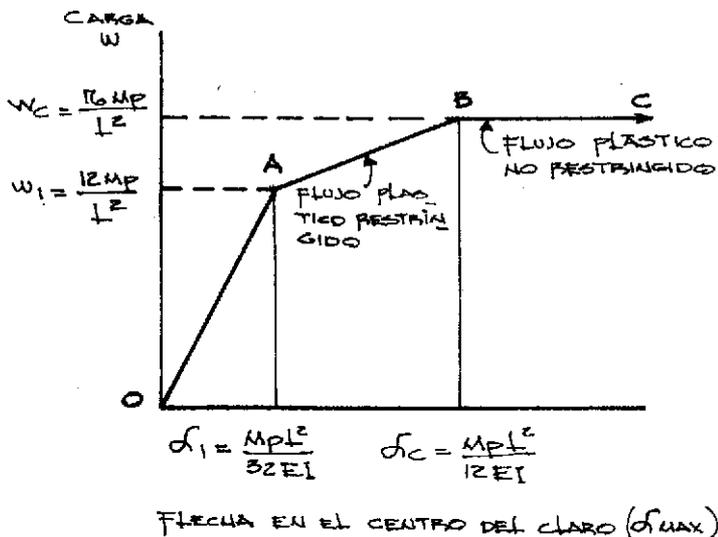


FIGURA 5.4

tringido, durante el cual las rotaciones en las articulaciones plásticas se incrementan bajo carga constante, ya que la viga se ha convertido en un mecanismo.

Lo mismo que en el caso de la viga libremente apoyada, la carga de colapso de la doblemente empotrada puede calcularse en forma directa, em--

El tramo OA corresponde al rango de comportamiento elástico; en A aparecen las articulaciones plásticas de los extremos, y se presenta un flujo plástico restringido (tramo AB del diagrama) durante el cual esas articulaciones plásticas no pueden girar libremente, pues se lo impide el resto de la viga; en B aparece la articulación plástica central, y a partir de ese punto empieza el rango de flujo plástico no restringido.

pleando uno cualquiera de los dos métodos posibles, basados en consideraciones estáticas y cinemáticas.

El método estático es evidente de la observación del diagrama de momentos de la Fig. 5.3c; puesto que los momentos en los extremos y en el centro del claro valen  $M_p$ , deberá cumplirse la condición:

$$\frac{W_0 L^2}{8} = 2M_p \quad \therefore \quad W_0 = \frac{16M_p}{L^2}$$

Para calcular la carga de colapso por el método cinemático, igualamos el trabajo realizado por las cargas exteriores con el absorbido en las articulaciones plásticas durante un pequeño movimiento del mecanismo de colapso (Fig. 5.3f):

$$\frac{1}{2} W_0 L \theta \frac{L}{2} = 4M_p \theta \quad \therefore \quad W_0 = \frac{16M_p}{L^2}$$

El trabajo absorbido en las articulaciones plásticas es siempre positivo, independientemente del signo de las rotaciones, ya que éstas siempre tienen el mismo sentido que los momentos que las ocasionan.

#### 5.4 VIGA DOBLEMENTE EMPOTRADA CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO.

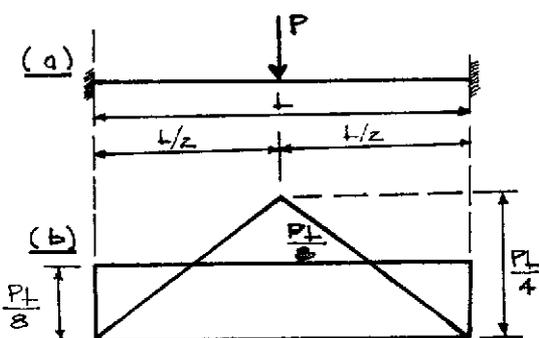
Hemos visto que el coeficiente de seguridad real de la viga empotrada en los dos extremos es mayor que el de la libremente apoyada, debido a que la redistribución de momentos correspondiente a la formación sucesiva de una serie de articulaciones plásticas la capacita para tomar cargas adicionales después de la aparición de la primera articulación, lo que no sucede en el caso de estructuras isostáticas.

Esta propiedad es característica de la mayoría de las estructuras hiperestáticas; sin embargo, hay casos en que no se cumple: cuando la geometría de la estructura, sus condiciones de apoyo y las cargas que obran sobre ella son tales que todas las articulaciones necesarias para convertir a la estructura en un mecanismo aparecen simultáneamente.

Un ejemplo típico de este comportamiento es el de una viga de sección transversal constante, empotrada en ambos extremos, sujeta a la acción de una carga concentrada en su punto medio (Fig. 5.5).

La distribución elástica de momentos es la mostrada en la Fig. 5.5b; puede verse que los momentos en los extremos y en el centro del claro --

son numéricamente iguales. Por consiguiente, el colapso se presentará -- cuando los momentos en esas tres secciones igualen en intensidad al momento plástico resistente de la viga, ya que, en ese instante se formarán tres articulaciones plásticas simultáneamente, y la viga se convertirá en un mecanismo. La carga de colapso vale:



$$\frac{PcL}{8} = M_p \quad \therefore Pc = \frac{8M_p}{L}$$

Diseñando la viga elásticamente, en contraríamos el valor siguiente para la carga de trabajo:

$$M_{max} = \frac{PtL}{8} = Sft \quad \therefore Pt = \frac{8Sft}{L}$$

Por consiguiente, el coeficiente de seguridad real vale:

FIGURA 5.5

$$F.S. = \frac{Pc}{Pt} = \frac{8M_p/L}{8Sft/L} = \frac{8ZF_y/L}{8Sft/L} = \frac{ZF_y}{Sft} = 1.81f$$

Igual que en las estructuras isostáticas.

### 5.5 MARCO RIGIDO RECTANGULAR DOBLEMENTE EMPOTRADO.

En la Fig. 5.6 se muestran las dimensiones y cargas del marco rígido que vamos a estudiar a continuación.

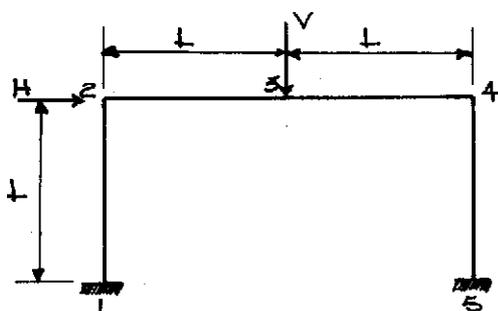


FIGURA 5.6

Todas las barras que forman el marco tienen la misma sección transversal y -- son del mismo material, y suponemos válida la relación idealizada entre momento y curvatura mostrada en la Fig. 3.10. -- Las dos columnas están empotradas en sus bases y las conexiones entre ellas y el cabezal, en los puntos 2 y 4, son rígidas. El marco es hiperestático de tercer grado, puesto que en cada apoyo existen

tres cantidades desconocidas, dos fuerzas y un par, o sea seis en total, y contamos con tres ecuaciones de equilibrio de estática; por consiguiente, su grado de hiperestaticidad exterior es tres, equivalente al grado

de hiperestaticidad total, ya que se trata de un marco abierto.

En primer lugar supondremos que las fuerzas horizontal y vertical, H y V, respectivamente, permanecen iguales entre sí durante todo el proceso de carga, mientras su intensidad crece lentamente hasta que se produce el colapso del marco; en este caso podremos, por consiguiente, hacer  $H=V=P$ .

Los momentos flexionantes varían linealmente a lo largo de los cuatro segmentos rectos y libres de cargas exteriores que componen el marco, -- 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5, puesto que la fuerza cortante a lo largo de cada uno de ellos es constante; por consiguiente, basta con conocer los valores de los momentos flexionantes en las cinco secciones numeradas de 1 a 5 en la Fig. 5.6 para que la distribución de momentos quede determinada en todo el marco. Además, sólo pueden presentarse valores máximos del momento flexionante en esas cinco secciones, luego únicamente en ellas pueden formarse articulaciones plásticas.

Resolviendo elásticamente el marco encontramos que el momento elástico máximo se presenta en la sección 5, y que su magnitud es  $0.413 PL$ . El comportamiento elástico del marco cesará cuando la sección 5 se plastifique totalmente, o sea cuando P alcance el valor  $P_1$  dado por:

$$0.413 P_1 L = M_p \quad \therefore \quad P_1 = 2.424 \frac{M_p}{L}$$

Al aumentar las cargas más allá de  $P_1$ , la articulación plástica en 5 experimenta rotaciones mientras el momento flexionante en ella conserva su valor constante,  $M_p$ . El conocimiento de la intensidad de este momento reduce el grado de hiperestaticidad del marco de tres a dos, pero al mismo tiempo se pierde la condición de compatibilidad de que la pendiente de la tangente al eje de la pieza en 5 no cambia, ya que se desconoce la magnitud de la rotación que se presenta en esa sección durante el incremento de las cargas.

Supongamos ahora que aumentamos las dos cargas de  $P_1$  a  $P_1 - \Delta P$ ; en la sección 5 se presentará una rotación de magnitud desconocida, bajo momento constante, mientras que el comportamiento del resto de la estructura sigue siendo elástico, ya que el momento flexionante varía linealmente a lo largo de 4-5, de manera que sólo en 5 se ha alcanzado  $M_p$ .

Por consiguiente, los incrementos en los momentos ocasionados por las

cargas  $\Delta P$  serán iguales a los momentos flexionantes que producirían esas cargas al obrar sobre un marco elástico, igual al real, pero en el que se hubiese introducido una articulación en la sección 5, momentos que pueden calcularse utilizando cualquier método elástico de análisis estructural; nótese que el grado de hiperestaticidad ha bajado a dos.

Determinamos ahora el valor de  $\Delta P$  necesario para que los incrementos en los momentos flexionantes a lo largo del marco sean tales que se alcance el valor  $M_p$  en una segunda sección de la estructura, con lo que le queda a ésta una sola incógnita hiperestática. Más allá de esa carga, los cambios en los momentos flexionantes se calculan como si la estructura tuviera articulaciones reales en las secciones en que han aparecido las dos articulaciones plásticas, comportamiento que continúa hasta que se forma una tercera articulación, con lo que el marco se vuelve estáticamente determinado. Los cálculos se prosiguen de manera semejante hasta que se forma la cuarta articulación plástica, ocasionando el colapso.

Los resultados de estos cálculos están contenidos en la tabla 5.1. En ella se han considerado positivos los momentos flexionantes que tienden a ocasionar un giro en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, recorriendo el marco de 1 a 5.

$\frac{\Delta P_L}{M_P}$	$\frac{P_L}{M_P}$	$\frac{M_1}{M_P}$	$\frac{M_2}{M_P}$	$\frac{M_3}{M_P}$	$\frac{M_4}{M_P}$	$\frac{M_5}{M_P}$
	2.424	-0.515	-0.030	0.727	-0.939	1
0.143		-0.067	0.015	0.049	-0.061	0
	2.567	-0.582	-0.015	0.776	-1.000	1
0.390		-0.331	0.058	0.224	0.000	0
	2.957	-0.913	0.043	1.000	-1.000	1
0.043		-0.087	0.043	0.000	0.000	0
	3.000	-1.000	0.000	1.000	-1.000	1

TABLA 5.1

El primer renglón de la tabla muestra la solución elástica correspondiente a las cargas  $P_1=2.424M_p/L$ . En el segundo renglón aparece la solución elástica del marco con una articulación en 5; los momentos flexionantes de esta solución pueden sumarse con los de la primera, siempre --

que no se alcance el momento  $M_p$  en ninguna otra sección, lo que sucede cuando las cargas  $P$  se incrementan en la cantidad  $0.143M_p/L$ , incremento que ocasiona la aparición de una segunda articulación plástica, en 4; en el tercer renglón se han anotado precisamente los valores de los momentos correspondientes a ese incremento, de manera que al sumar los dos primeros renglones obtenemos la distribución de momentos para  $P=P_1 - \Delta P = 2.567M_p/L$ , para la cual se tienen dos articulaciones plásticas, en 5 y 4.

Si  $P$  se aumenta más aún, se presentan rotaciones en las articulaciones plásticas en las secciones 4 y 5, de manera que el comportamiento correspondiente a esta nueva etapa del proceso de carga se investiga por medio de un nuevo análisis elástico, ahora con articulaciones en 4 y 5. La solución del marco en esas condiciones se muestra en el cuarto renglón de la tabla para un incremento de  $P$  igual a  $0.390M_p/L$ , suficiente para llevar el momento flexionante en la sección 3 al valor  $M_p$ . Sumando esos cambios de los momentos a los valores que tenían cuando  $P=2.567M_p/L$  obtenemos la distribución correspondiente a  $P=2.957M_p/L$ , para la cual aparece el momento plástico  $M_p$  en las secciones transversales 3, 4 y 5. Esta distribución está dada en el quinto renglón de la tabla.

Por último, obtenemos la solución elástica del marco con articulaciones en 3, 4 y 5 y encontramos que un incremento de  $P$  de  $0.043M_p/L$  hace que el momento flexionante en 1 alcance el valor  $M_p$ . El valor de  $P$  para el que se presenta esta condición es, pues,  $3M_p/L$ , y la distribución correspondiente de momentos flexionantes está en el último renglón.

Puede verse que a esa distribución de momentos le corresponde la aparición de articulaciones plásticas en cuatro secciones, 1, 3, 4 y 5, y que esas cuatro articulaciones son suficientes para transformar el marco en un mecanismo, de tal manera que el colapso se presenta mientras cargas y momentos flexionantes permanecen sin cambio. La carga de colapso del marco es, pues,  $3M_p/L$ , y el mecanismo de colapso es el mostrado en la Fig. 5.7.

El coeficiente de seguridad real de este marco diseñado elásticamente sería:

$$F.S. = \frac{3M_p/L}{2.424SFt/L} = \frac{3ZFt/L}{2.424SFt/L} = 1.24 \times 1.65 f$$

Que es 24% mayor que el de una estructura isostática.

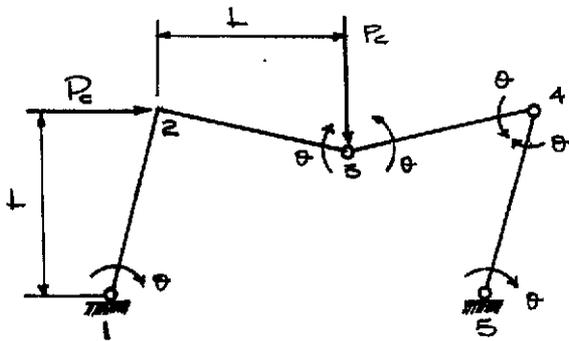


FIGURA 5.7

Las deflexiones correspondientes a cada etapa del proceso de carga pueden calcularse utilizando cualquier método elástico, aplicándolo en cada caso al marco con las articulaciones que se hayan formado hasta ese momento. Los resultados de esos cálculos se muestran en la Fig. 5.8a, en la que se han trazado los desplazamientos horizontales de los extremos superiores de las columnas, expresados en forma adimensional como  $hEI/MpL^2$ , y los valores de las cargas, también adimensionalmente, como  $PL/Mp$ .

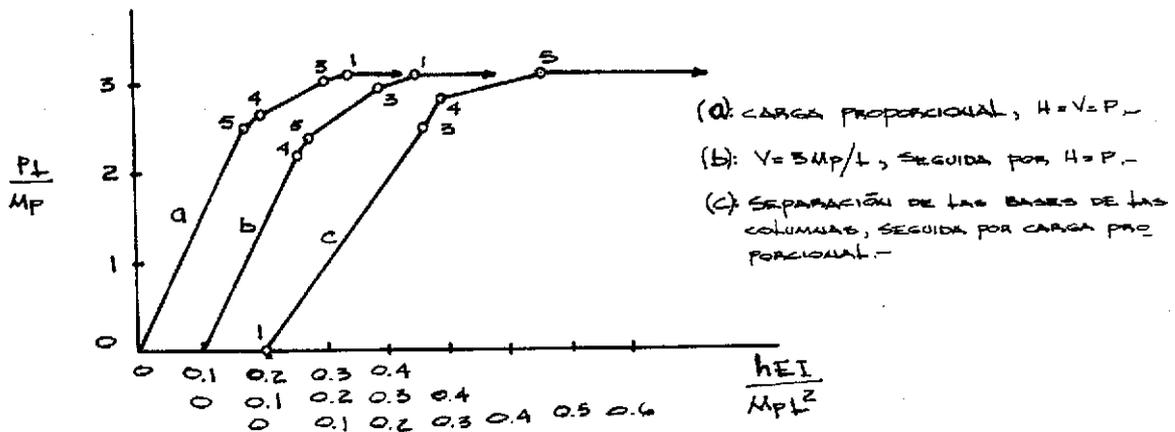


FIGURA 5.8

La aparición de cada articulación plástica se indica en la figura con el número de la sección transversal en que se forma dicha articulación, de acuerdo con la Fig. 5.6.

En general, las intensidades de las cargas que obran sobre una estructura real no crecen guardando siempre una relación constante entre sí, - como se supone al obtener la carga de colapso del marco en estudio, y -- puede parecer que el orden de aplicación de las fuerzas exteriores influye sobre el valor de dicha carga de colapso. Afortunadamente, sin embargo, no es ese el caso, y las distintas cargas pueden elevarse a sus valo

res de colapso de muy distintas maneras sin afectar la capacidad de la estructura.

Hemos visto que el colapso del marco se presenta cuando  $H=V=3M_p/L$ . Tomemos un caso extremo, suponiendo que se aplica primero la carga  $V$ , la que se incrementa hasta alcanzar el valor  $3M_p/L$ , antes de empezar a aplicar la fuerza  $H$ ; enseguida,  $V$  se mantiene constante, mientras  $H$  se incrementa lentamente desde cero.

Puede demostrarse que cuando  $V$  vale  $3M_p/L$  el marco está aún en estado completamente elástico, y que es necesario que  $H$  alcance el valor de  $2.133M_p/L$  para que aparezca la primera articulación plástica en la sección 4 (en contraste con el caso en que  $H$  y  $V$  crecían simultáneamente, pues entonces la primera articulación se formó en 5).

Efectuando los cálculos paso a paso, de manera semejante a como se hizo con la primera condición de carga, pueden obtenerse las relaciones carga-deformación para nuevos incrementos de  $H$  (los resultados se muestran en la Fig. 5.8b); la cuarta articulación plástica se forma en 1, cuando  $H$  vale  $3M_p/L$ , y el mecanismo de colapso es el mismo que antes. La condición de colapso para este caso es, pues, la misma que para cargas proporcionales, y en ambos casos se presenta cuando  $H=V=3M_p/L$ . La única diferencia entre los dos casos está en el orden de formación de las articulaciones plásticas y en las relaciones carga-deformación anteriores a la falla.

Otro resultado general de importancia considerable es que la carga de colapso es siempre independiente de los valores de los esfuerzos residuales de cualquier tipo que existan en la estructura descargada, ya sea que se deban a soldadura, ajuste imperfecto de los miembros, deformaciones plásticas ocasionadas por procesos de carga anteriores, movimientos de los apoyos, o cualquier otra causa.

Supongamos que los apoyos del marco de la Fig. 5.6 se abren, mientras que las columnas permanecen fijas en dirección, la cantidad estrictamente suficiente para que los momentos flexionantes en las secciones 1 y 5 alcancen el valor  $-M_p$ , sin que obre ninguna carga sobre la estructura. Un análisis elástico muestra que en esas condiciones el cabezal queda sujeto a un momento constante, de intensidad  $M_p/3$ . Si ahora se aplican al marco las cargas  $H$  y  $V$  y sus valores se van incrementando gradualmente, guardando siempre una relación constante entre sí, la articulación plás-

tica de la sección 1 empieza a girar inmediatamente, mientras que el momento flexionante en 5 disminuye, desapareciendo la articulación en esa sección.

Un análisis paso a paso permite obtener la relación carga-deformación mostrada en la Fig. 5.8c. De nuevo se encuentra que el colapso se presenta cuando aparece la cuarta articulación plástica, en la sección 5, para cargas  $H=V=3M_p/L$ , aunque la relación carga-deformación y la secuencia de formación de las articulaciones son diferentes que las obtenidas en los dos casos anteriores.

El hecho de que la magnitud de la carga de colapso sea independiente de la historia previa de carga de la estructura y de los valores de los esfuerzos residuales que existan en ella es, obviamente, de importancia fundamental en la teoría plástica. Su explicación es relativamente simple, y proviene de que el colapso sólo puede ocurrir cuando se ha formado un número de articulaciones plásticas suficiente para transformar la estructura (o una parte de ella) en un mecanismo. Hablando en términos generales, deberá aparecer una articulación más que las necesarias para que la estructura completa, o una porción de ella, se haga estáticamente determinada.

En el marco rectangular que hemos estado estudiando hay tres incógnitas hiperestáticas; si en cualquier etapa del proceso de carga se han formado tres articulaciones plásticas, de manera que el momento flexionante en cualquiera de ellas sea igual al momento plástico (e igual al de las demás), las tres incógnitas hiperestáticas pueden calcularse por estática, de manera que el momento flexionante en cualquier sección del marco puede escribirse en función de las cargas. Si se forma entonces una cuarta articulación, la estructura debe reducirse a un mecanismo, y el conocimiento del momento flexionante en la última articulación permite calcular los valores de las cargas.

Se deduce de lo que acabamos de decir que una vez que se sabe cual es el mecanismo de colapso la carga de colapso puede calcularse considerando únicamente las condiciones de equilibrio estático combinado con el conocimiento de los momentos flexionantes en las articulaciones plásticas. Ninguna de estas consideraciones es alterada por la presencia de esfuerzos residuales, el orden de aplicación de las cargas o la rigidez imperfecta de las juntas, de manera que es evidente que la carga de colapso -

no resulta afectada por esos factores.

Para ilustrar este punto, tomemos como incógnitas hiperestáticas del marco las tres reacciones, dos fuerzas y un par, en el apoyo de la izquierda. Sabemos que en el instante del colapso se forman articulaciones plásticas en las secciones 1, 3, 4 y 5; en la Fig. 5.7 se han mostrado los momentos que aparecen en ellas con sus signos respectivos, obtenidos considerando los movimientos relativos, respecto a cada articulación, de los extremos opuestos de las barras que concurren en ella (nótese que los momentos indicados en la figura no son necesariamente flexionantes, sino los correspondientes a las acciones de las barras sobre las articulaciones plásticas; por ejemplo, el momento que aparece a la derecha de la articulación 3 es en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, lo que corresponde al movimiento relativo de 4 con respecto a 3).

Por definición de momento flexionante en cada una de las secciones en que aparecen articulaciones plásticas, podemos escribir las cuatro ecuaciones siguientes (véase la Fig. 5.9, en la que se han dibujado únicamente momentos flexionantes):

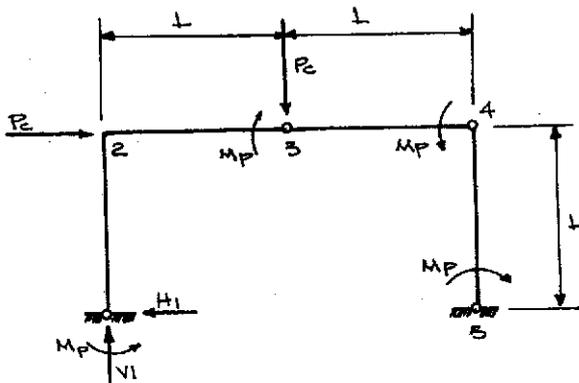


FIGURA 5.9

$$M_1 = -M_p$$

$$M_3 = M_p = H_1L + V_1L - M_p$$

$$M_4 = -M_p = H_1L + 2V_1L - P_cL - M_p$$

$$M_5 = M_p = 2V_1L + P_cL - P_cL - M_p$$

En cada una de las ecuaciones no aparecen más que dos momentos  $M_p$ , el correspondiente a la sección donde se está aplicando la definición de momento flexionante y el del apoyo 1, ya que

los demás son interiores. Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a los resultados siguientes:

$$V_1 = \frac{M_p}{L} \quad H_1 = \frac{M_p}{L} \quad M_1 = -M_p \quad P_c = \frac{3M_p}{L}$$

El valor de  $P_c$  concuerda con el obtenido previamente.

En la Fig. 5.10 se muestra el diagrama de momentos flexionantes co---

respondiente al instante de colapso; para trazarlo nos basta con calcular el momento en 2, ya que conocemos todos los demás valores necesarios.

$$M_2 = -M_p + H_1L = -M_p + \frac{M_p}{L}L = 0$$

El trazo del diagrama de momentos es conveniente en todos los casos en que se efectúan análisis estáticos del tipo que acabamos de hacer.

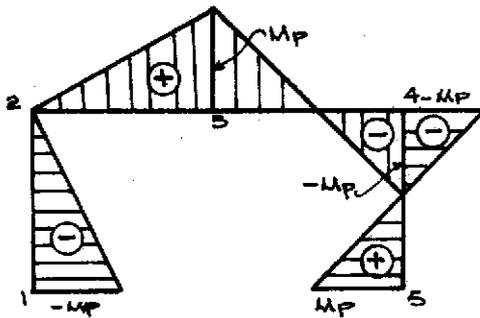


FIGURA 5.10

Como ya se ha señalado con anterioridad, una vez que se conoce el mecanismo de colapso es posible determinar la carga correspondiente utilizando un procedimiento cinemático, además del método estático empleado arriba. Para ello, basta igualar el trabajo efectuado por las cargas exteriores con el absorbido en las articulaciones plásticas durante el movimiento del mecanismo indicado en

la Fig. 5.7 (como el movimiento es muy pequeño, puede considerarse que los desplazamientos de los extremos superiores de las dos columnas son horizontales e iguales entre sí en magnitud, ya que la distancia entre los puntos 2 y 4 sólo cambia en una cantidad pequeña de orden superior); por consiguiente, las dos columnas giran el mismo ángulo  $\theta$ . El desplazamiento horizontal del punto 2 es  $\theta L$ , y como en 2 no aparece ninguna articulación plástica se conserva el ángulo recto entre las dos barras que concurren en ese punto, luego la barra 2-3 gira también un ángulo  $\theta$  y el punto 3 experimenta un desplazamiento vertical igual a  $\theta L$ .

Por consiguiente, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es:

$$P_c\theta L + P_c\theta L = 2P_c\theta L$$

Las rotaciones relativas de las dos barras que concurren en cada una de las articulaciones 3 y 4 son  $2\theta$ , luego el momento  $M_p$  que existe en cada una de ellas realiza un trabajo  $2M_p\theta$ ; por consiguiente, el trabajo interno total absorbido en las cuatro articulaciones plásticas valdrá:

$$M_p\theta + 2M_p\theta + 2M_p\theta + M_p\theta = 6M_p\theta$$

Igualemos el trabajo exterior con el interior, obteniendo:

$$2P_c \theta L = 6M_p \theta \quad \therefore \quad P_c = \frac{3M_p}{L}$$

Una vez que se conoce el mecanismo real de colapso, la determinación de la carga correspondiente es muy sencilla, utilizando cualquiera de los métodos que acabamos de ver, estático o dinámico.

Sin embargo, a menos que la estructura sea muy simple, el mecanismo real de colapso no puede conocerse por anticipado. Hay casos (como por ejemplo en la viga empotrada en los dos extremos y con carga uniforme) en que no existe más que un posible mecanismo de colapso el que, por consiguiente, tiene que ser el real. En cambio, en estructuras más complejas, el número de posibles mecanismos aumenta (en el marco que acabamos de estudiar hay tres), al grado de que en estructuras complicadas ese número puede ser muy elevado, lo que eliminaría la simplicidad de los métodos directos de análisis plástico, a menos que exista alguna manera de determinar, entre todos los mecanismos de colapso posibles, cual es el real.

## 6

### TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS

#### 6.1 ASPECTOS GENERALES.

Como hemos visto en algunos ejemplos sencillos, una vez conocido el mecanismo de colapso de una estructura sometida a un sistema de cargas dado la intensidad de éstas puede calcularse muy fácilmente, utilizando un procedimiento estático o dinámico. En algunas estructuras muy sencillas es obvio que existe un solo mecanismo posible de colapso, de manera que el cálculo de la carga máxima que pueden soportar esas estructuras no ofrece ninguna dificultad. En cambio, cuando hay más de un posible mecanismo de colapso se hace necesario distinguir el real entre los varios posibles, pues de no hacerlo los métodos directos para el cálculo del colapso plástico perderían toda su utilidad.

A continuación estudiaremos los teoremas referentes a los valores de la carga de colapso plástico que son útiles para el fin anterior, y aclararemos su significado aplicándolo a unos cuantos ejemplos simples.

La validez de los teoremas depende esencialmente de la suposición de

que la gráfica momento flexionante-curvatura es de la forma simplificada mostrada en la Fig. 3.10, para todos los miembros de la estructura. Las dos particularidades fundamentales importantes de esa relación son que - un incremento de momento flexionante origina siempre un incremento de -- curvatura de su mismo signo y que la magnitud de la curvatura tiende a - valores infinitamente grandes mientras que el momento flexionante tiende al momento plástico  $M_p$ , como límite.

De aquí se deduce que siempre que el momento flexionante existente en una sección transversal cualquiera alcanza el valor  $M_p$  se forma en ella una articulación plástica que puede experimentar rotaciones de cualquier magnitud, mientras que el momento flexionante se conserva constante e igual a  $M_p$ .

Por ahora supondremos que el valor del momento plástico es constante para una sección transversal de dimensiones dadas, independientemente de las magnitudes de las fuerzas cortantes y normales que actúen en ella. - (En realidad, estas fuerzas sí influyen en los momentos plásticos resistentes de las barras, pero su estudio, así como el de otros factores, se hará más adelante.)

Como sabemos, las suposiciones anteriores son los requisitos esenciales de la teoría plástica simple.

Además, supondremos que las deformaciones de las estructuras en estudio son suficientemente pequeñas para que las ecuaciones de equilibrio - estático sean sensiblemente las mismas que para las estructuras no deformadas, suposición que es semejante a la que se hace en el análisis elástico convencional. En virtud de ella, se excluye cualquier consideración de falla por pandeo antes de que se alcance la carga teórica de colapso.

Por último, vamos a suponer que las cargas que obran sobre las estructuras son proporcionales entre sí, es decir, que sus magnitudes conservan relaciones fijas durante todo el proceso de carga. Por consiguiente, un solo parámetro  $P$  determina las intensidades de todas las cargas del sistema. (Esto no excluye la posibilidad de que al cargar una estructura real no se cumpla la condición de proporcionalidad, siempre que no haya fallas locales.)

Definiremos estado de colapso plástico a aquel en que las deflexiones de la estructura, o al menos de una parte de ella, pueden incrementarse mientras que las cargas exteriores permanecen constantes.

En las estructuras simples estudiadas hasta ahora es evidente que --- cuando se alcanza la carga de colapso se ha formado en ellas un número de articulaciones plásticas suficientes para convertirlas en un mecanismo. Las deflexiones pueden aumentar entonces bajo carga constante, a causa de las rotaciones que se presentan en las articulaciones y mientras que los momentos flexionantes en ellas se conserven constantes, con valor  $M_p$ . De una consideración de los requisitos de equilibrio estático se deduce que la distribución de momentos flexionantes en la estructura permanece sin cambio durante el colapso, de manera que no habrá cambios de curvatura en ninguna sección transversal, excepto en las que existan articulaciones plásticas.

Estos resultados, obvios en los casos simples considerados, son también válidos en cualquier caso.

Como un corolario, es evidente que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores durante el colapso plástico debe ser igual al absorbido en las articulaciones plásticas, ya que como sólo en ellas hay cambios de curvatura, los momentos flexionantes no realizarán trabajo inter no más que en esas articulaciones.

## 6.2 CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCION DE MOMENTOS FLEXIONANTES DURANTE EL COLAPSO.

La distribución de momentos flexionantes correspondientes al instante de la falla de una estructura cualquiera debe satisfacer simultáneamente los tres requisitos siguientes:

1. Condición de equilibrio. El sistema de momentos flexionantes debe corresponder a un estado de equilibrio entre la estructura y las cargas que obran sobre ella.
2. Condición de mecanismo. Los momentos flexionantes deben ser iguales a los momentos plásticos resistentes en un número de secciones transversales suficiente para que la estructura, o parte de ella, se convierta en un mecanismo con articulaciones plásticas.
3. Condición de plasticidad. El momento flexionante existente en una sección no puede ser nunca mayor que el momento plástico resistente de la estructura en esa sección (o, lo que es lo mismo, el esfuerzo normal no puede sobrepasar el correspondiente al límite in-

ferior de fluencia en ningún punto de ninguna sección transversal).

Estas tres condiciones de colapso son un requisito necesario de una distribución de momentos correspondientes a un estado de falla, y llevan a tres teoremas de aplicación general.

### 6.3 EL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.

El principio del trabajo virtual nos va a ser muy útil en el análisis plástico de estructuras, por lo que antes de pasar al estudio de los teoremas fundamentales veremos en que forma puede aplicarse al problema que nos ocupa. Podemos enunciar el principio en la forma general siguiente:

"Una condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo deformable es que sea nula la suma de los trabajos realizados por todas las fuerzas, exteriores e interiores, que obran sobre él, para cualquier conjunto de desplazamientos pequeños y compatibles con las restricciones externas e internas del cuerpo."

En aplicaciones prácticas, el principio del trabajo virtual suele utilizarse en la forma siguiente:

"Si una estructura deformable, en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores, es sometida a un desplazamiento virtual (es decir, pequeño y compatible con sus restricciones internas y externas), el trabajo  $t_e$  realizado por las fuerzas exteriores durante el desplazamiento es igual al efectuado por las fuerzas interiores  $t_i$  durante ese mismo desplazamiento."

Esto quiere decir que  $t_e = t_i$ . Si el sistema es indeformable, las fuerzas interiores no realizan ningún trabajo y  $t_e = 0$ , o sea:

$$t_e = t_i \quad (16)$$

$$t_e = 0 \quad (\text{sistema indeformable})$$

Al aplicar el principio a una estructura reticular plana y cargada en su plano, el trabajo de las fuerzas exteriores vale:

$$t_e = \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$$

Donde  $\delta_i$  es el desplazamiento efectivo del punto de aplicación de la fuerza  $P_i$ , y la suma se lleva a través de todas las cargas del sistema.

El trabajo de las fuerzas interiores será, en general, función de los

tres elementos mecánicos existentes en estructuras reticulares planas, - M, N y T (momentos y fuerzas normales y de corte, respectivamente), pero dentro de la teoría plástica simple despreciamos los efectos de N y T, - de manera que lo obtendremos en función de los momentos flexionantes exclusivamente.

Utilizaremos el principio del trabajo virtual para calcular la carga límite de las estructuras planas, y al hacerlo tomaremos como desplazamientos virtuales los que experimenta el sistema, bajo carga constante, inmediatamente después de que se alcanza la condición de colapso; durante ellos, las deformaciones elásticas no varían, y como son muy pequeñas podemos suponer que el sistema se ha convertido en un mecanismo constituido por una serie de barras rígidas, con la forma original, ligadas entre sí a través de las articulaciones plásticas.

Por consiguiente, durante el desplazamiento virtual, las barras rígidas que componen el mecanismo se moverán en el plano, girando alrededor de las articulaciones plásticas, y el trabajo de las fuerzas interiores se reducirá al efectuado por los momentos en esas articulaciones, en las que se producen rotaciones finitas  $\theta_j$ .

La fórmula (16) se convierte, pues, en:

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \sum_{j=1}^m M_j \theta_j \quad (17)$$

En la que n es el número de fuerzas exteriores y m el de articulaciones plásticas.

Evidentemente, cuando sobre la estructura obren cargas repartidas, se modificará la forma del primer miembro de la ec. (17).

#### 6.4 TEOREMA DEL LIMITE INFERIOR.

El primer teorema que vamos a establecer se basa en una consideración de los requisitos para el equilibrio estático de una estructura.

En general, en una estructura hiperestática dada existe un número infinito de distribuciones de momentos flexionantes que satisfacen todas las condiciones de equilibrio estático con un conjunto especificado de fuerzas exteriores. (En efecto, podemos inventar los valores de las incógnitas hiperestáticas y deducir los de las demás incógnitas, en función de las cargas del sistema exterior, por medio de las ecuaciones de

equilibrio.) A este tipo de distribuciones de momentos las llamaremos, - en lo que sigue, "estáticamente admisibles".

Además, para que una distribución de momentos dada satisfaga la condición de plasticidad, será necesario que los momentos existentes de acuerdo con esa distribución no sobrepasen en ninguna sección transversal de la estructura el momento plástico resistente de la misma.

Supongamos que sobre una estructura dada obra un sistema de fuerzas  $P_i$  cuyas intensidades conservan siempre la misma relación entre sí, de manera que podemos hacer variar el sistema multiplicando todas las fuerzas que lo componen por un mismo número,  $\lambda$ .

Queremos determinar la intensidad máxima de las cargas que puede soportar la estructura, es decir, el valor del multiplicador  $\lambda$  para el que se produce el colapso plástico de la estructura, al que llamaremos  $\lambda_c$ .

Para un valor cualquiera de  $\lambda$ , que define un sistema de cargas  $\lambda P_i$ , - podemos encontrar un número infinito de distribuciones de momentos estáticamente admisibles y que satisfagan simultáneamente la condición de - plasticidad.

Supongamos conocido el valor de  $\lambda_c$  correspondiente al colapso de la - estructura: bajo la acción del sistema de cargas  $\lambda_c P_i$  se formará un número de articulaciones plásticas suficiente para convertir la estructura - en su totalidad, o una parte de ella, en un mecanismo.

Apliquemos el principio del trabajo virtual, tomando como sistema de fuerzas en equilibrio el formado por las cargas  $\lambda_c P_i$  y como conjunto de desplazamientos virtuales el correspondiente a un pequeño movimiento del mecanismo de colapso.

El trabajo realizado por las fuerzas exteriores vale:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_c P_i \delta_i = \lambda_c \sum_{i=1}^n P_i \delta_i$$

Y el absorbido en las articulaciones plásticas es:

$$\sum_{j=1}^m M_{pj} \theta_j$$

Siendo  $m$  el número de articulaciones plásticas y  $M_{pj} \theta_j$  los momentos y giros correspondientes.

Igualemos el trabajo exterior con el interior y obtenemos:

$$\lambda_c \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \sum_{j=1}^m M_{pj} \theta_j \quad (18)$$

Volvamos a aplicar el principio del trabajo virtual, tomando ahora un sistema de cargas en equilibrio correspondiente a un valor cualquiera -- del multiplicador  $\lambda$  y el mismo conjunto de desplazamientos virtuales que en el caso anterior, correspondiente a un movimiento del mecanismo de colapso. (Debe hacerse notar que al aplicar el principio del trabajo virtual no es necesario que los desplazamientos virtuales correspondan al sistema de cargas al que se aplica el principio, sino basta con que el sistema de cargas esté en equilibrio y que los desplazamientos sean compatibles con las restricciones interiores y exteriores de la estructura.)

Los trabajos exterior e interior valen, respectivamente:

$$\sum_{i=1}^n \lambda P_i \delta_i = \lambda \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k M_p \theta_j + \sum_{j=k}^m M_j \theta_j$$

En esta última ecuación,  $k$  es el número de articulaciones del mecanismo real en las que los momentos correspondientes al sistema  $\lambda P_i$  alcanzan el valor  $M_p$ ; en las demás, el valor del momento es  $M_j$ .

Igualando las dos cantidades anteriores, obtenemos:

$$\lambda \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \sum_{j=1}^k M_p \theta_j + \sum_{j=k}^m M_j \theta_j \quad (19)$$

Evidentemente,  $k$  es un número menor, o a lo sumo igual, al número total de articulaciones plásticas,  $m$  (de hecho,  $k$  puede valer cero) y los momentos  $M_j$  que aparecen en las demás son necesariamente menores que  $M_p$  puesto que se cumple la condición de plasticidad. Por consiguiente:

$$\sum_{j=1}^k M_p \theta_j + \sum_{j=k}^m M_j \theta_j \leq \sum_{j=1}^m M_p \theta_j$$

Y, observando las ecuaciones (18) y (19), llegamos a la conclusión:

$$\lambda \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \lambda_c \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad \therefore \quad \lambda = \lambda_c \quad (20)$$

Es decir, la carga límite real (carga de colapso) es la mayor de todas las cargas para las que puede obtenerse una distribución de momentos estáticamente admisible y que cumpla, al mismo tiempo, la condición de plasticidad en todas las secciones de la estructura.

**TEOREMA.** La carga correspondiente a una configuración de equilibrio -- con valores supuestos arbitrariamente para las incógnitas hiperestáticas es menor que, o a lo sumo igual, a la carga última, siempre que en todas

las secciones transversales de la estructura se cumpla la condición de que  $|M| \leq M_p$ .

Haremos a continuación algunos ejemplos que nos permitirán aclarar el significado del teorema del límite inferior.

**Ejemplo 6.1.** Consideremos una viga empotrada en ambos extremos, de longitud  $L$  y sección transversal constante, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida  $W$  (Fig. 6.1).

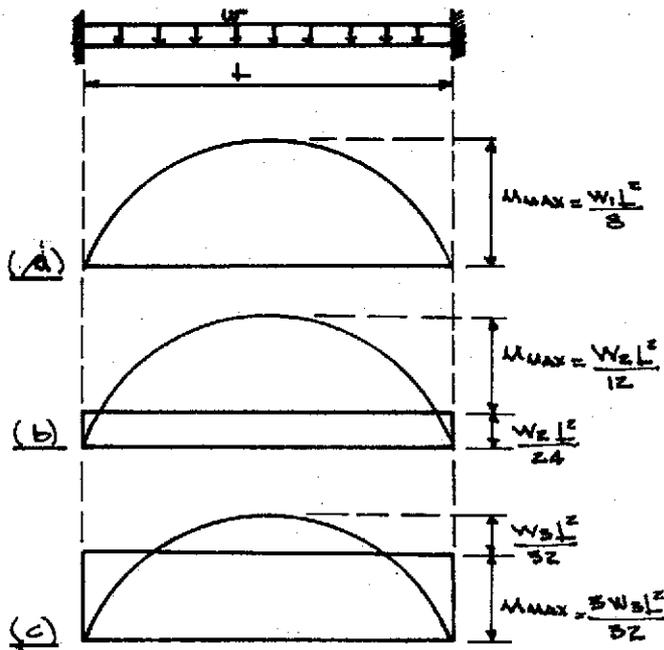


FIGURA 6.1

Ya hemos resuelto con anterioridad este problema y sabemos que la carga de colapso vale:

$$W_c = \frac{16M_p}{L^2}$$

Por simetría, los momentos en los dos extremos de la viga deben ser iguales, de manera que obtenemos un diagrama estáticamente admisible superponiéndole al isostático cualquier diagrama correctivo horizontal. En la Fig. 6.1 se muestran tres diagramas de momentos estáticamente admisibles,

escogidos al azar. En el primer caso (Fig. 6.1a) se ha escogido como diagrama estáticamente admisible el isostático, es decir, se han supuesto momentos correctivos nulos.

De acuerdo con el teorema del límite inferior, la carga  $W_1$ , correspondiente a ese diagrama, será menor o igual que la carga de colapso de la viga,  $W_c$ , siempre que  $|M| \leq M_p$  en todas las secciones.

Esta última condición se cumplirá si  $M_{max} \leq M_p$ , y el valor máximo de  $W_1$  corresponderá a  $M_{max} = M_p$ . Es decir:

$$\frac{W_1 L^2}{8} = M_p \quad \therefore \quad W_1 = \frac{8M_p}{L^2}$$

Esta carga debe ser igual o menor que  $W_c$  (en efecto, la carga de colapso

so vale  $16M_p/L^2$ , o sea  $2W_1$ ).

En el segundo caso (Fig. 6.1b):

$$M_{max} = \frac{W_2 L^2}{12} = M_p \quad \therefore \quad W_2 = \frac{12M_p}{L^2} < W_c$$

Y en el tercer caso (Fig. 6.1c):

$$M_{max} = \frac{3}{32} W_3 L^2 = M_p \quad \therefore \quad W_3 = \frac{32M_p}{3L^2} < W_c$$

En todos los casos hemos obtenido valores de  $W$  menores que el que ocasiona el colapso de la viga; si siguiésemos haciendo tanteos obtendríamos, como valor máximo de  $W$ , precisamente  $W_c$ .

Los valores de las cargas  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  pueden obtenerse también utilizando el principio del trabajo virtual; ilustraremos su aplicación empleándolo para calcular la carga correspondiente al diagrama de momentos de la Fig. 6.1a.

En la Fig. 6.2 se muestra el sistema de fuerzas en equilibrio y el diagrama de momentos correspondiente. En los extremos de la viga y en su sección media introducimos articulaciones ficticias, y para que no se modifique el estado de la estructura aplicamos a uno y otro lado de ellas momentos exteriores iguales en magnitud y signo a los momentos interiores existentes en esas secciones.

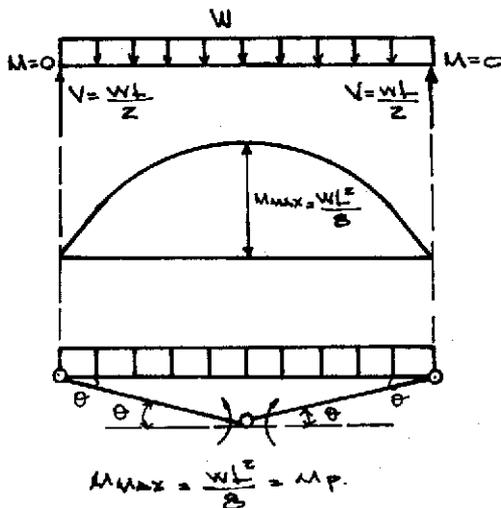


FIGURA 6.2

Aplicamos el principio del trabajo virtual, dándole un pequeño movimiento al mecanismo que se ha formado con la introducción de las articulaciones.

$$t_e = WL \frac{\theta L}{2} \frac{1}{2} - M_p 2\theta$$

$$t_i = 0$$

Por consiguiente:

$$\frac{WL^2\theta}{4} - 2M_p\theta = 0 \quad \therefore \quad W = \frac{8M_p}{L^2}$$

Valor que concuerda con el obtenido anteriormente.

**Ejemplo 6.2.** Viga empotrada en un extremo y apoyada libremente en el otro, de longitud  $L$  y sección transversal constante, sometida a la acción de una carga concentrada  $P$  en el centro del claro.

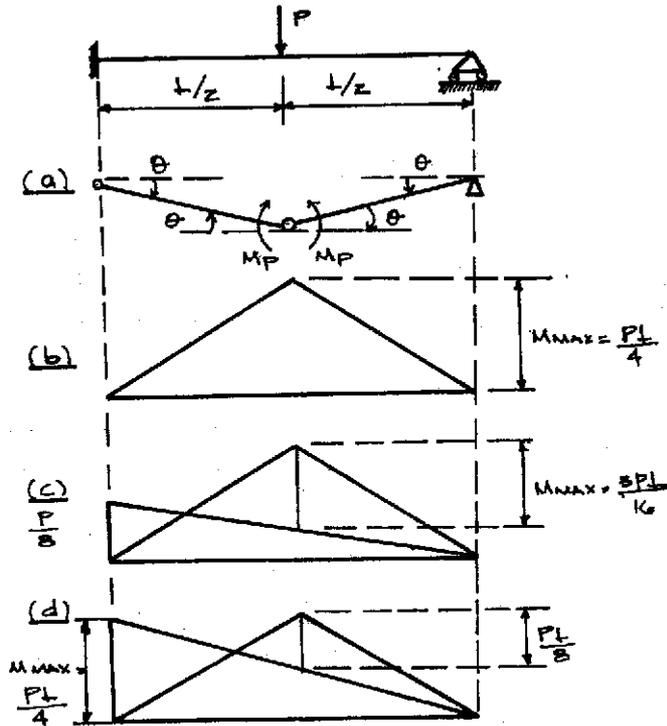


FIGURA 6.3

Para tenerla como referencia, calcularemos la carga de colapso aplicando el principio del trabajo virtual al al único mecanismo de falla posible (Fig. 6.3a).

$$P\theta \frac{L}{2} = 3M_p\theta$$

$$\therefore P_c = \frac{6M_p}{L}$$

Evidentemente, en el extremo de la derecha de la viga no aparece articulación plástica puesto que el apoyo real existente en él permite los giros libremente, con momento nulo.

Calcularemos las cargas correspondientes a los tres diagramas de momentos estáticamente admisibles mostrados en b, c y d de la Fig. 6.3.

$$b) \quad M_{max} = \frac{P_1 L}{4} = M_p \quad \therefore \quad P_1 = \frac{4M_p}{L} < P_c$$

$$c) \quad M_{max} = \frac{3P_2 L}{16} = M_p \quad \therefore \quad P_2 = \frac{16M_p}{3L} < P_c$$

$$d) \quad M_{max} = \frac{P_3 L}{4} = M_p \quad \therefore \quad P_3 = \frac{4M_p}{L} < P_c$$

En cualquiera de los casos anteriores se logra que la distribución de momentos satisfaga la condición de plasticidad haciendo que el momento máximo sea menor o igual que  $M_p$ ; consideramos únicamente el caso en que  $M_{max}=M_p$ , porque es el que nos da el valor mayor de  $P$ .

Para las tres distribuciones de momentos supuestas hemos obtenido, de acuerdo con el teorema del límite inferior, valores de  $P$  menores que  $P_c$ ;

existe una sola distribución de momentos, con valores máximos simultáneos en el empotramiento y en el centro del claro, para la que  $P=P_c$ .

Un corolario obvio del teorema del límite inferior es que si se puede demostrar que para un conjunto dado de cargas  $P$  no existe ninguna distribución de momentos flexionantes que satisfaga la condición de plasticidad y sea, al mismo tiempo, estáticamente admisible, ese valor de  $P$  debe ser mayor que la carga de colapso,  $P_c$ . Es decir, la carga de colapso de una estructura corresponde a la intensidad máxima del sistema de cargas que obran sobre ella para la que se satisfacen simultáneamente los dos requisitos necesarios de que el equilibrio estático debe ser mantenido y que el momento flexionante no puede ser mayor que  $M_p$  en ninguna sección.

Otro corolario interesante del teorema se refiere al efecto que tiene sobre la carga de colapso el refuerzo de una estructura, por aumento del momento plástico resistente de uno o más de sus miembros. Se ve finalmente que este refuerzo no puede ocasionar una disminución de la carga de colapso. En efecto, si una estructura sometida a un sistema de cargas  $P$  falla cuando alcanzan el valor  $P_c$ , habrá cuando menos una distribución de cargas o momentos flexionantes estáticamente admisible con esas cargas, que satisficará, al mismo tiempo, la condición de plasticidad. Esa misma distribución de momentos seguirá cumpliendo la condición de que  $M \leq M_p$  en todos los puntos y seguirá siendo estáticamente admisible con las cargas exteriores si se aumenta el momento plástico resistente en una o más secciones transversales de la estructura, ya que los requisitos de equilibrio estático permanecen sin cambio y si el momento plástico  $M_p$  no era excedido en ningún punto de la estructura original, menos aún lo será en la reforzada.

En caso de que este corolario resulte obvio debe recordarse que si se considera el comportamiento elástico de una estructura el aumento de la sección de un miembro da lugar a una redistribución de momentos que puede ocasionar incrementos de los esfuerzos en secciones críticas, disminuyendo, por consiguiente, la capacidad de carga de la estructura, desde un punto de vista estático.

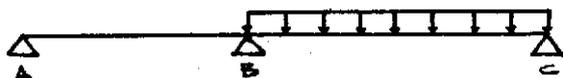


FIGURA 6.4

Como ejemplo, consideremos la viga de la Fig. 6.4: si reforzamos el tramo AB su rigidez aumentará, de manera que al distribuir el mo-

mento de desequilibrio entre los dos tramos disminuirá el correspondiente al tramo BC; por consiguiente, aumentará el momento total en el extremo B del tramo BC, ya que será menor la magnitud del momento que se resta del de empotramiento perfecto, y si esa sección era la que regía el diseño del tramo de la derecha de la viga, este tramo quedará en condiciones más desfavorables que las originales y, aparentemente, habrá disminuido la capacidad de carga de la estructura.

### 6.5 TEOREMA DEL LIMITE SUPERIOR.

Si se conoce el mecanismo real de colapso de una estructura dada sometida a un determinado sistema de cargas, el valor de la carga de colapso puede encontrarse igualando el trabajo realizado por las cargas exteriores durante un pequeño movimiento del mecanismo de colapso con el absorbido en las articulaciones plásticas.

Cuando no se conoce el mecanismo real de falla, es posible escribir una ecuación de trabajo del tipo indicado arriba para cualquier mecanismo supuesto, con lo que se obtendrá un valor de la carga  $P$  "correspondiente" al mecanismo supuesto.

Así, por ejemplo, en la viga doblemente empotrada de la Fig. 6.5 podemos suponer que la tercera articulación plástica se forma en un punto intermedio cualquiera, que no sea el centro del claro: aplicando el principio del trabajo virtual podremos calcular inmediatamente la carga de ruina correspondiente al mecanismo supuesto.

En general, el mecanismo supuesto inventando la posiciones de las articulaciones plásticas no será el mecanismo real de colapso de la estructura; sin embargo, es fácil definir un sistema para el que la forma de colapso supuesta, y la carga correspondiente, sean las reales: bastará para ello con considerar una estructura, deducida de la dada, en la que las secciones transversales permanezcan constantes en los lugares donde se han supuesto las articulaciones plásticas mientras que crecen indefinidamente en todo el resto. El mecanismo real de colapso de esta estructura reforzada es, evidentemente, el mecanismo supuesto arriba para calcular la carga de colapso de la estructura real.

Ahora bien, de acuerdo con el segundo corolario del teorema del límite inferior, la carga de colapso del sistema reforzado no puede ser menor que la de la estructura dada, de donde se deduce que la carga de co-

lapso verdadera es la más pequeña de todas las que pueden obtenerse colocando articulaciones plásticas en secciones arbitrarias de la estructura y calculando las cargas correspondientes a los mecanismos así creados.

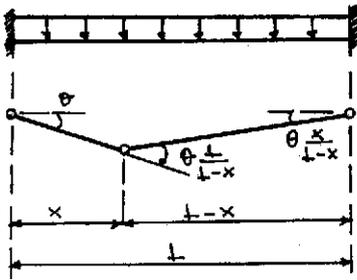


FIGURA 6.5

**TEOREMA.** En una estructura dada, sujeta a un conjunto de cargas P, el valor de P calculado por medio de un mecanismo supuesto es siempre mayor, o a lo sumo igual, a la carga de colapso.

De manera análoga a como lo hicimos con el teorema del límite inferior, estudiaremos ahora algunos ejemplos por medio de los cuales aclararemos el sentido de este segundo teorema.

**Ejemplo 6.3.** La misma viga del ejemplo 6.1 (pag. 60). Para que la estructura se convierta en un mecanismo es necesario que aparezcan tres articulaciones plásticas; evidentemente, por la simetría existente tanto en cargas como en geometría, una de las articulaciones aparecerá en el centro del claro, y las otras dos simétricamente colocadas respecto a él.

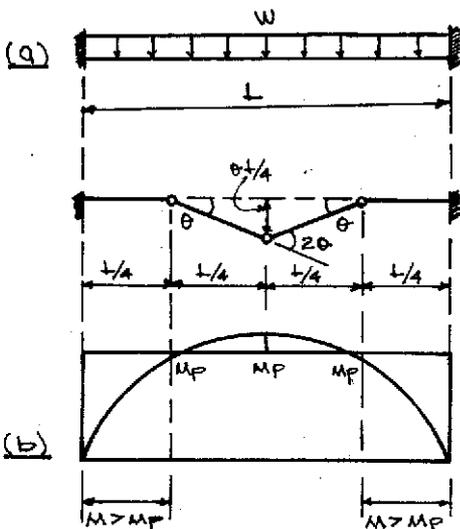


FIGURA 6.6

En la Fig. 6.6a se muestra un mecanismo supuesto de colapso, que satisface las condiciones indicadas en el párrafo anterior. Aplicando el principio del trabajo virtual, obtenemos:

$$2 \frac{WL}{4} \frac{1}{2} \theta \frac{L}{4} = 4M_p \theta \quad \therefore W = \frac{32M_p}{L^2}$$

De acuerdo con el teorema del límite superior, el valor de W que acabamos de obtener es mayor o igual que la carga de colapso,  $W_c$  (es, en realidad, mayor, pues, como sabemos,  $W_c$  vale  $16M_p/L^2$ ).

De la observación del diagrama de momentos de la Fig. 6.6, es evidente que el mecanismo supuesto no puede ser el real de colapso, puesto que se vio la condición de plasticidad en los dos cuartos laterales de la viga (en todas las secciones de esos dos tramos de la viga los momentos flectores son mayores que los momentos plásticos resistentes, de acuerdo

con el diagrama de momentos correspondiente al mecanismo de colapso su-  
puesto).

De manera análoga, la condición de plasticidad se seguirá violando pa-  
ra cualquier otra posición de las articulaciones laterales, excepto en -  
el caso en que las hagamos coincidir con los apoyos, con lo que obtendre-  
mos el mecanismo real de colapso.

(En esta estructura sencilla se sabe desde un principio cual es el me-  
canismo de colapso, ya que sólo pueden aparecer articulaciones plásticas  
en los extremos de la viga y en el centro, únicas secciones en que el mo-  
mento flexionante es máximo, y se necesitan las tres articulaciones para  
que la viga se transforme en un mecanismo.)

Ejemplo 6.4. Consideraremos ahora la viga mostrada en la Fig. 6.7, de  
sección transversal constante en toda la longitud.

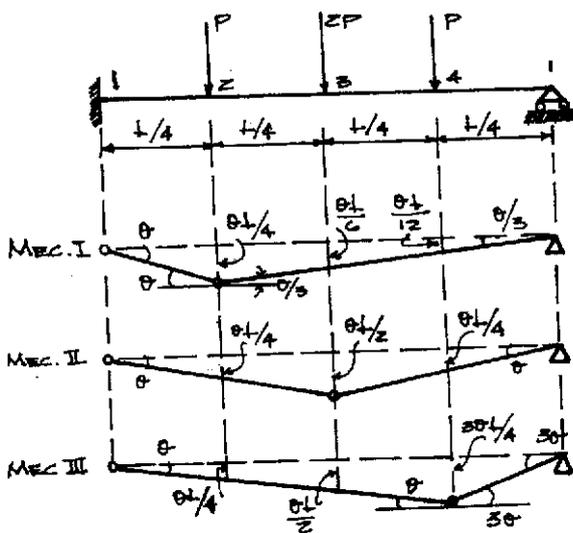


FIGURA 6.7

Pueden aparecer articulaciones -  
plásticas en cualquiera de los pun-  
tos numerados del 1 al 4, y para --  
que la viga falle por colapso plás-  
tico basta con que aparezcan dos de  
ellas simultáneamente.

En la figura se han dibujado úni-  
camente los mecanismos correspon-  
dientes a la formación de una arti-  
culación plástica en el empotramien-  
to y la otra en una de las seccio-  
nes intermedias, pero existen, des-  
de luego, otros mecanismos posibles  
en dos de las secciones 2, 3 y 4.

Plantearemos la ecuación del tra-

bajo virtual para cada uno de estos posibles mecanismo de colapso:

$$\text{I)} \quad P \frac{\theta L}{4} + 2P \frac{\theta L}{6} + P \frac{\theta L}{12} = M_p \theta + M_p \theta + M_p \frac{\theta}{3} \quad \therefore P = \frac{7M_p}{2L} \geq P_c$$

$$\text{II)} \quad P \frac{\theta L}{4} + 2P \frac{\theta L}{2} + P \frac{\theta L}{4} = 3M_p \theta \quad \therefore P = \frac{2M_p}{L} \geq P_c$$

$$\text{III)} \quad P \frac{\theta L}{4} + 2P \frac{\theta L}{2} + P \frac{3\theta L}{4} = 2M_p \theta + M_p 3\theta \quad \therefore P = \frac{5M_p}{2L} \geq P_c$$

De acuerdo con el teorema del límite superior, los tres valores obtenidos para  $P$  son iguales o mayores que la carga de colapso (de hecho, el mecanismo real de colapso es el II, de manera que  $P_c = 2M_p/L$ ).

#### 6.6 TEOREMA DE UNICIDAD.

Los dos teoremas que acabamos de ver pueden combinarse para formar un teorema de unicidad. En efecto, de acuerdo con el teorema del límite inferior se sabe que la carga correspondiente a cualquier configuración de momentos estáticamente admisibles y para la que se satisfaga la condición de plasticidad es menor, o a lo sumo igual, a la carga de colapso; por otro lado, el teorema del límite superior nos indica que la carga que corresponde a cualquier mecanismo posible es igual o mayor que la de colapso; por consiguiente, si encontramos una distribución de momentos estáticamente admisible y en equilibrio, y tal que los momentos alcancen el valor  $M_p$  en un número de secciones suficiente para que la estructura se convierta en un mecanismo, serán aplicables los dos teoremas simultáneamente y, por consiguiente, la carga correspondiente a esa distribución de momentos será necesariamente, la carga real de colapso, de la estructura, ya que éste es el único valor de la carga que satisface simultáneamente a ambos teoremas.

**TEOREMA.** Si para una estructura dada, sometida a un sistema de cargas dado, se puede encontrar cuando menos una distribución de momentos flexionantes estáticamente admisible y que satisfaga la condición de plasticidad, y tal que el momento flexionante sea igual al momento plástico resistente de la estructura en un número de secciones suficiente para ocasionar la ruina de la estructura por formación de un mecanismo debido a las rotaciones de las articulaciones plásticas en esas secciones, la carga considerada es la carga de colapso. o

Evidentemente, los signos de los momentos en las rótulas plásticas tienen que coincidir con el sentido de los giros que deben presentarse en ellas durante un pequeño movimiento del mecanismo de colapso; de no ser así, aunque aparezca el momento  $M_p$  en un número de secciones suficiente para convertir a la estructura en un mecanismo, éste no será posible.

El interés de este teorema proviene de que permite determinar si un -

mecanismo dado es o no el de colapso de una estructura; para ello, basta con construir el diagrama de momentos correspondiente: si  $M \leq M_p$  en toda la estructura, el mecanismo considerado es necesariamente el de colapso.

De manera análoga, si se ha encontrado un diagrama de momentos estáticamente admisible que satisfaga la condición de que  $M = M_p$  en un número de secciones suficientes para conformar un mecanismo de ruina total o parcial (en el que, además,  $M < M_p$  en todas las demás secciones), ese diagrama de momentos corresponde al mecanismo de colapso siempre que, como dijimos antes, los signos de los momentos en las articulaciones sean compatibles con los sentidos de los giros que deben presentarse en ellas.

El número de articulaciones plásticas debe ser  $G+1$ , siendo  $G$  el grado de hiperestaticidad de la porción de la estructura convertida en mecanismo.

## 7

### MÉTODOS GENERALES DE ANÁLISIS

#### 7.1 ASPECTOS GENERALES.

De cada uno de los dos teoremas primeros fundamentales se deriva inmediatamente un método para el análisis plástico de estructuras. Además, la combinación de esos dos teoremas con el de unicidad permite aplicar los métodos de análisis en una forma más eficiente.

#### 7.2 MÉTODO ESTÁTICO.

Se basa en el teorema del límite inferior. El objetivo consiste en encontrar un diagrama de momentos estáticamente admisible en el cual no se sobrepase el valor del momento plástico resistente en ninguna sección ( $M \leq M_p$ ) y, al mismo tiempo, se alcance el valor  $M_p$  en un número suficiente de secciones para que la estructura en conjunto, o una parte de ella, se convierta en un mecanismo con articulaciones plásticas, con lo cual se cumplirán las tres condiciones necesarias para que la distribución de momentos considerada corresponda a la carga de colapso plástico de la estructura.

Es decir, en este método se parte de una configuración estáticamente

admisible (correspondiente a un estado de equilibrio con las cargas exteriores), la cual se ajusta de manera de satisfacer simultáneamente la condición de mecanismo, sin que en ninguna sección se sobrepase el valor del momento plástico.

El método estático puede aplicarse en forma semi-gráfica y en forma analítica. En su primera forma es muy apropiado para el análisis de vigas continuas, y puede utilizarse ventajosamente también en marcos sencillos; en estructuras más complicadas su aplicación se vuelve muy laboriosa, pero en ellas es, en cambio, muy útil cuando se emplea en forma analítica.

Al utilizar este método de análisis en la forma semi-gráfica se sigue el procedimiento siguiente:

1. Se escogen las incógnitas hiperestáticas.
2. Se traza el diagrama de momentos de la estructura isostática obtenida al eliminar de la estructura dada las restricciones correspondientes a los elementos hiperestáticos escogidos.
3. Se traza el diagrama correctivo, correspondiente a los elementos hiperestáticos.
4. Se obtiene el diagrama real de momentos flexionantes superponiendo el correctivo sobre el isostático y se regula el valor de las incógnitas hiperestáticas de manera que se tenga  $M=M_p$  en un número de secciones suficiente para que se forme un mecanismo.
5. Se hace un croquis del mecanismo y se comprueba que los momentos en las secciones en que se formen articulaciones plásticas tengan los mismos signos que las rotaciones en esas articulaciones.
6. Se calcula el valor de la carga de colapso resolviendo una ecuación de equilibrio.
7. Se comprueba que  $M \leq M_p$  en todas secciones.

Resolveremos a continuación unos ejemplos utilizando el método estático semi-gráfico para la determinación de la carga de colapso de varias estructuras sencillas.

Ejemplo 7.1. Viga empotrada en ambos extremos, de longitud  $L$  y momento plástico resistente constante, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida  $W$ .

Resolveremos este primer ejemplo siguiendo paso a paso el procedimiento indicado arriba.

1. Escogemos como incógnitas hiperestáticas los momentos en los extremos de la viga.

2. Trazamos el diagrama de momentos de la estructura isostática obtenida al eliminar las restricciones en los apoyos que dan lugar a la aparición de los momentos en ellos; evidentemente, esa estructura es una viga libremente apoyada en ambos extremos, cuyo diagrama de momentos se muestra en la Fig. 7.1a.

3. Los momentos flexionantes correctivos son constantes a lo largo del eje de la viga, ya que, -- por simetría, los momentos de empotramiento en ambos extremos son iguales entre sí (Fig. 7.1b).

4. Obtenemos el diagrama real de momentos (Fig. 7.1c) superponiendo el correctivo sobre el isostático, y les damos a las incógnitas hiperestáticas los valores necesarios para que se alcance el momento  $M_p$  en un número de secciones suficiente para que la viga se convierta en un mecanismo, lo que se logra igualando los momentos en los extremos y en el centro del claro y haciéndolos iguales a  $M_p$  (Fig. 7.1d).

5. El mecanismo de colapso es el mostrado en la Fig. 7.1c. Los signos indicados en ella corresponden a los momentos flexionantes; puede verse que concuerdan con los sentidos de las rotaciones en las articulaciones.

6. Obtenemos el valor de la carga de colapso de la condición de que el momento isostático en el centro del claro debe ser igual a  $2M_p$ , como se ve en la Fig. 7.1d.

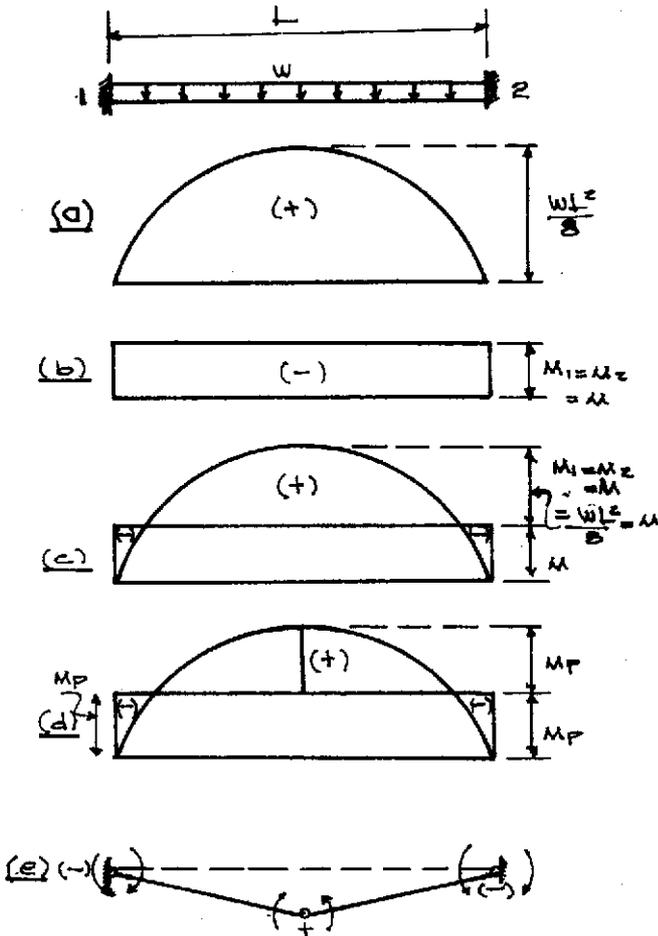


FIGURA 7.1

$$2M_p = \frac{w_c L^2}{8} \quad \therefore \quad w_c = \frac{16M_p}{L^2}$$

7. Evidentemente, en el diagrama de momentos correspondiente a la condición de colapso (Fig. 7.1d)  $M$  es menor o igual a  $M_p$  en todas las secciones.

**Ejemplo 7.2.** Viga empotrada en un extremo y libremente apoyada en el otro, de longitud  $L$  y momento plástico constante, sometida a la acción de cargas concentradas en los cuartos del claro, de las magnitudes indicadas en la Fig. 7.2.

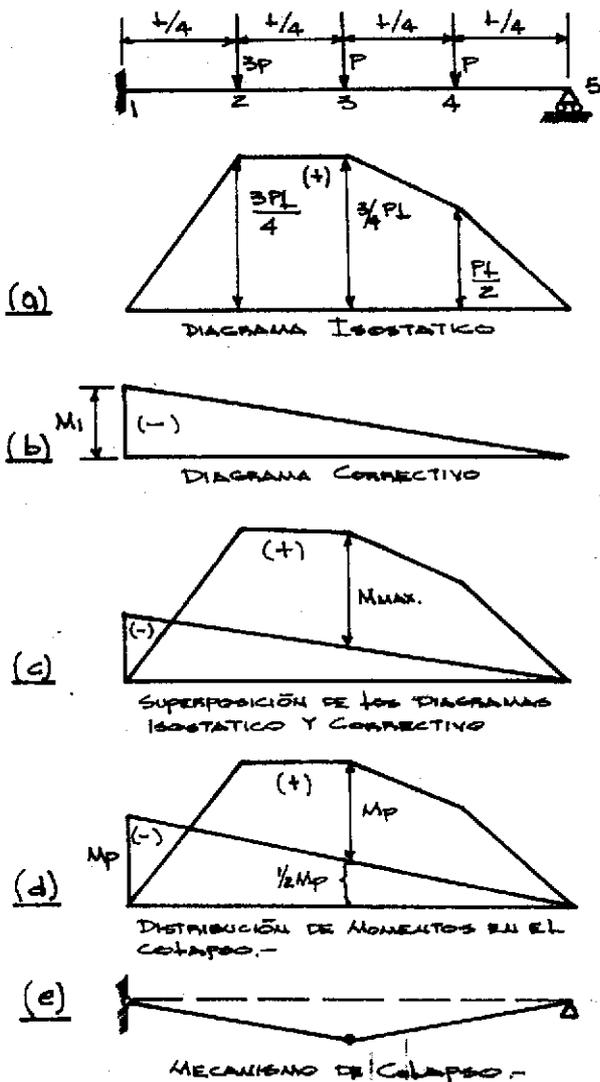


FIGURA 7.2.

Escogemos como incógnita hiperestática el momento en el empotramiento y trazamos el diagrama de momentos flexionantes isostático, correspondiente a la viga libremente apoyada en ambos extremos, obtenida suprimiendo la restricción -- que origina la aparición de dicha incógnita hiperestática (Fig.7.2a).

Enseguida trazamos el diagrama correctivo, triangular, con valor  $M_1$  en el extremo de la izquierda y nulo en el de la derecha, ya que de este lado la viga está libremente apoyada.

En la Fig. 7.2c están superpuestos los dos diagramas, isostático y correctivo.

Para que la viga se convierta en un mecanismo son necesarias únicamente dos articulaciones, es decir, dos secciones en las que los momentos flexionantes sean iguales y de magnitud  $M_p$ ; la distribución de momentos correspondiente es la mostrada en la Fig. 7.2d, y se obtiene girando el diagrama correctivo alrededor del apoyo de la derecha -

hasta igualar el momento en el empotramiento y el momento máximo positi-

vo en la zona central de la viga.

Obtenemos el valor de la carga de colapso del estudio de los momentos en la sección 3. En ella, el momento isostático vale  $(3/4)PL$  y, al mismo tiempo, debe ser igual a  $(3/2)M_p$ . Es decir:

$$M_p = \frac{M_p}{2} = \frac{3}{4} P_0 L \quad \therefore \quad P_0 = \frac{2M_p}{L}$$

Observando el diagrama de momentos correspondientes a la condición de colapso de la Fig. 7.2d, se ve inmediatamente que el momento flexionante no es en ninguna sección mayor que  $M_p$ , y los signos de los momentos concuerdan con los de las rotaciones del mecanismo de falla.

Ejemplo 7.3. Un marco simple de cabezal horizontal, articulado en los dos apoyos, de las dimensiones y sometido a las cargas indicadas en la Fig. 7.3.

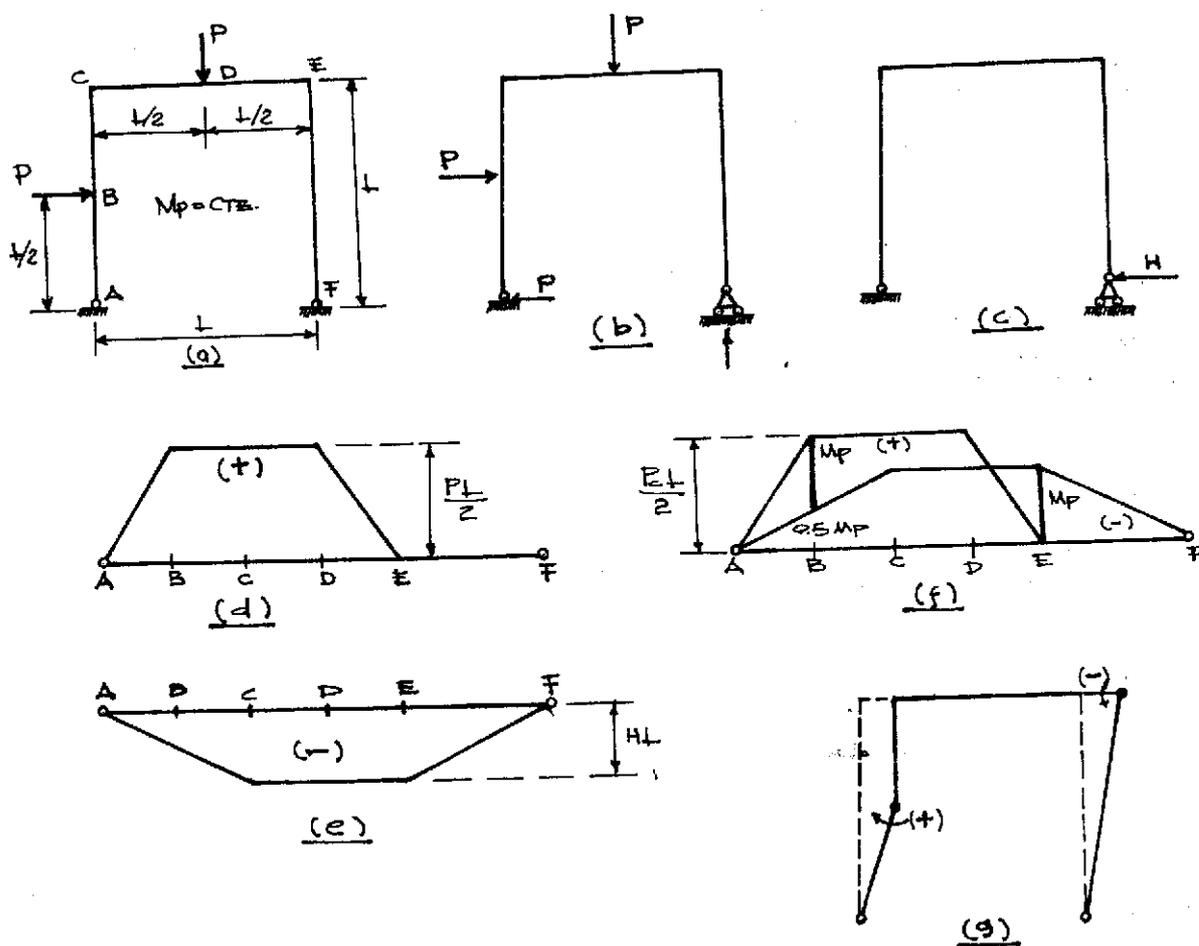


FIGURA 7.3

Escogemos como incógnita hiperestática la reacción horizontal en el a poyo de la derecha; por consiguiente, la estructura isostática es la indicada en la Fig. 7.3b, consistente en un marco articulado en A y libremente apoyado en F (condición de apoyo que se obtiene al suprimir la restricción que impide los movimientos horizontales, que es la que ocasiona la aparición de la reacción horizontal H).

La superposición de las estructuras mostradas en la Fig. 7.3, b y c, nos reproduce la estructura original; por consiguiente, obtendremos el diagrama de momentos flexionantes de ésta, superponiendo el isostático con el correctivo, y encontraremos la condición de colapso superponiendo los dos diagramas y dándole a H un valor tal que aparezca el momento  $M_p$  en un número de secciones suficiente para que la estructura se convierta en un mecanismo.

En las Figs. 7.3d, e y f, se muestran los tres diagramas de momentos, isostático, correctivo y superpuesto, éste con los valores de los momentos correctivos necesarios para que se formen en el marco las dos articulaciones plásticas que hacen falta para la formación del mecanismo de colapso.

Por comodidad, los diagramas se han trazado tomando como base una línea recta horizontal, obtenida desarrollando el marco.

Obtenemos la carga de colapso del estudio del diagrama de momentos de la Fig. 7.3f; en la sección B:

$$1.5M_p = \frac{P_c L}{2} \quad \therefore \quad P_c = \frac{3M_p}{L}$$

El diagrama de colapso se muestra en la Fig. 7.3g. Puede verse que -- los sentidos de los giros en las articulaciones plásticas coinciden con los signos de los momentos en las secciones correspondientes.

### 7.3 METODO ESTATICO ANALITICO

#### (DISTRIBUCION PLASTICA DE MOMENTOS).

Queremos determinar el valor de la carga de colapso de la viga de la Fig. 7.4, utilizando el método estático ( $M_p = \text{cte.}$ ).

Para ello, escogemos como elementos hiperestáticos los momentos en -- los apoyos B y C y trazamos los diagramas de momentos isostáticos y correctivos, mostrados en las Figs. 7.4 b y c. (Debe hacerse notar que los

momentos correctivos en B y C pueden tener valores cualquiera; el único momento fijo es  $M_A$ , que vale necesariamente cero, pues corresponde a un apoyo extremo libre.)

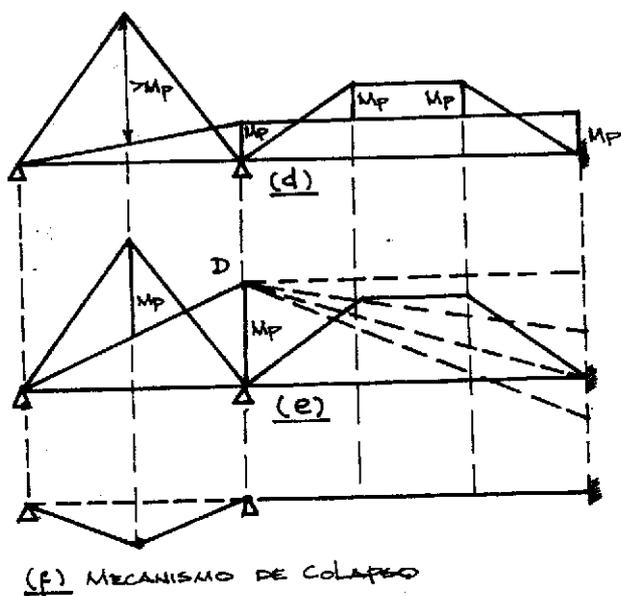
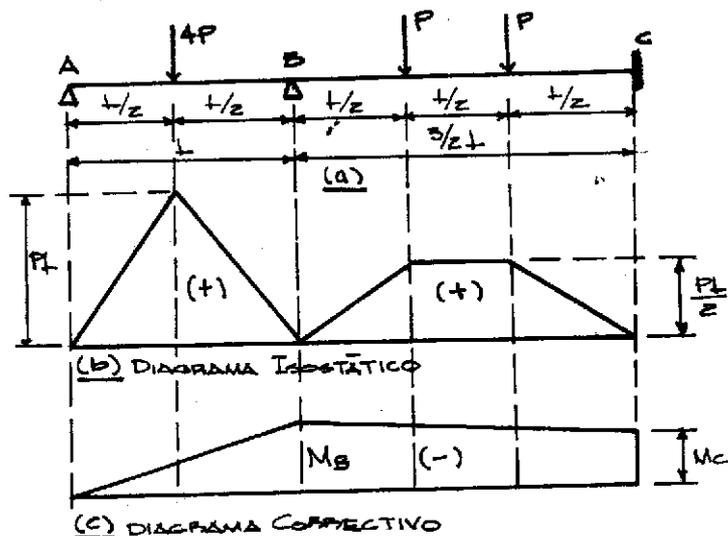


FIGURA 7.4

Estudiemos primero la posibilidad de que la viga falle por colapso plástico -- del tramo BC; para ello, es necesario que aparezcan en este tramo tres articulaciones plásticas, condición a la que corresponde el diagrama de momentos flexionantes de la Fig. 7.4d (dos de las articulaciones plásticas se presentan en los extremos del tramo y la tercera en un punto cualquiera - del tercio central). En esas condiciones, tenemos:

$$\frac{PL}{2} = 2M_p \quad \therefore \quad P = \frac{4M_p}{L}$$

Observando el diagrama de momentos de la viga completa (Fig. 7.4d) vemos que se sobrepasa el valor de  $M_p$  en una amplia zona del primer tramo, AB, de manera -- que la configuración de momentos supuesta no corresponde al colapso de la estructura.

Es evidente que la viga no fallará por colapso del tramo BC, ya que es imposible encontrar una distribución de momentos en él para la que se cumpla la condición de mecanismo sin que se viole la de plasticidad.

El tramo que falla en realidad es el de la izquierda, siendo la dis--

tribución de momentos de colapso la indicada en la Fig. 7.4e, ya que en ella se cumplen simultáneamente las tres condiciones de equilibrio, mecanismo y plasticidad, siempre que el momento flexionante sea menor o igual que  $M_p$  en todos los puntos de BC.

La carga de colapso vale:

$$P_c L = 1.5 M_p \quad \therefore \quad P_c = \frac{1.5 M_p}{L}$$

En el tramo de la derecha, BC, se han trazado varios posibles diagramas correctivos; todos ellos son tramos de recta y pasan por el punto D, pero pueden tener una inclinación cualquiera. De hecho, no sabemos cual es el diagrama real de momentos existente en ese tramo cuando se produce el colapso de la viga, pero esto no tiene importancia en la determinación de la carga de falla, ya que, de acuerdo con el teorema de unicidad nos basta con encontrar un diagrama para el que se cumplan simultáneamente las condiciones de equilibrio, mecanismo y plasticidad, sea o no el real.

Por consiguiente, al trazar cualquier diagrama correctivo que pase por D y para el que  $M \leq M_p$  en todo el tramo BC, queda demostrado que el mecanismo de colapso es el de la Fig. 7.4f y la carga de colapso la calculada arriba.

El problema que acabamos de resolver gráficamente puede ser resuelto también analíticamente, empleando el método de distribución plástica de momentos, al que se le ha dado ese nombre por tener semejanza con el método de Cross de distribución de momentos en el rango elástico.

Al utilizar este método partiremos de una configuración de momentos cualquiera, pero que corresponda a estados de equilibrio entre las cargas exteriores y las barras que componen la estructura, supuestas aislada, y modificaremos posteriormente esos momentos hasta lograr el equilibrio en los nudos, sin deshacer el de cortantes obtenido desde un principio; enseguida iremos modificando los momentos en una serie de ciclos sucesivos, cuidando de no destruir las condiciones de equilibrio, hasta lograr que aparezca el momento  $M_p$  en el número de secciones necesario para que se satisfaga la condición de mecanismo.

Al aplicar este método a la viga continua de la Fig. 7.4 vamos, simplemente, a mover el diagrama correctivo en forma analítica, en vez de gráfica, hasta encontrar la distribución de momentos correspondiente al

colapso.

El diagrama correctivo de una barra que forme parte de una estructura reticular es siempre una línea recta, pero puede tener una inclinación - cualquiera, compatible con las condiciones de apoyo de la barra (en piezas intermedias los momentos correctivos en los extremos pueden tener, - en general, cualquier valor; en los apoyos exteriores libres o articulados de elementos extremos el momento valdrá cero); por consiguiente, al buscar el diagrama de momentos de colapso podemos variar la inclinación del diagrama correctivo de cualquier manera, siempre que sea compatible con las condiciones existentes en los extremos de la barra.

En la Fig. 7.5 se indican algunas formas de diagramas correctivos; debe hacerse notar que a partir de ellos puede obtenerse cualquier diagrama correctivo posible, superponiéndolos adecuadamente y dándoles los valores necesarios, positivos o negativos, a los momentos extremos  $M$ .

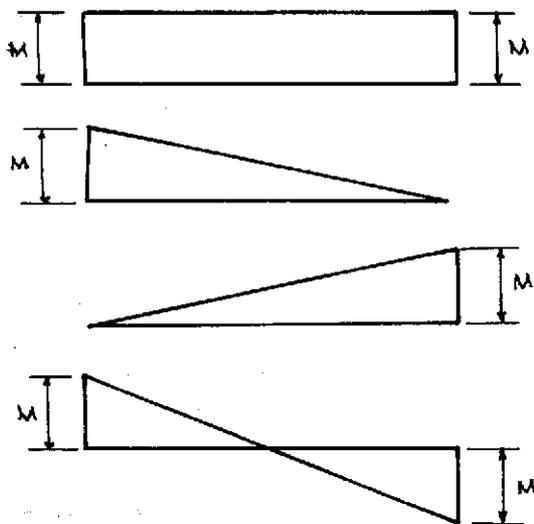


FIGURA 7.5

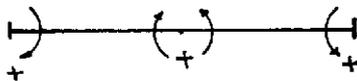


FIGURA 7.6

y bajo las cargas de dos vigas, la primera sometida a una carga concentrada en el centro y la segunda en los tercios del claro, cuando sus diagramas isostáticos se corrigen de las cuatro maneras indicadas en la Fig. 7.5. En las partes inferiores de esas figuras están tabulados los -

En la aplicación analítica del método que estamos discutiendo utilizaremos la convención de signos siguiente: en los extremos de la pieza -- trabajaremos con momentos de barra -- sobre apoyo (B<sub>SA</sub>) y los consideraremos positivos cuando tiendan a producir un giro en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj; en la zona central de la barra serán positivos los momentos flexionantes (de izquierda sobre derecha) cuando actúen en el sentido indicado arriba.

Esta convención de signos se resume en la Fig. 7.6.

En las Figs. 7.7 y 7.8 se muestran las modificaciones que experimentan los momentos en los extremos

valores numéricos de esas modificaciones, correspondientes a momentos ex tremos unitarios.

Si a una distribución de momentos dada correspondiente a un estado de equilibrio le superponemos momentos correctivos cuyos valores guarden -- las relaciones indicadas en cualquiera de los renglones de las tablas de las Figs. 7.7 y 7.8 se obtendrá una nueva distribución en la que, eviden temente, se seguirán satisfaciendo las condiciones de equilibrio.

Para vigas sometidas a otras formas de carga pueden obtenerse tablas de operaciones semejantes a éstas.

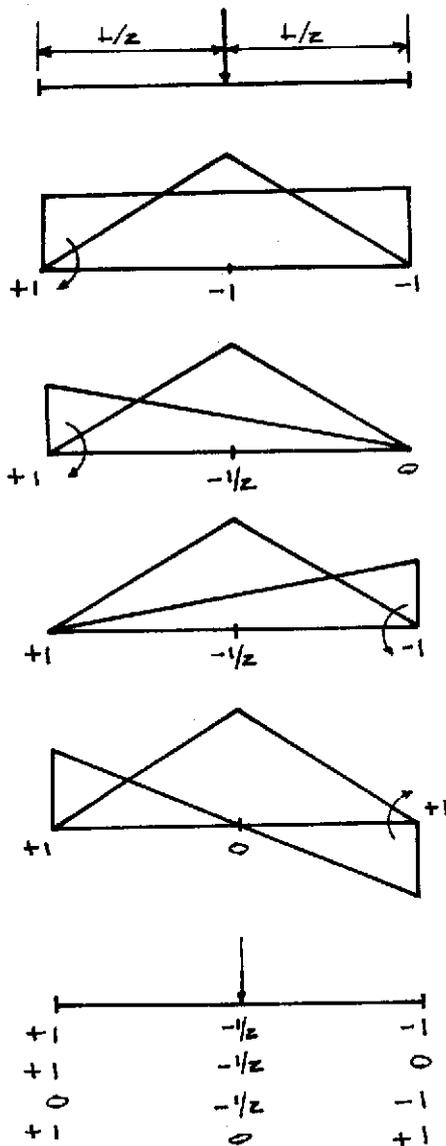


FIGURA 7.7

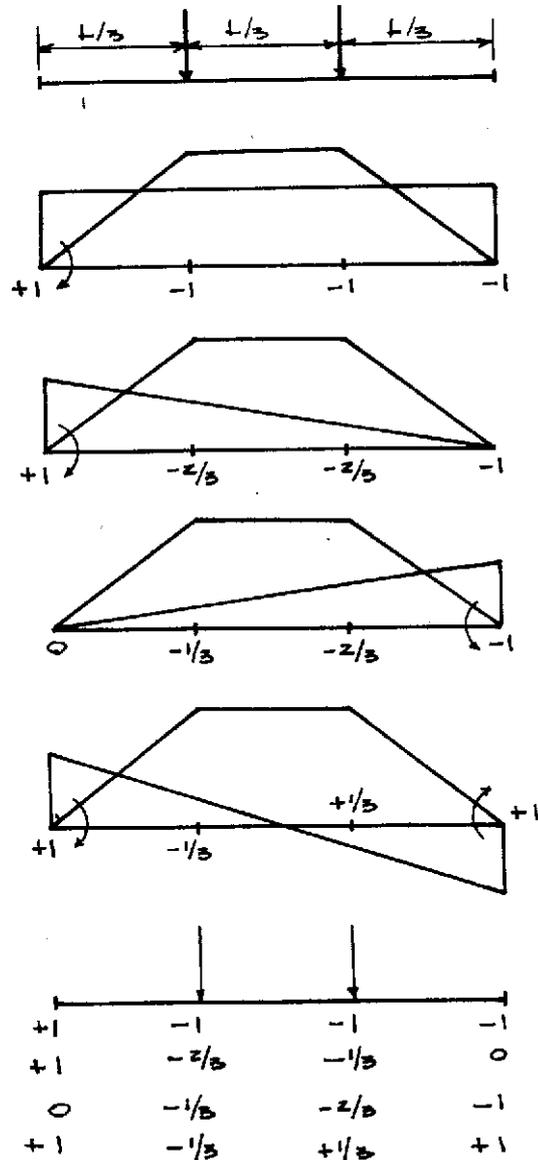


FIGURA 7.8

Por consiguiente, al utilizar el método de distribución plástica de momentos partiremos de diagramas correspondientes a estados de equilibrio de las barras que compongan la estructura, consideradas aisladas, y los modificaremos posteriormente, utilizando tablas de operaciones semejantes a las de las Figs. 7.7 y 7.8, hasta obtener una distribución de momentos para toda la estructura que satisfaga las condiciones de colapso.

Aplicaremos el método a la viga continua de la Fig. 7.4. Tomaremos como configuración de momentos en equilibrio de partida los momentos isostáticos de los dos tramos que componen la viga.

Como únicamente pueden aparecer articulaciones plásticas en los extremos de los tramos (excepto en el A, en el que hay un apoyo libre) y bajo las cargas, sólomente nos interesarán los valores de los momentos en esas secciones.

Empezamos a resolver del problema anotado los valores de los momentos isostáticos en las secciones indicadas arriba (los que corresponden con el diagrama isostático de la Fig. 7.4b), en el renglón I de la Fig. 7.9.

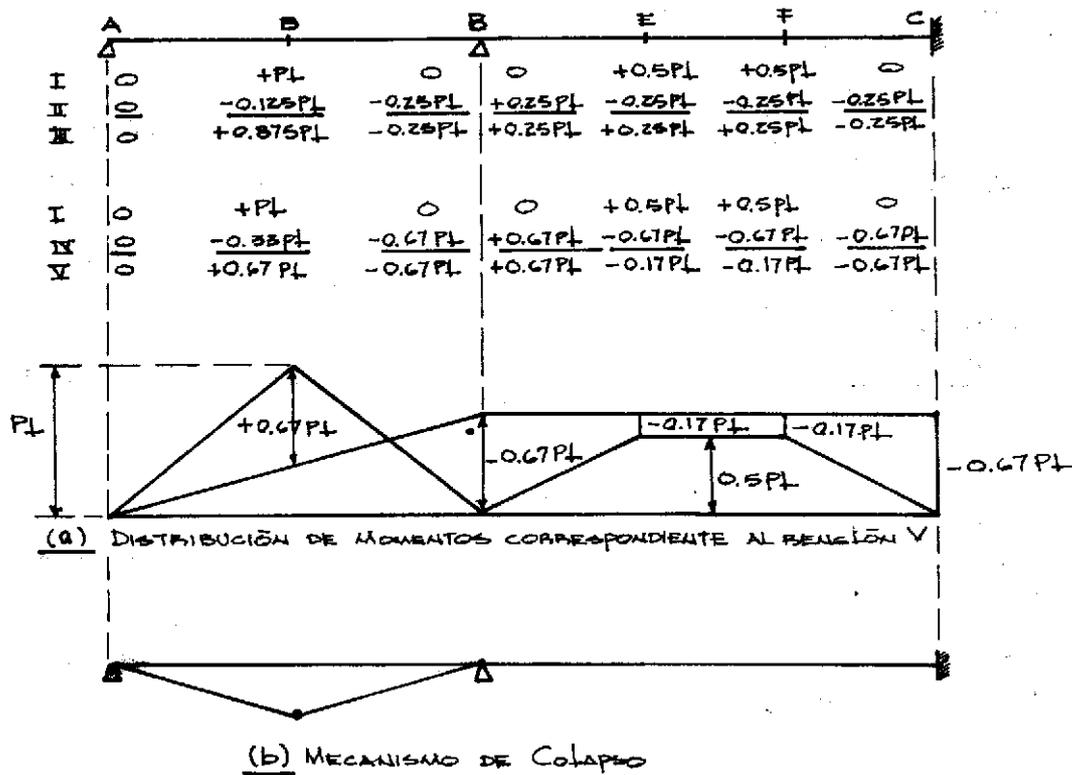


FIGURA 7.9

Tratemos de buscar un mecanismo de falla en el tramo BC; para que se presentase sería necesario que los momentos en B, E, F y C fuesen iguales en valor absoluto, los tres primeros positivos y el último negativo; logramos esta condición introduciendo, de acuerdo con el primer renglón de la tabla de la Fig. 7.8, los momentos del renglón II; al hacerlo se -desequilibra el nudo B, por lo que introducimos en él, del lado izquierdo, un momento de  $-0.25PL$ , al que corresponde un momento igual a  $-0.125PL$  en la sección D, de acuerdo con el tercer renglón de la tabla de la Fig. 7.7.

Sumando los renglones I y II obtenemos los momentos indicados en el III; para que correspondan al colapso del tramo BC es necesario que el momento plástico de la viga valga  $0.25PL$ , con lo que aparecerían las articulaciones plásticas necesarias, pero el momento en D ( $0.875PL$ ) es mayor que  $M_p$ , luego esta distribución de momentos no es posible.

Veamos ahora si falla el tramo AB. Partimos de la misma distribución de momentos (renglón I) e introducimos momentos correctivos (renglón IV) tales que se igualen los valores en las secciones D y B, con los signos adecuados, lo que logramos utilizando el tercer renglón de la tabla de la Fig. 7.7; obtenemos así una distribución de momentos en el tramo AB (renglón V) que será la de colapso si para  $M_p=0.67PL$  logramos encontrar una distribución en el tramo BC en la que no se viole la condición de -plasticidad, lo cual se logra fácilmente introduciendo en B el momento -de  $0.67PL$  necesario para equilibrar el apoyo y utilizando, por ejemplo, el primer renglón de la tabla de la Fig. 7.8. (Nótese que pueden obtenerse otras distribuciones admisibles en BC, por ejemplo, utilizando el segundo renglón de esa misma tabla.)

Obtenemos así la distribución de momentos del renglón V, a la que corresponde el diagrama de momentos a); ésta será la condición de colapso siempre que el momento plástico resistente de la viga sea tal que se formen articulaciones plásticas en D y B, es decir que:

$$M_p = 0.67P_c L \quad \therefore \quad P_c = \frac{M_p}{0.67L} = 1.5 \frac{M_p}{L}$$

Que es el mismo resultado que el obtenido gráficamente.

A continuación, aplicaremos el método de distribución plástica de momentos al análisis de varias estructuras.

**Ejemplo 7.4.** Analizar plásticamente el marco rígido de la Fig. 7.10, aplicando el método de distribución de momentos.

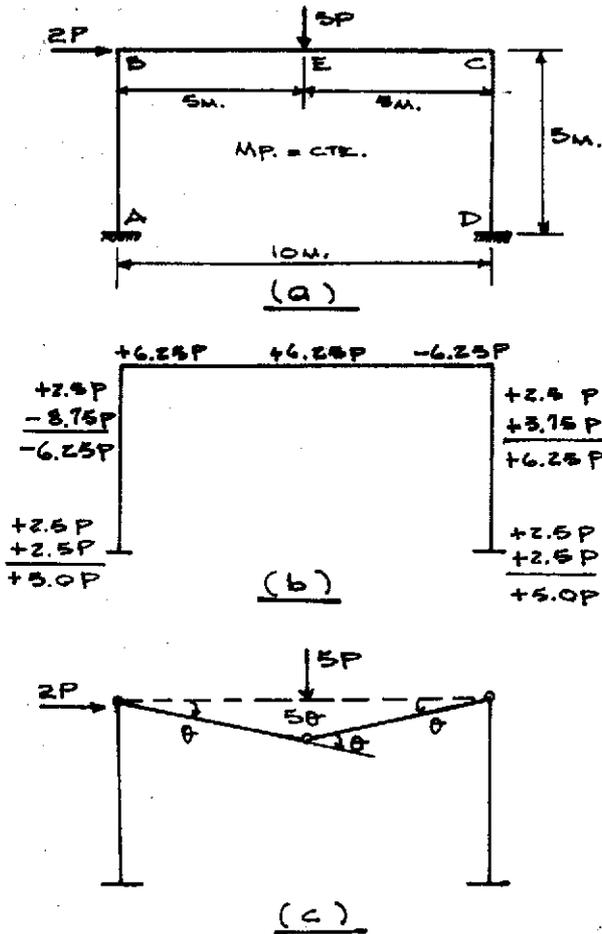


FIGURA 7.10

La distribución de momentos de partida puede ser cualquiera, con la condición de que tanto en el cabezal como en las columnas, consi-derados aislados, corresponda a u-na condición de equilibrio. Esto -implica que la suma de los momen-tos en los cuatro extremos de las dos columnas debe valer  $10P$ , valor que debe mantenerse constante para que se satisfagan las condiciones de equilibrio de fuerzas horizonta-les; cumpliéndose ese requisito, -los momentos en los extremos de -- las columnas pueden tener cual---quier valor.

Iniciaremos nuestros cálculos - con una distribución de momentos - en el cabezal correspondiente a la formación de un mecanismo en él y con momentos iguales en los extre-mos de las dos columnas. Puesto -- que el momento isostático bajo la carga vertical vale  $12.5P$ , aplica-

remos momentos de  $6.25P$  en los extremos y en el centro del cabezal, con los signos adecuados, y de  $2.5P$  en los extremos de las columnas.

Evidentemente, los nudos B y C no están equilibrio; aplicaremos en -- las columnas los momentos necesarios para equilibrarlos, tratando, al -- mismo tiempo, de no modificar los valores que tenemos en el cabezal; pa-ra ello, aplicamos momentos de  $-8.75P$  y  $3.75P$  en los extremos superiores de las columnas y de  $2.5P$  en los inferiores, con lo que equilibramos los nudos manteniendo, al mismo tiempo, tanto el equilibrio de fuerzas hori-zontales como el del cabezal. Obtenemos así la distribución final de mo-mentos de la Fig. 7.10c: si hacemos  $M_p=6.25P$ , esa distribución correspon

derá a la formación de articulaciones plásticas en B, E y C, mientras -- que los momentos en todas las demás secciones son menores que  $M_p$ ; por -- consiguiente, el mecanismo de colapso es el mostrado en la Fig. 7.10c, y la ecuación que resuelve el problema es:

$$6.25P = M_p$$

De aquí obtenemos el valor necesario de  $M_p$ , si conocemos las cargas, o el de la carga crítica, si el momento plástico resistente es dato.

Conocido el mecanismo de colapso, podemos comprobar si hemos llegado al resultado correcto planteando la ecuación de igualdad te=ti:

$$5P50 = 4M_p0 \quad \therefore \quad M_p = \frac{25}{4} P = 6.25P$$

Ejemplo 7.5. El mismo marco del problema anterior, pero duplicando la fuerza horizontal mientras la vertical conserva el mismo valor.

Ahora, los momentos en las columnas deben sumar 20P.

Partimos de la misma distribución de momentos en el cabezal que en el caso anterior y volvemos a distribuir el momento en las columnas en partes iguales en sus extremos.

De nuevo equilibramos los nudos sin modificar los momentos en el cabezal; para ello, aplicamos momentos de -11.25P y 1.25P en los extremos superiores de las dos columnas y de 5.0P en los inferiores, de manera que la suma siga siendo 20P; obtenemos así una distribución de momentos que satisface la condición de equilibrio y que satisficará también la de plasticidad si hacemos que el momento máximo (10P, en las bases de las columnas) sea igual a  $M_p$ . Sin embargo, ésta no es la distribución de momentos correspondiente al colapso, ya que sólo aparece  $M_p$  en dos secciones, lo que no es suficiente para que se forme un mecanismo.

Debemos, entonces, modificar la distribución de momentos, disminuyendo los de las bases de las columnas; para ello, aplicamos en esas secciones momentos de -2.5P, que equilibramos con 3.75P en el extremo superior de la columna izquierda y de 1.25P en el de la derecha; estos momentos -desequilibran los nudos, lo que nos obliga a aplicar otros, iguales y de signo contrarios, en los extremos del cabezal, cuyo equilibrio conservamos distribuyendo el momento de la izquierda según el segundo renglón de la tabla de operaciones de la Fig. 7.7 y el de la derecha según el tercero.

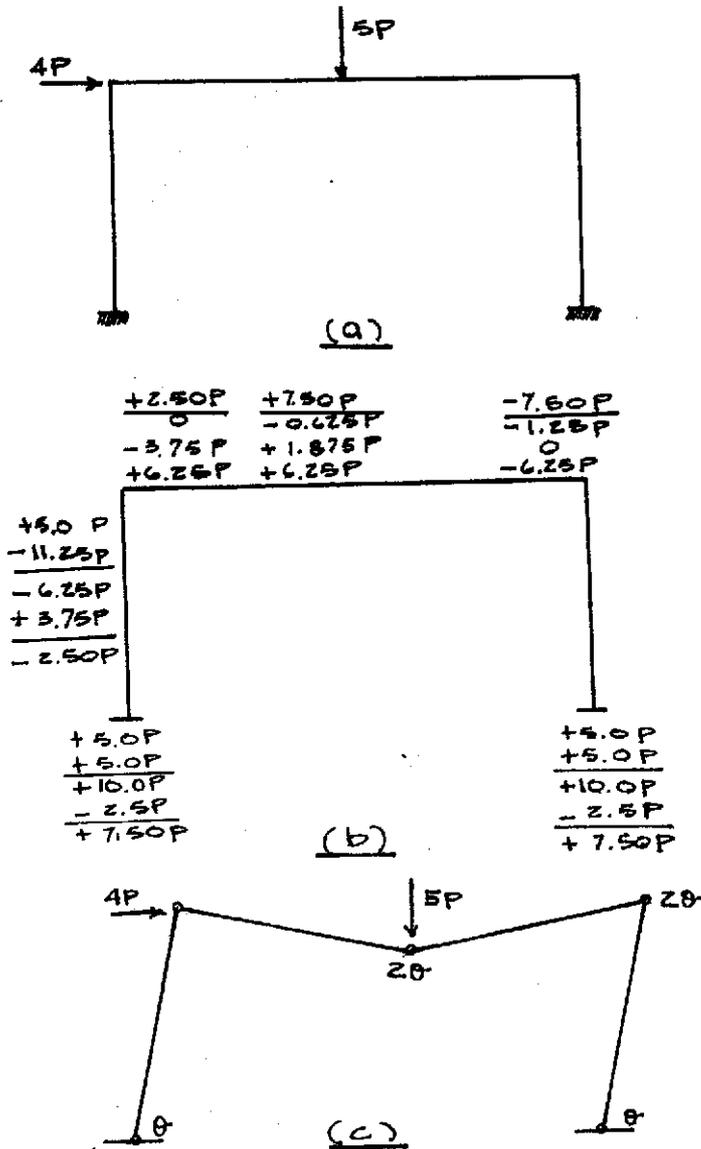


FIGURA 7.11

7.4 EL METODO DE LOS MECANISMOS.

De acuerdo con el teorema del límite superior, la carga correspondiente a un mecanismo supuesto cualquiera es igual o mayor que la carga de colapso de la estructura en consideración; por consiguiente, un método para determinar la carga de colapso de una estructura consiste en escribir una ecuación de trabajo para cada uno de los posibles mecanismos de falla y obtener, por medio de ella, la carga crítica correspondiente: la carga de colapso será la menor de todas.

Este procedimiento, aunque válido siempre, es prácticamente inútil para estructuras complicadas, en las que el número de mecanismos posibles sea muy grande.

Sin embargo, puede demostrarse que todos los mecanismos posibles en u

Obtenemos así una distribución de momentos que cumple con la condición de equilibrio y que cumplirá la de plasticidad si igualamos el momento máximo a  $M_p$ , es decir, si  $7.5P = M_p$ .

Observando los valores finales de los momentos vemos que  $7.5P$  aparece en cuatro secciones, número suficiente para que se forme un mecanismo, que es el de la Fig. 7.11c.

Por consiguiente, el problema está resuelto, y:

$$M_p = 7.5 P$$

Llegamos al mismo resultado del estudio del mecanismo de colapso:

$$4P5\theta + 5P5\theta = 6M_p$$

$$45 P = 6M_p$$

De donde obtenemos:

$$M_p = 7.5 P$$

na estructura sujeta a un sistema de cargas dado pueden obtenerse combinando, de diversas maneras, un número comparativamente pequeño de mecanismos independientes, los que se identifican fácilmente para cualquier estructura. Además, una vez conocidos los mecanismos independientes, se ve que no es necesario investigar todas las combinaciones posibles entre ellos, ya que la combinación buscada es aquella a la que corresponde el valor menor de la carga, y en cualquier caso particular es evidente de inmediato que son pocas las combinaciones que requieren investigación.

De todos modos, en muchos casos queda la duda de si el mecanismo encontrado es realmente el de colapso o si existirá algún otro para el que la carga crítica sea aún menor; por este motivo, una vez determinado el mecanismo que se cree es el de colapso se comprueba si lo es realmente - determinando la distribución de momentos correspondiente y viendo si no se sobrepasa en ninguna sección el momento plástico resistente: si  $M \leq M_p$  en toda la estructura, el mecanismo considerado será necesariamente el de colapso, pues habremos encontrado una distribución de momentos que satisface simultáneamente las tres condiciones de equilibrio, mecanismo y plasticidad.

En caso de que el momento flexionante sea mayor que  $M_p$  en alguna sección de la estructura, el mecanismo estudiado no será el de colapso, pero en general bastará con modificarlo ligeramente para encontrarlo.

Puede verse que, a diferencia del método estático, en el que se parte de una distribución de momentos que satisface las condiciones de equilibrio y plasticidad y se modifica hasta lograr que se cumpla también la de mecanismo, en el método que estamos estudiando se busca, entre todas las distribuciones de momentos que cumplen las condiciones de equilibrio y mecanismo, aquella para la que también se satisface la de plasticidad. Obviamente, por cualquiera de los dos procedimientos se encuentra la única distribución de momentos que cumple las tres condiciones simultáneamente, es decir, la correspondiente al mecanismo real de colapso.

El primer paso para la aplicación del método de los mecanismos a una estructura dada consiste, por consiguiente, en determinar sus mecanismos independientes.

Si la estructura es isostática, bastará con que se forme una sola articulación plástica para que se convierta en un mecanismo; por consiguiente, el número de mecanismos independientes será igual al número de sec

ciones en que pueden presentarse articulaciones plásticas (éstas pueden aparecer en todas las secciones en que el momento sea un máximo, o sea en los puntos de aplicación de cargas concentradas, en los extremos de barras que conecten con un nudo o que estén empotrados exteriormente y en las secciones de fuerza cortante nula en vigas sometidas a carga uniforme).

Veamos el marco de tres articulaciones de la Fig. 7.12a.

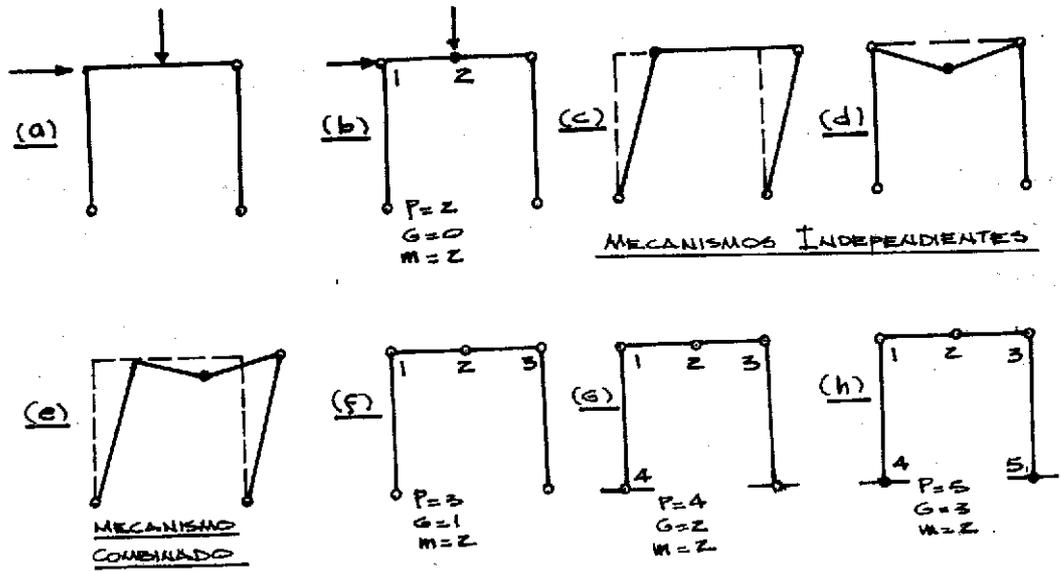


FIGURA 7.12

Existen únicamente dos secciones, 1 y 2, en las que el momento puede presentar un máximo y en las que, por consiguiente, pueden formarse articulaciones plásticas, de manera que existen dos mecanismos independientes, dibujados en las figuras c y d. (A pesar de que para que se forme el mecanismo de la Fig. 7.12d son necesarias dos articulaciones plásticas es preferible considerarlo como independiente, correspondiente a la falla del cabezal como viga, ya que el de la Fig. 7.12e se obtiene por superposición de los mecanismos c y d.)

Si llamamos "p" al número de posibles articulaciones plásticas y "m" al de mecanismos independientes podemos, pues, escribir:

$$m = p$$

Expresión que es válida para cualquier estructura isostática.

Modifiquemos ahora las condiciones del marco, eliminando primero la articulación intermedia y después, sucesivamente, las de los dos apoyos, izquierdo y derecho; al quitarle la primera articulación el marco se ---

vuelve hiperestático de primer grado, de segundo al suprimir la intermedia y la del apoyo izquierdo y de tercero cuando se quitan las tres articulaciones; en cada caso, el número de posibles articulaciones plásticas aumenta en uno, correspondiente a la sección en que se suprime la articulación real (Fig. 7.12, f, g y h).

Sin embargo, el número de mecanismos independientes se conserva, en todos los casos, igual a dos, que es la diferencia, constante, entre el número de posibles articulaciones plásticas y el grado de hiperestaticidad de la estructura, al que llamaremos G. Por consiguiente:

$$m = p - G \quad (21)$$

Esta ecuación, deducida para un caso particular, tiene una validez general, y nos permite determinar fácilmente el número de mecanismos independientes de una estructura dada, ya que tanto p como G son cantidades de determinación sencilla.

Veamos un ejemplo (Fig. 7.13).

Hay once secciones, numeradas en la Fig. 7.13b, en las que es posible que aparezcan articulaciones plásticas, y el grado de hiperestaticidad de la estructura es 6; luego:

$$m = 11 - 6 = 5$$

Es decir, existen cinco mecanismos independientes.

Para determinarlos, supongamos que todas las articulaciones plásticas se presentan al mismo tiempo e imponemos sobre la estructura las restricciones, lineales y angulares, necesarias para evitar su colapso, ya sea total o parcial.

En nuestro ejemplo son necesarias cinco restricciones, cuatro lineales y una angular (Fig. 7.13c).

Si eliminamos cualquiera de ellas, la estructura se convierte en un mecanismo; por consiguiente, el número de mecanismos independientes es igual al número de restricciones, y se pueden determinar fácilmente, ya que cada uno de ellos corresponde a la eliminación de una de dichas restricciones.

Los cinco mecanismos independientes se muestran en la Fig. 7.13, d y h, y puede verse que son de tres tipos diferentes entre sí: los tres primeros corresponden al colapso de una sola viga o columna de la estructu-

ra, en la que actúa una carga concentrada, y se deben a la formación de articulaciones plásticas en los extremos de la pieza y en el punto de aplicación de la carga; el cuarto es ocasionado por el desplazamiento lateral del marco y el quinto corresponde a una rotación del nudo central del cabezal.

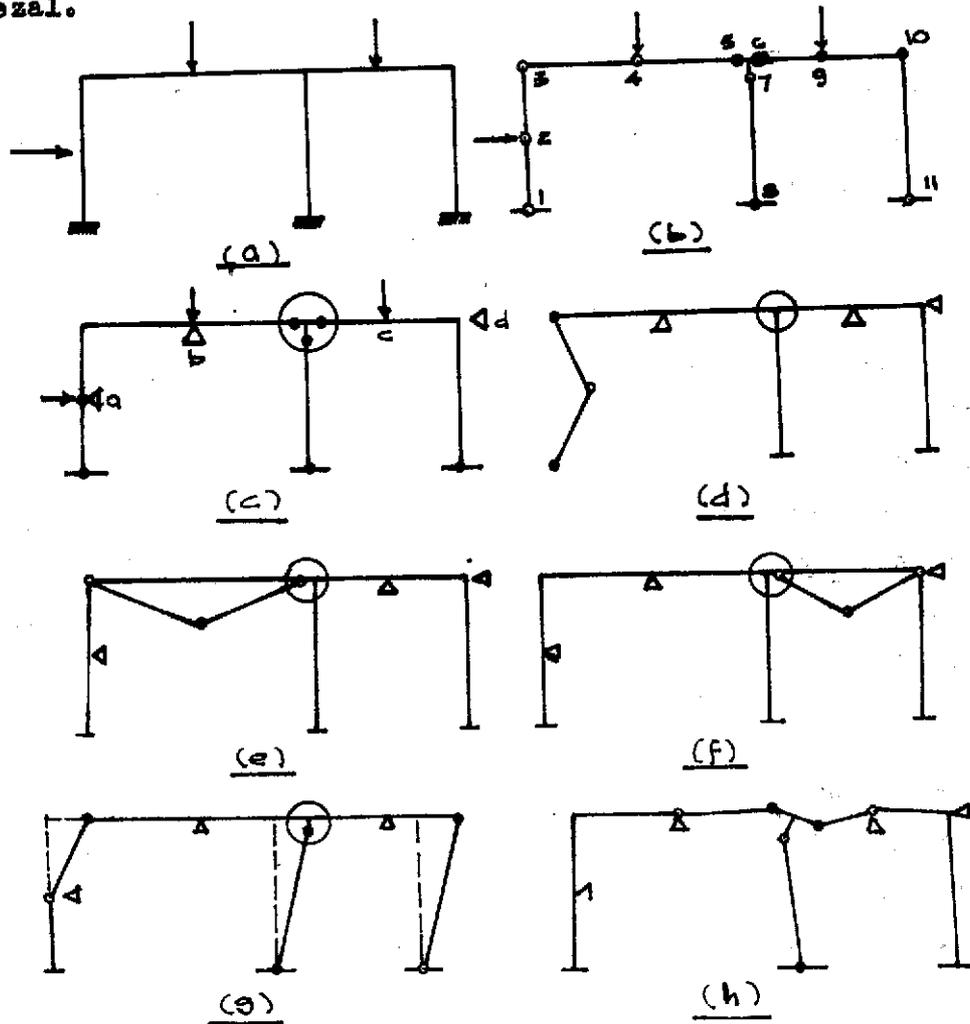


FIGURA 7.13

Por consiguiente, los mecanismos independientes de la estructura en estudio son:

- a) Tres mecanismos tipo viga (reciben este nombre porque son semejantes al mecanismo de colapso de una viga aislada; su número es igual al número de cargas concentradas aplicadas en puntos intermedios de las barras que componen la estructura).
- b) Un mecanismo de colapso lateral (los mecanismos de este tipo co---

responden a los grados de libertad de la estructura y su número es, por consiguiente, igual al de grados de libertad).

- c) Un mecanismo de nudo (sólo son posibles en nudos donde concurren tres o más barras, de manera que para determinar su número en una estructura cualquiera bastará con contar el número de nudos de ese tipo que existan en ella).

La ecuación nos permite calcular el número de mecanismos independientes y siguiendo el procedimiento que acabamos de enunciar podemos determinar como es cada uno de ellos.

Aplicamos estos resultados a dos nuevos ejemplos (Figs. 7.14 y 7.15).

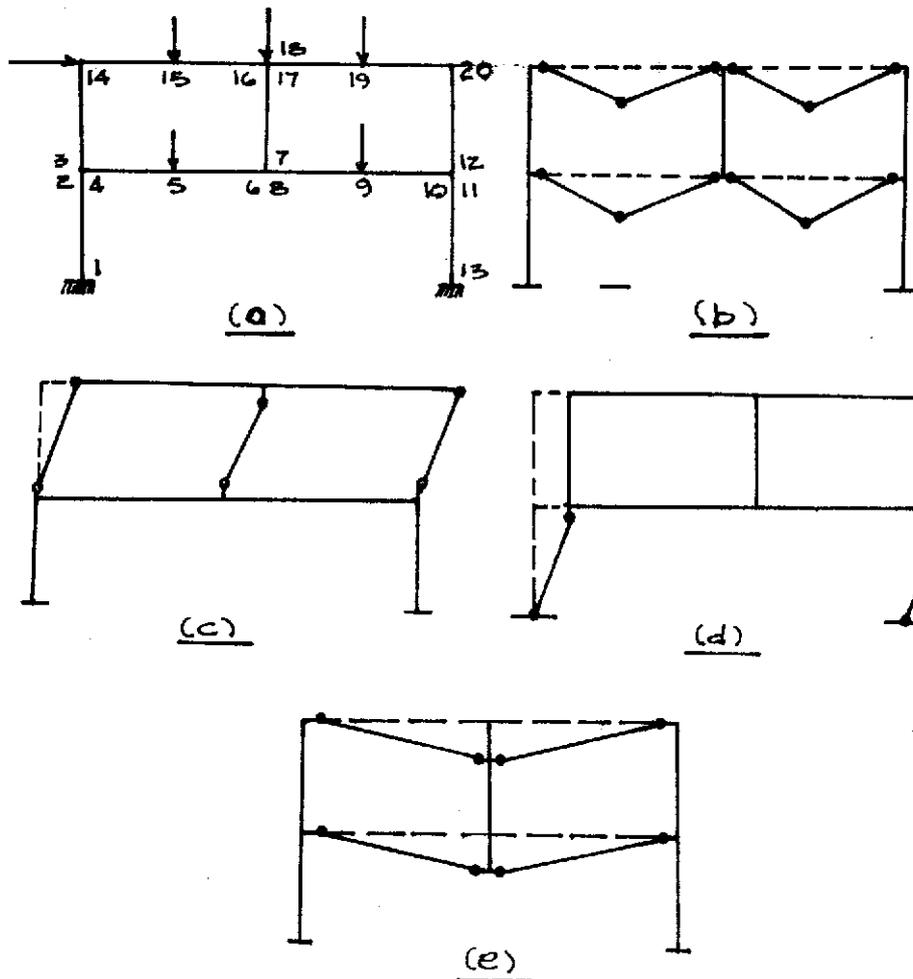


FIGURA 7.14

En la estructura de la Fig. 7.14 se tiene:

$$p = 20, \quad G = 9 \quad \text{y} \quad m = 20 - 9 = 11$$

Los once mecanismos independientes son : cuatro tipo viga (están todos ellos dibujados en la Fig. 7.14b), tres correspondientes a los tres grados de libertad de la estructura (Figs. 7.14c, d y e) y cuatro de nudo - (que no aparecen en la figura).

En la Fig. 7.15:

$$p = 17, \quad G = 7 \quad \text{y} \quad m = 17 - 7 = 10$$

Son cinco mecanismos tipo viga, tres correspondientes a los grados de libertad de la estructura y dos de nudo. En la figura se muestran los tres mecanismos independientes del segundo tipo.

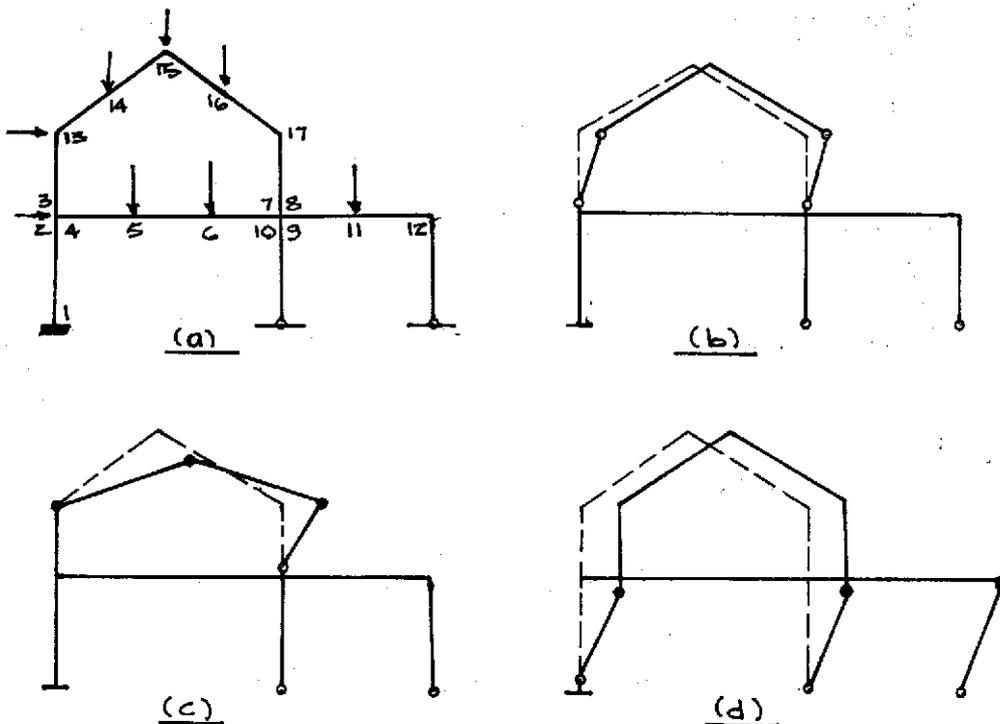


FIGURA 7.15

Como sabemos, el objeto del método de los mecanismos es encontrar un mecanismo, independiente o compuesto, tal que, en todos los puntos,  $M \leq M_p$ ; esta condición se cumplirá en el mecanismo al que corresponda una carga crítica menor.

El proceso que se sigue para determinarlo es el siguiente:

1. Se localizan todas las articulaciones plásticas posibles y el número y características de los mecanismos independientes.

2. Se obtiene, aplicando el principio del trabajo virtual, la carga última correspondiente a cada uno de los mecanismos independientes.

3. Se buscan mecanismos combinados que den cargas de colapso menores que las correspondientes a los independientes. Para ello debe hacerse -- que el trabajo exterior sea lo mayor posible y el interior mínimo, lo -- que se consigue haciendo trabajar el mayor número posible de fuerzas exteriores y disminuyendo el número de articulaciones plásticas. Por este motivo, los mecanismos combinados que se estudien serán siempre de tal naturaleza que en ellos exista un número de articulaciones plásticas menor que la suma de las articulaciones de los mecanismos independientes de cuya combinación tengan origen.

4. Una vez que se ha obtenido un mecanismo que se piensa que sea el de colapso, se comprueba que  $M \leq M_p$  en todas las secciones, con lo que queda demostrado que efectivamente lo es.

5. Si no se cumple la condición anterior, se modifica el mecanismo, hasta obtener uno que sí la satisfaga.

Cabe hacer notar que los mecanismos de nudo no se estudian por separado, ya que no pueden presentarse aislados, a menos que existan pares exteriores concentrados en los nudos; sin embargo, sí deben tenerse en cuenta al investigar los mecanismos combinados.

## 7.5 EJEMPLOS DE APLICACION DEL METODO DE LOS MECANISMOS.

Ejemplo 7.6. Calcular la carga de colapso de la viga continua de la Fig. 7.16a.

Pueden aparecer articulaciones plásticas en cuatro secciones (numeradas en la Fig. 7.16b) y el grado de hiperestaticidad de la estructura es dos, luego el número de mecanismos independientes es:

$$m = 4 - 2 = 2$$

Los dos son mecanismos tipo viga y son los únicos posibles (en este ejemplo no existen mecanismos combinados), de manera que bastará con calcular la carga correspondiente a cada uno de ellos y la menor de las dos será la de colapso.

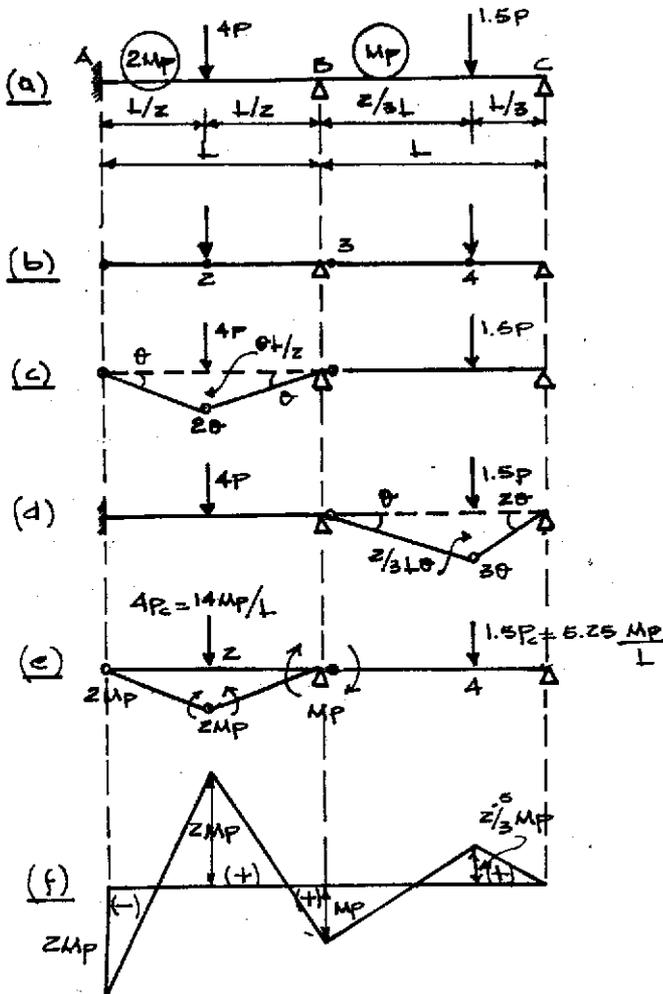


FIGURA 7.16

Obtendremos esas cargas aplicando el principio del trabajo virtual.

Mecanismo I (Fig. 7.16c):

$$4P_1 \frac{9L}{2} = 2M_p (\theta + 2\theta) + M_p \theta$$

Nótese que la articulación número tres aparece inmediata al apoyo central pero a la derecha de éste, debido a que el momento plástico resistente del segundo tramo de la viga es menor que el del primero.

$$2P_1 L = 7M_p \quad \therefore \quad P_1 = \frac{7M_p}{2L} \geq P_c$$

Mecanismo II (Fig. 7.16d):

$$1.5 P_1 \left(\frac{2}{3} L \theta\right) = M_p (\theta + 3\theta)$$

$$P_1 L = 4M_p \quad \therefore \quad P_1 = \frac{4M_p}{L} \geq P_c$$

La carga menor es la correspondiente al mecanismo I, de manera

que éste es el de colapso y:

$$P_c = 3.5 \frac{M_p}{L}$$

En este caso no es necesario comprobar si se cumple la condición de plasticidad ( $M \leq M_p$  en todas las secciones de la estructura), puesto que hemos estudiado todos los posibles mecanismos de falla; sin embargo, haremos esa comprobación, como ilustración del método a seguir.

Sabemos que en el instante de la falla  $M \leq M_p$  en todos los puntos del primer tramo de la viga, y para comprobar si esa condición se cumple o no en el segundo, nos bastará con calcular el momento en la sección 4.

Para ello, hemos de hacer una nueva figura (Fig. 7.16e) en la que indicamos los momentos conocidos, con su sentido e intensidad (en las sec-

ciones en que se forman las articulaciones plásticas), y las fuerzas exteriores, éstas en función de  $M_p$ .

El momento en 4 lo calculamos en una forma semi-gráfica, en la Fig. - 7.17.

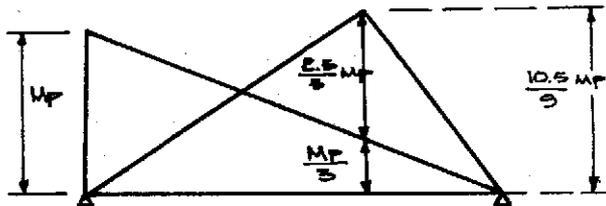


FIGURA 7.17

El momento isostático en el punto de aplicación de la carga vale:

$$5.25 \frac{M_p (2/3)L(1/3)L}{L} = \frac{10.5}{9} M_p$$

Por consiguiente, el valor del momento final en 4 es:

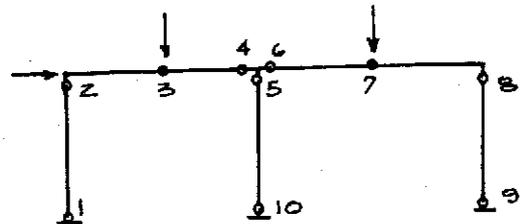
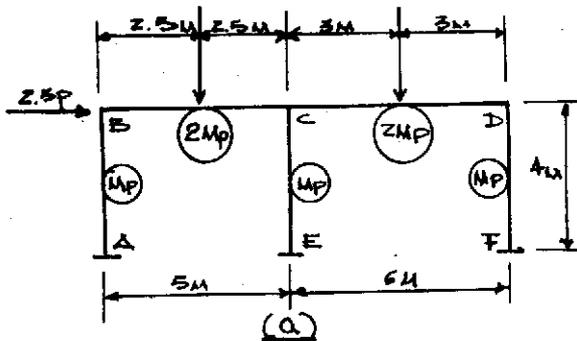
$$M_4 = \frac{10.5}{9} M_p - \frac{1}{3} M_p = \frac{2.5}{3} M_p < M_p$$

Puesto que  $M_4 < M_p$ , se cumple la condición de plasticidad.

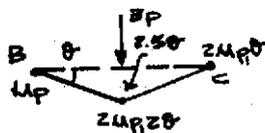
En la Fig. 7.16f se muestra el diagrama de momentos flexionantes en el instante del colapso.

Ejemplo 7.7. Calcular el valor de  $P$  para el que se produce el colapso del marco de la Fig. 7.18a.

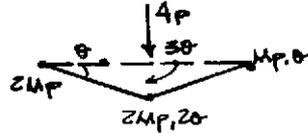
En la Fig. 7.18b se muestran todas las posibles articulaciones plásticas; nótese que en los nudos B y D se indican en las columnas, ya que como su momento plástico resistente es menor que el de las vigas, será en ellas donde aparezcan.



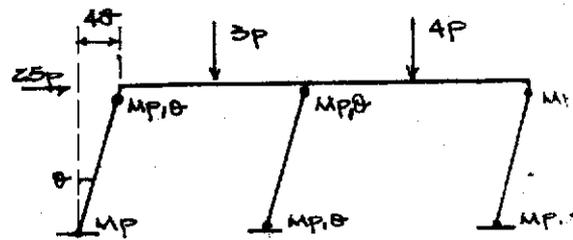
(b)



(c) MECANISMO I



(d) MECANISMO II



(e) MECANISMO III

FIGURA 7.18

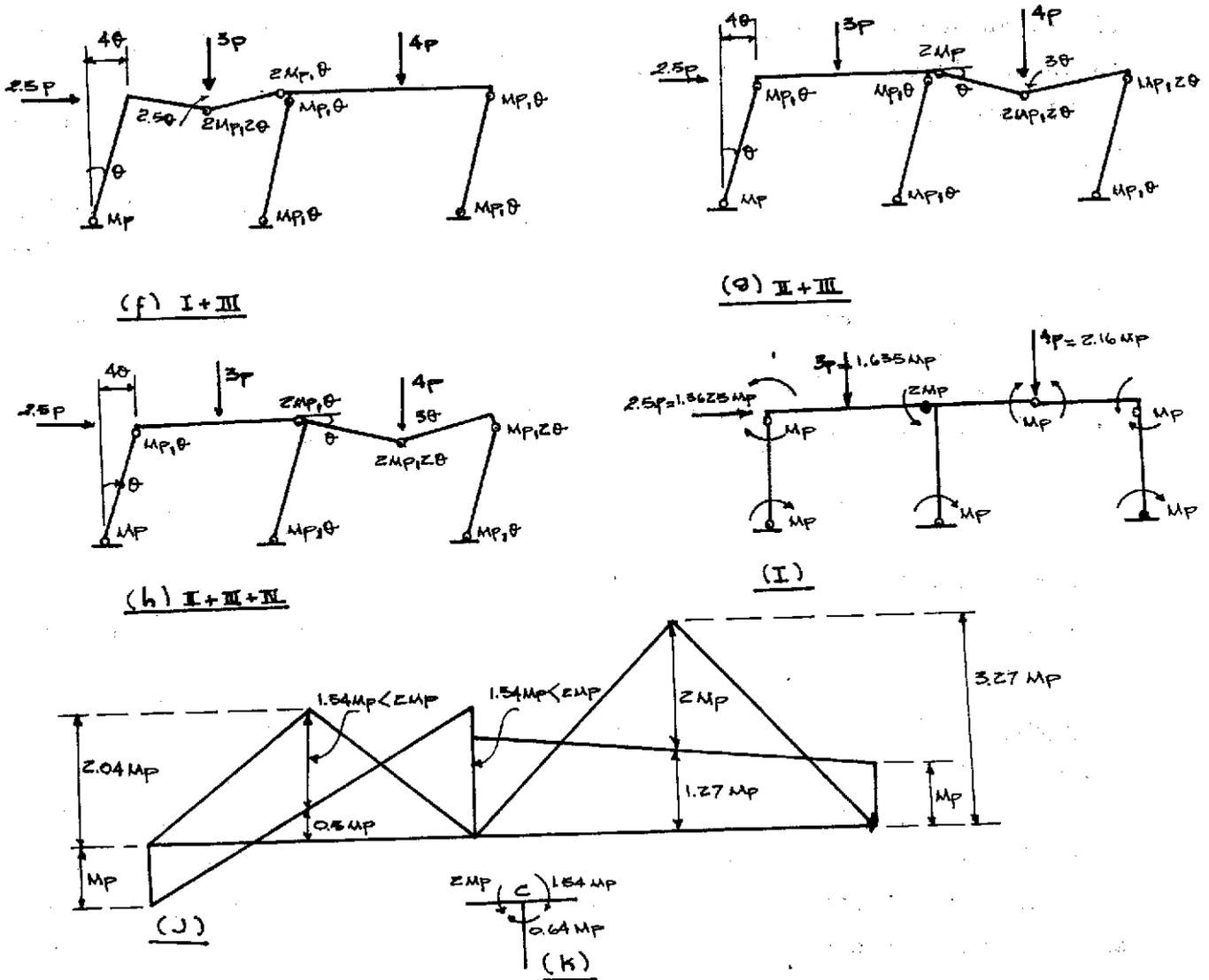


FIGURA 7.18 (CONTINUACIÓN)

Hay diez secciones en que pueden presentarse articulaciones plásticas; y el grado de hiperestaticidad del marco es seis; por consiguiente, existen cuatro mecanismos independientes, de los cuales dos son tipo viga, - el tercero corresponde al grado de libertad de la estructura (falla lateral) y el otro es un mecanismo de nudo.

En las Figs. 7.18c, d y e aparecen los tres primeros mecanismos independientes (como sabemos, el correspondiente al nudo no puede presentarse aislado); aplicando el principio del trabajo virtual, calculamos las cargas de colapso de cada uno de ellos:

$$I. \quad 3P_1 \cdot 2.5\theta = M_p\theta + 2M_p \cdot 3\theta \quad \therefore \quad P_I = 0.93 M_p \geq P_c$$

$$\text{II. } 4P_{\text{II}} \cdot 3\theta = 2M_p \cdot 3\theta + M_p \theta \quad \therefore P_{\text{II}} = 0.58 M_p \geq P_c$$

$$\text{III. } 2.5 P_{\text{III}} \cdot 4\theta = 6M_p \theta \quad \therefore P_{\text{III}} = 0.6 M_p \geq P_c$$

Las cargas correspondientes a los mecanismos II y III son muy semejantes entre sí, y bastante menores que la obtenida al estudiar el primero; por consiguiente, lo probable es que el mecanismo de colapso sea uno de esos dos u otro obtenido combinándolos; sin embargo, como ejercicio, estudiaremos también el mecanismo combinado de I y III. (Figs. 7.18f y g.)

$$\text{I} + \text{III. } 2.5 P \cdot 4\theta + 3P \cdot 2.5 \theta = M_p \cdot 5\theta + 2M_p \cdot 3\theta \quad \therefore P_{\text{I,III}} = 0.64 M_p \geq P_c$$

$$\text{II} + \text{III. } 2.5 P \cdot 4\theta + 4P \cdot 3\theta = M_p \cdot 7\theta + 2M_p \cdot 3\theta \quad \therefore P_{\text{II,III}} = 0.593 M_p \geq P_c$$

Como era de esperarse, la combinación de los mecanismos II y III dio una carga menor que la obtenida al combinar I y III; sin embargo, esa carga es ligeramente mayor que la correspondiente al mecanismo independiente II.

Trataremos de obtener un valor menor de la carga de colapso combinando el mecanismo II-III con el IV (Fig. 7.18h), al que corresponde la carga de colapso siguiente:

$$2.5 P \cdot 4\theta + 4P \cdot 3\theta = M_p \cdot 6\theta + 2M_p \cdot 3\theta \quad \therefore P_{\text{II,III,IV}} = 0.545 M_p \geq P_c$$

Aparentemente ésta es la carga real de colapso de la estructura; sin embargo, lo comprobaremos viendo si para ella se satisface o no la condición de plasticidad.

En la Fig. 7.18i se han dibujado todos los momentos conocidos (en las secciones en que aparecen articulaciones plásticas) y se han anotado los valores de las cargas que originan esas articulaciones plásticas, en función de  $M_p$ ; la estructura es isostática en el instante del colapso.

En la Fig. 7.18j se comprueba, utilizando un método gráfico, que  $M \leq M_p$  a lo largo de todo el cabezal, y en la 7.18k se obtiene el valor del momento en el extremo superior de la columna central necesario para que el nudo C esté en equilibrio; este momento es también menor que  $M_p$ , luego se satisface la condición de plasticidad en toda la estructura.

Falta únicamente chequear el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$1.3625 M_p \cdot 4 = 5.45 M_p$$

La suma de momentos en los dos extremos de las tres columnas es 5.46-

$M_p = 5.45 M_p$ . Por lo que queda demostrado que el mecanismo de la Fig. 7.18h es el de colapso y que las cargas que ocasionan la ruina de la estructura son las de la Fig. 7.18i, correspondientes a  $P_c = 0.545 M_p$ .

En el ejemplo anterior la estructura es isostática en el instante del colapso, de manera que puede determinarse si se satisface o no la condición de plasticidad utilizando únicamente condiciones de equilibrio; además, la distribución de momentos de colapso queda completamente determinada.

No sucede siempre lo mismo, ya que en muchas ocasiones el colapso es parcial, es decir, el mecanismo correspondiente abarca únicamente una parte de la estructura, mientras que el resto sigue siendo hiperestático; en estos casos no puede obtenerse la distribución de momentos en el colapso más que haciendo un estudio elástico de la estructura en ese instante, lo que generalmente no se justifica, puesto que para estar seguros de que el mecanismo supuesto es el de colapso nos basta con encontrar una distribución de momentos cualquiera para la que se satisfaga la condición de plasticidad, aunque no sea la real.

Ilustraremos este caso volviendo a estudiar la estructura del ejemplo anterior, pero aumentando la carga que obra en la viga CD a  $8P$ , mientras que todas las demás permanecen iguales (Fig. 7.19a).

Los mecanismos son los mismos que antes, puesto que no dependen de las intensidades de las cargas, y a todos ellos les corresponde la misma carga crítica excepto al II (Fig. 7.19b), cuya carga crítica se modifica al cambiar la intensidad de la fuerza exterior que obra sobre la viga CD.

Para este mecanismo tenemos ahora:

$$8P \cdot 3\theta = 2M_p(\theta + 2\theta) + M_p\theta \quad \therefore \quad P = 0.29 M_p \geq P_c$$

Esta es, probablemente, la carga de colapso de la estructura; lo será efectivamente si podemos encontrar una distribución de momentos, correspondiente a ella, para la que  $M \leq M_p$  en todas las secciones.

Los únicos momentos que conocemos en el instante del colapso son los encerrados en un marco en la Fig. 7.19c; por consiguiente, la estructura no es isostática, ya que no sabemos nada respecto a los valores de los momentos existentes en el tablero de la izquierda (ABCF) ni en la base de la columna ED.

Trataremos de encontrar una distribución de momentos para la que se -

satisfaga la condición de plasticidad utilizando el método de distribución plástica de momentos; partimos de los valores conocidos en la viga CD (los cuales no pueden modificarse) y aplicamos a la BC los correspondientes a una viga libremente apoyada (cero en los extremos, 1.09 en el centro).

Equilibramos el nudo central aplicando un momento de  $-2.00$  a la viga BC, el que transmitimos al resto de la viga como se muestra en la Fig. 7.19c. Nos falta únicamente ahora que se satisfaga la condición de que la suma de fuerzas horizontales valga cero: para ello, los momentos en los extremos de las columnas deben sumar  $0.726M_p \cdot 4 = 2.90M_p$ , lo que se logra, por ejemplo, aplicando momentos de  $0.63M_p$  en las bases de dos columnas y de  $0.64M_p$  en la otra. Obtenemos así una distribución de momentos estáticamente admisible y para la que  $M \leq M_p$  en todas las secciones de la estructura, luego el mecanismo mostrado en la Fig. 7.19b es el de colapso, y la carga crítica vale:

$$P_c = 0.29 M_p$$

Ejemplo 7.8. Obténgase el valor del momento plástico resistente  $M_p$  necesario para que la estructura mostrada en la Fig. 7.20a falle cuando las cargas que obran sobre ella alcancen los valores indicados.

De acuerdo con el teorema del límite superior, la carga correspondiente a un mecanismo supuesto es siempre mayor o igual que la de colapso o, si se conocen las cargas de colapso, como en este caso, el momento plástico resistente obtenido por medio de un mecanismo cualquiera, es siempre menor o igual que el momento plástico necesario. Por consiguiente, de entre todos los mecanismos posibles tenemos que encontrar aquel al que corresponde el valor máximo de  $M_p$ .

En la estructura en estudio pueden aparecer articulaciones plásticas en doce secciones (Fig. 7.20b) y su grado de hiperestaticidad es seis, luego:

$$m = p - G = 12 - 6 = 6$$

Existen seis mecanismos independientes, dos de tipo viga, dos correspondientes a los grados de libertad del marco y dos de nudo; los cuatro primeros se muestran en las Figs. 7.20c a f, y las cargas críticas correspondientes son:

1.  $3 \cdot 3\theta = 4M_{p1}\theta \quad \therefore M_{p1} = 2.25 Tm \leq M_p$
2.  $4 \cdot 3\theta = 8M_{p2}\theta \quad \therefore M_{p2} = 1.50 Tm \leq M_p$
3.  $2 \cdot 4\theta = 4M_{p3}\theta \quad \therefore M_{p3} = 2.00 Tm \leq M_p$
4.  $2 \cdot 4\theta + 4 \cdot 4\theta = 8M_{p4}\theta \quad \therefore M_{p4} = 3.00 Tm \leq M_p$

En las Figs. 7.20g a j se muestran varios mecanismos combinados; (nótese que los mecanismos i y j están designados por 3+4+2 y 3+4+2+1, pero en realidad corresponden a la superposición de los mecanismos de viga -- con el 3+4 con giros en los nudos C y D, mostrado en h, lo mismo sucede con el mecanismo l).

- 3 + 4.  $2 \cdot 8\theta + 4 \cdot 4\theta = 12 M_p\theta \quad \therefore M_{p_{3+4}} = 2.67 Tm \leq M_p$
- 3 + 4 + giros en C y D.  $2 \cdot 8\theta + 4 \cdot 4\theta = 10 M_p\theta \quad \therefore M_{p_{3+4+g}} = 3.2 Tm \leq M_p$
- 3 + 4 + 2.  $2 \cdot 8\theta + 4 \cdot 4\theta + 4 \cdot 3\theta = 12 M_p\theta \quad \therefore M_{p_{3+4+2}} = 3.15 Tm \leq M_p$
- 3 + 4 + 2 + 1.  $2 \cdot 8\theta + 4 \cdot 4\theta + 3 \cdot 3\theta + 4 \cdot 3\theta = 16 M_p\theta$   
 $\therefore M_{p_{3+4+2+1}} = 3.31 Tm \leq M_p$

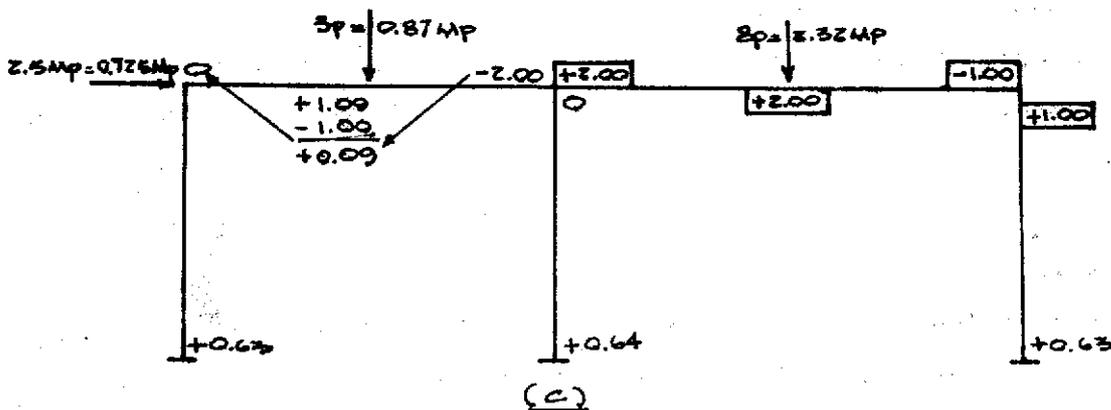
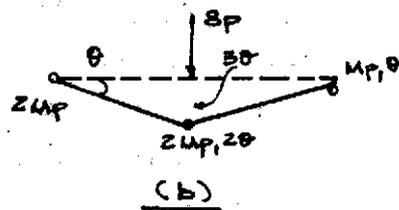
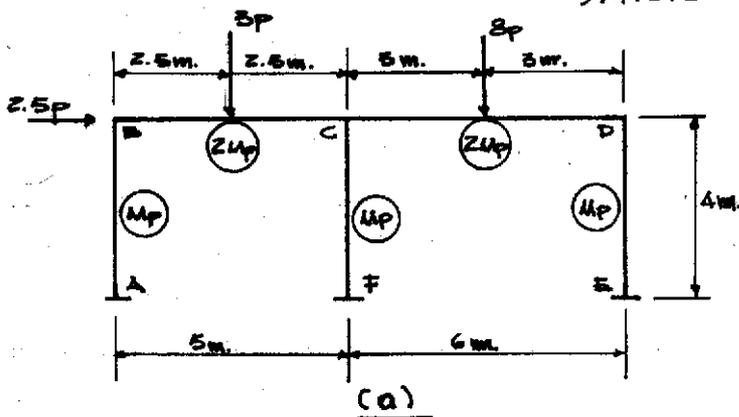


FIGURA 7.19

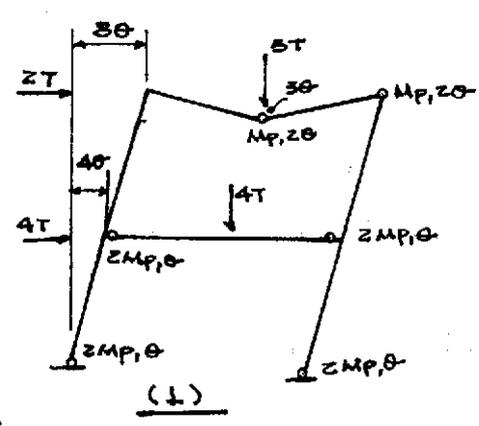
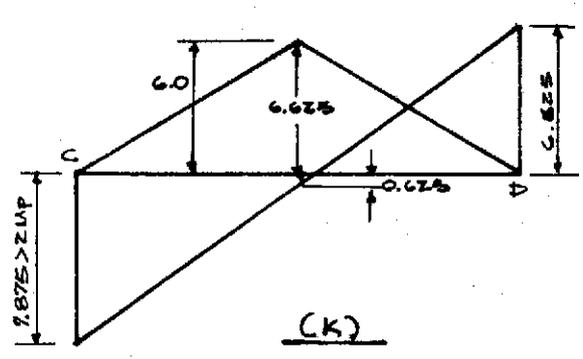
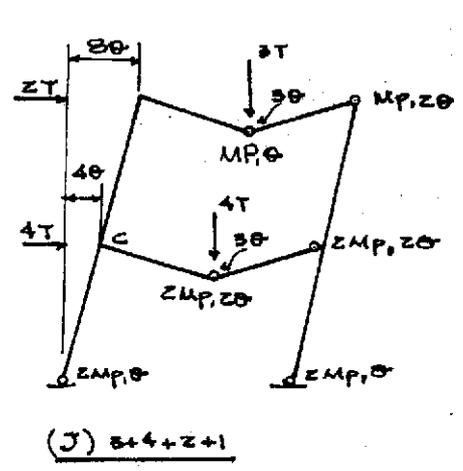
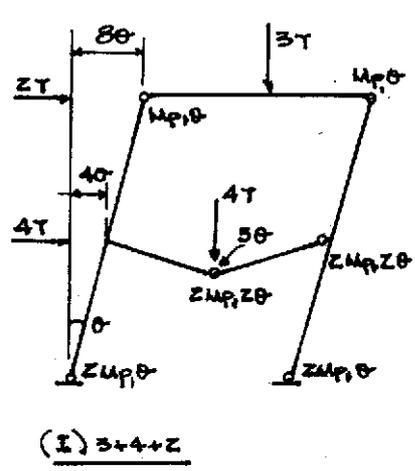
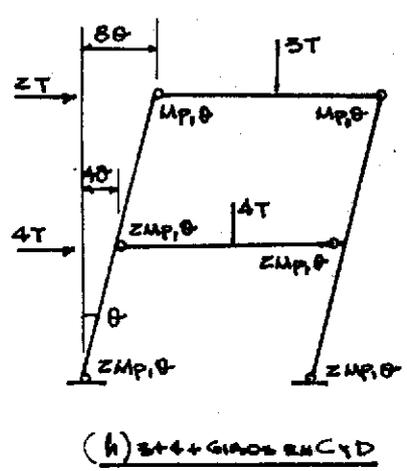
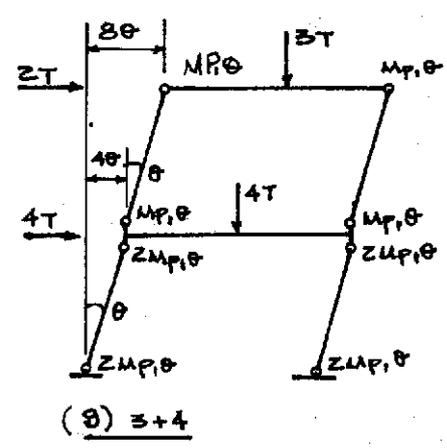
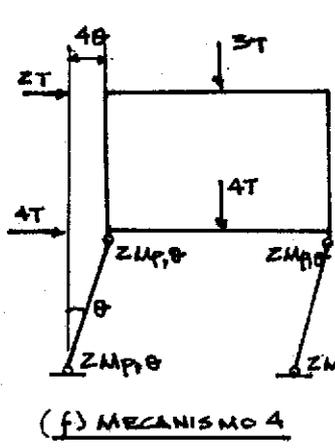
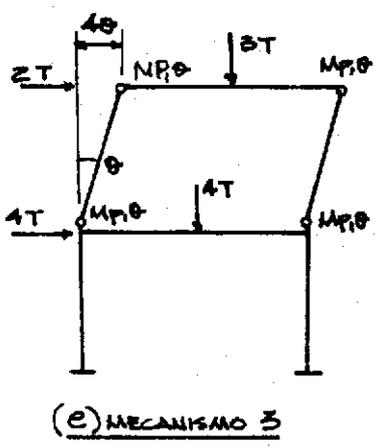
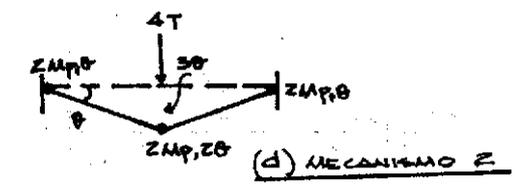
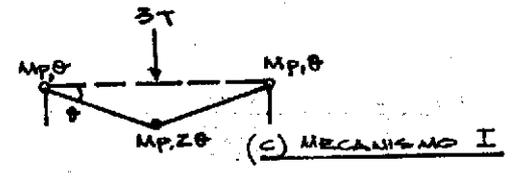
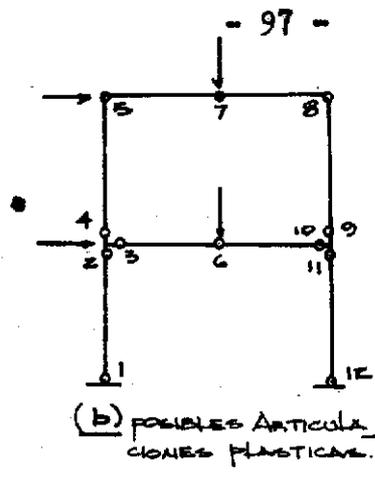
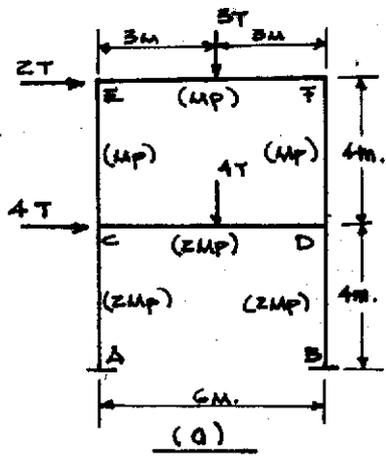


FIGURA 7.20

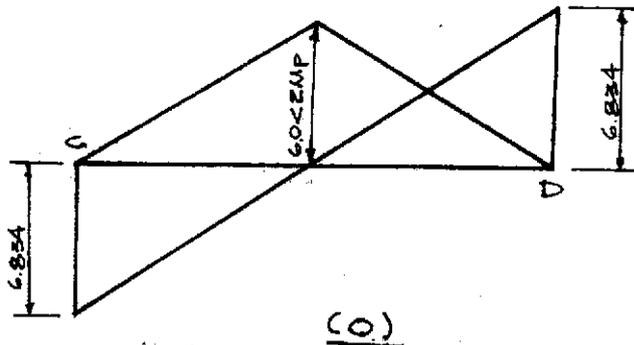
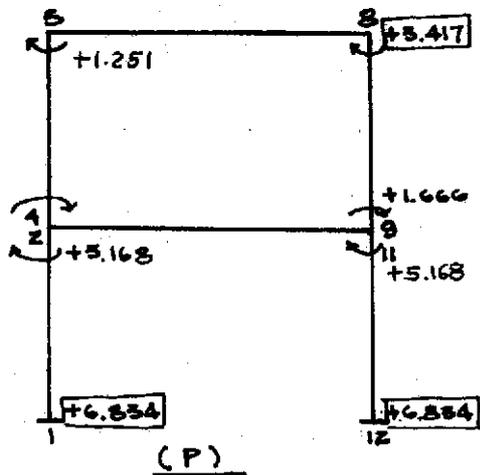
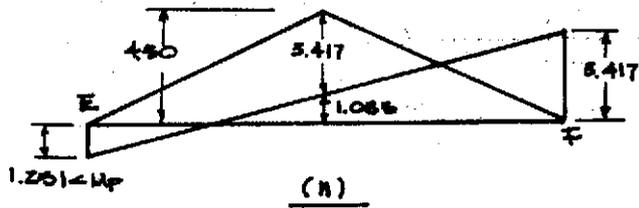
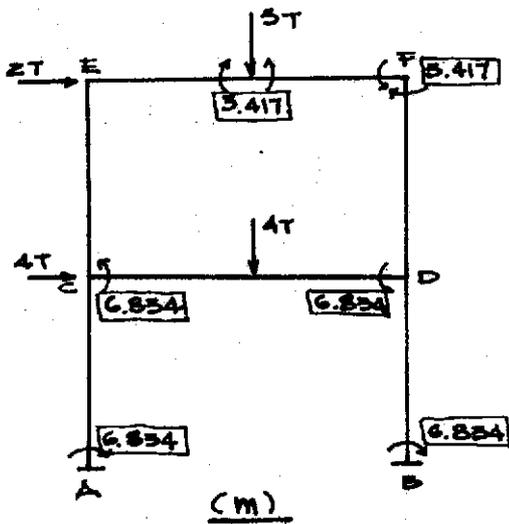


FIGURA 7.20 (CONTINUACION)

Durante el desarrollo del problema puede parecer que éste es el mecanismo de colapso; sin embargo, el trazo del diagrama de momentos de la viga CD, correspondiente a la formación de articulaciones en el centro del claro y en el extremo de la derecha permite ver que el momento en C es mayor que  $2M_p$ ; por consiguiente, puesto que se viola la condición de plasticidad, el mecanismo de la Fig. 7.20j no es el de colapso.

Estudiamos ahora el mostrado en la Fig. 7.20l:

$$3 + 4 + 1. \quad 2 \cdot 8\theta + 4 \cdot 4\theta + 3 \cdot 3\theta = 12M_p \quad \therefore M_p_{3+4+1} = 3.417 T_m \leq M_p$$

Este mecanismo sí es el real de colapso, ya que para él se satisface la condición de plasticidad (véase las Figs. 7.20n, o y p).

En la Fig. 7.20p se comprueba que se cumple la condición de equilibrio de suma de fuerzas horizontales; en efecto, los momentos en las columnas del segundo nivel deben sumar  $2 \cdot 4 = 8Tm$  y los de las columnas del primer nivel  $(2+4)4 = 24Tm$ ; los momentos encerrados en marcos son fijos, ya que corresponden a secciones en que aparecen articulaciones plásticas y el subrayado lo es también, pues se ha obtenido del equilibrio del nudo E; los demás valores son supuestos, pero tales que satisfagan el equilibrio de los nudos y, al mismo tiempo, sumen las cantidades obtenidas arriba.

El análisis de una estructura por el método de los mecanismos puede hacerse obteniendo las ecuaciones correspondientes a los mecanismos combinados por suma de las deducidas para los independientes, sin necesidad de dibujar todos los mecanismos posibles; en ocasiones, este procedimiento algebraico resulta conveniente; lo ilustraremos aplicándolo al problema que acabamos de resolver, siguiendo los pasos indicados en la Fig. -- 7.20.

Empezamos por escribir las ecuaciones de los mecanismos independientes:

Mec. 1.	$9\theta = 4Mp_1\theta$	$\therefore$	$Mp_1 = 2.25 Tm \leq Mp$
Mec. 2.	$12\theta = 8Mp_2\theta$	$\therefore$	$Mp_2 = 1.50 Tm \leq Mp$
Mec. 3.	$8\theta = 4Mp_3\theta$	$\therefore$	$Mp_3 = 2.00 Tm \leq Mp$
Mec. 4.	$24\theta = 8Mp_4\theta$	$\therefore$	$Mp_4 = 3.00 Tm \leq Mp$

Los mecanismos combinados son:

Mec. 3	$8\theta = 4Mp\theta$		
Mec. 4	$24\theta = 8Mp\theta$		
	$32\theta = 12Mp\theta$	$\therefore$	$Mp_{3+4} = 2.67 Tm \leq Mp$
Giros C y D	$-2Mp\theta$		
	$32\theta = 10Mp\theta$	$\therefore$	$Mp_{3+4+g} = 3.20 Tm \leq Mp$
Mec. 2	$12\theta = 8Mp\theta$		
Art. en 3 (2 veces)	$-4Mp\theta$		
	$44\theta = 14Mp\theta$	$\therefore$	$Mp_{3+4+2} = 3.15 Tm \leq Mp$
Mec. 1	$9\theta = 4Mp\theta$		
Art. en 5 (2 veces)	$-2Mp\theta$		
	$53\theta = 16Mp\theta$	$\therefore$	$Mp_{3+4+2+1} = 3.31 Tm \leq Mp$
Mec. 2.	$-12\theta = -8Mp\theta$		
Art. en 3 (2 veces)	$4Mp\theta$		
	$41\theta = 12Mp\theta$	$\therefore$	$Mp_{3+4+1} = 3.417 Tm = Mp$

Obsérvese que al superponer el mecanismo 2 con el 3+4 debemos restar

el trabajo interior efectuado en la articulación 3 multiplicado por dos, debido a que en el mecanismo combinado esa articulación desaparece, y es ta ba en los dos mecanismos originales; lo mismo sucede al superponer el mecanismo 1.

En cambio, al quitar el mecanismo 2 del  $3+4+2+1$ , para obtener el final, sumamos el doble del trabajo en la articulación 3, que vuelve a apa recer.

Evidentemente, al emplear el método de los mecanismos en esta forma - sigue siendo necesario comprobar si se satisface la condición de plasticidad; no lo hacemos ahora, porque ya chequeamos esa condición al resolver el problema combinando los mecanismos gráficamente.

#### 7.6 CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS.

Hasta ahora hemos estudiado únicamente estructuras sometidas a la acción de cargas concentradas, en las cuales quedan perfectamente determinadas las secciones en que pueden aparecer articulaciones plásticas, ya que éstas se presentan siempre en los puntos de aplicación de las cargas (además de las correspondientes a extremos de barras, etc.).

No sucede lo mismo cuando sobre alguno de los miembros de la estructura obra una carga uniformemente repartida, ya que en ese caso no conocemos a priori la sección en la que el momento flexionante es máximo; en efecto, el momento varía entre los extremos de la pieza siguiendo una ley parabólica y puede presentar su valor máximo en cualquier sección.

Por consiguiente, antes de que pueda encontrarse el valor de la carga de colapso de una estructura en la que algunos de los miembros estén sujetos a cargas uniformemente distribuidas es necesario determinar la posición exacta en que se forman las articulaciones plásticas que aparecen en ellos, a menos que pueda demostrarse que para el mecanismo de colapso no se requieren articulaciones en las barras cargadas uniformemente.

En general, la existencia de cargas distribuidas da lugar a que aumente el trabajo numérico necesario para el análisis plástico de una estructura.

Dos son los procedimientos principales que se siguen para analizar estructuras con cargas uniformemente distribuidas; el primero consiste en

sustituir esas cargas por fuerzas concentradas equivalentes, mientras -- que cuando se utiliza el segundo se hacen todos los cálculos suponiendo que las articulaciones plásticas aparecen en el centro de los miembros cargados uniformemente, y una vez encontrado el mecanismo de colapso se corrigen los resultados obtenidos, moviendo las articulaciones a sus posiciones correctas.

Cuando se utiliza el primer procedimiento se obtienen siempre resultados del lado de la seguridad porque, como puede verse en la Fig. 7.21, - el diagrama parabólico continuo correspondiente a la carga uniforme queda siempre inscrito en el diagrama quebrado producido por las cargas concentradas estáticamente equivalentes, de manera que los momentos flexionantes reales son siempre menores o, a lo sumo, iguales a los supuestos.

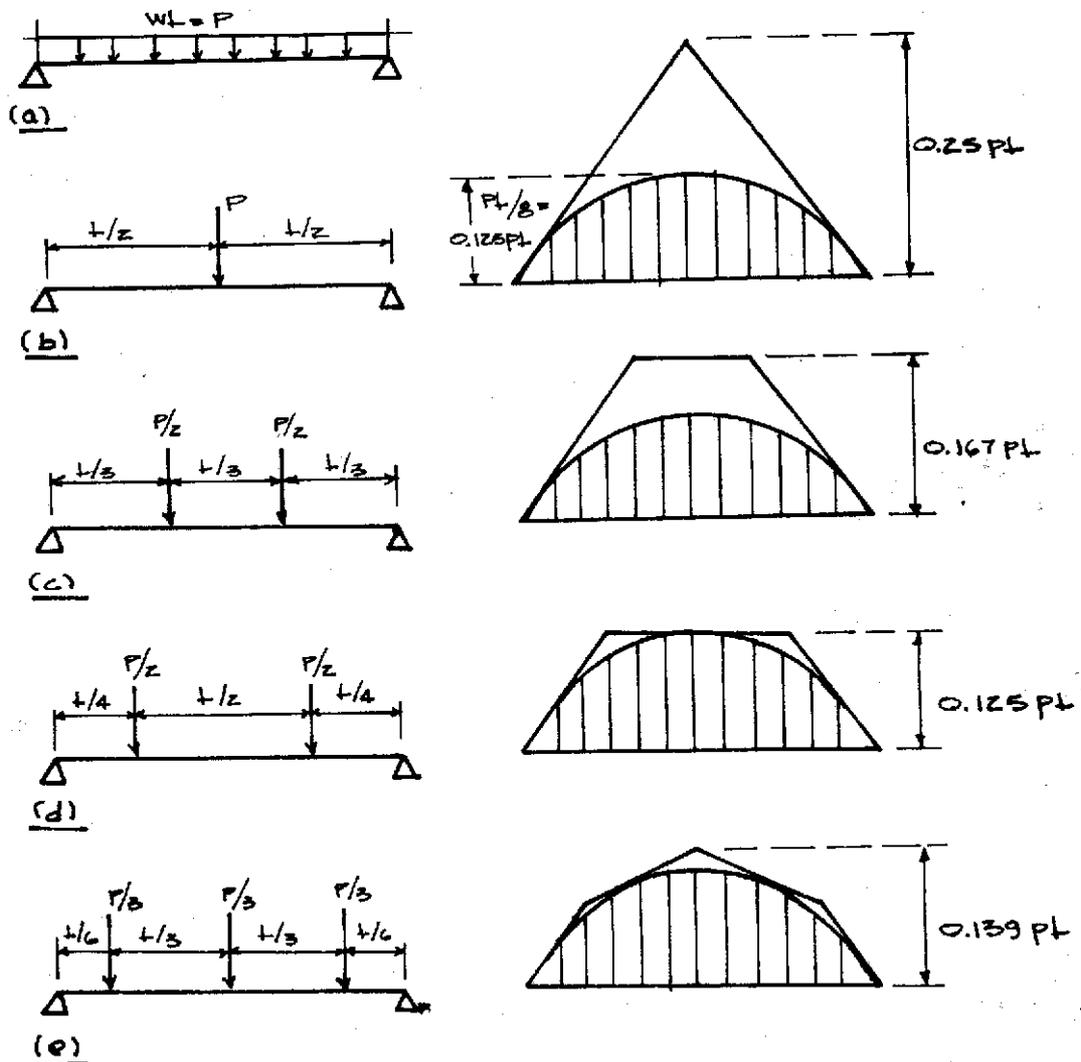


FIGURA 7.21

Como es lógico, cuanto mayor es el número de fuerzas concentradas supuestas, mayor es la aproximación obtenida, pero como a la vez aumenta el trabajo numérico necesario para resolver un problema dado, debe buscarse una forma de sustitución que, al mismo tiempo que proporcione la precisión necesaria, no complique exageradamente el problema.

En general se obtienen buenos resultados sustituyendo la carga uniforme por dos o tres concentradas, de la manera mostrada en la Fig. 7.21d y e, es decir, en el primer caso (Fig. 7.21d) aplicadas en el cuarto y en los tres cuartos del claro, y en el segundo (Fig. 7.21e) aplicadas en el centro y a un sexto del claro de cada apoyo.

Resolveremos a continuación un ejemplo numérico en el que emplearemos los diversos procedimientos que pueden utilizarse cuando sobre la estructura obran cargas uniformemente distribuidas.

**Ejemplo 7.9.** Determinar la carga de colapso de una viga de momento plástico resistente constante, empotrada en un extremo y libremente apoyada en el otro, sobre la que obra una carga uniformemente repartida en toda su longitud.

Supongamos primero que la articulación plástica intermedia necesaria para la formación del mecanismo de colapso aparece precisamente en el centro del claro (Fig. 7.22); de acuerdo con esta suposición obtenemos, aplicando el principio del trabajo virtual al mecanismo de la Fig. 7.22b:

$$P \frac{1}{2} \left( \theta \frac{L}{2} \right) = 3M_p \theta \quad \therefore P = \frac{12M_p}{L} \geq P_c$$

Estudiando el diagrama de momentos de la Fig. 7.22c vemos que la suposición que hemos hecho no es posible, ya que se viola la condición de plasticidad en la zona inmediatamente a la derecha del centro de la viga;

por consiguiente, la carga que acabamos de obtener es un poco mayor que  $P_c$ , y la articulación intermedia se formará en realidad a la derecha del punto medio de la viga.

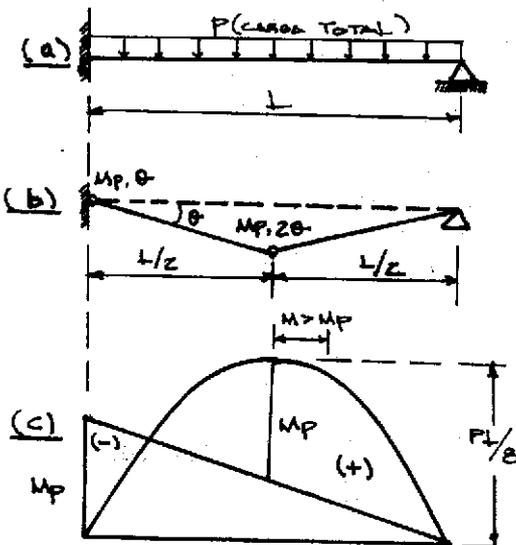


FIGURA 7.22

Determinaremos el valor de la carga crítica aplicando el teorema del límite superior para la determinación del mecanismo real de falla.

En la Fig. 7.23 hemos supuesto -- que la articulación se forma a una distancia  $\alpha L$  del extremo empotrado de la viga, y en función de esa distancia hemos calculado los valores de los ángulos necesarios para aplicar el principio del trabajo virtual.

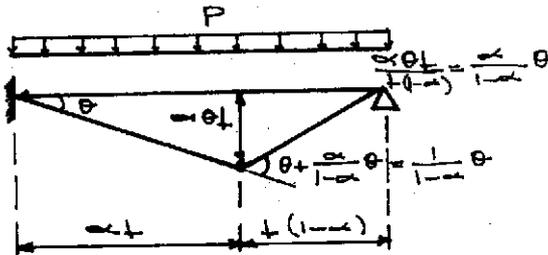


FIGURA 7.23

El descenso promedio de la carga es  $\theta L/2$ , y el trabajo absorbido en las articulaciones plásticas es:

$$M_p \theta \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) = M_p \theta \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)$$

Por consiguiente:

$$\frac{1}{2} P \theta L = M_p \theta \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right) \quad \therefore \quad P = \frac{2M_p}{L} \left(\frac{2-\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\right) \quad (22)$$

Variando el valor de  $\alpha$  cambiamos la posición de la articulación central, con lo que obtenemos distintos mecanismos de colapso; de acuerdo con el teorema del límite superior el real será aquel al que corresponda el valor mínimo de  $P$ , dado por la Ec. (22).

Obtenemos el valor de  $\alpha$  que hace que  $P$  sea mínimo igualando a cero la derivada de  $P$  con respecto a  $\alpha$ .

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{2M_p}{L} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2-\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\right) = 0 \quad \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2-\alpha}{\alpha(1-\alpha)}\right) = \frac{(\alpha-\alpha^2)(-1) - (2-\alpha)(1-2\alpha)}{(\alpha-\alpha^2)^2}$$

$$\text{y} \quad \frac{-\alpha^2 - 4\alpha - 2}{(\alpha-\alpha^2)^2} = 0 \quad \therefore \quad \alpha = 2 = 1.414$$

El único signo posible es el negativo (ya que si tomásemos el signo positivo obtendríamos un valor de  $\alpha$  mayor que uno), luego:

$$\alpha = 0.586$$

La posición real de la articulación plástica intermedia es, pues, la indicada en la Fig. 7.24a, y la carga crítica puede obtenerse sustituyendo  $\alpha$  por su valor en la Ec. (22) o aplicando el principio del trabajo virtual al mecanismo de la Fig. 7.24.

Siguiendo el primer camino obtenemos:

$$P_c = \frac{2M_p}{L} \frac{2 - 0.586}{0.586(1 - 0.586)} = \frac{2M_p}{L} \frac{1.414}{0.586 \times 0.414} = 11.656 \frac{M_p}{L}$$

Utilizando el segundo (ver Fig. 7.24b):

$$\frac{1}{2} P (0.586 \theta L) = M_p (1 + 2.4154 \theta)$$

$$\therefore P = 11.656 \frac{M_p}{L}$$

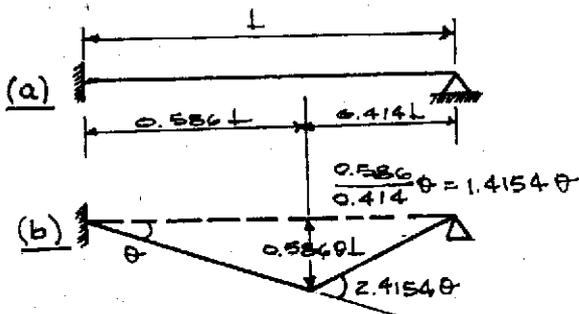


FIGURA 7.24

Un segundo procedimiento para el cálculo de la carga de colapso consiste en suponer inicialmente, como lo hicimos hace un momento, que la articulación plástica intermedia se forma en el centro del --

claro, con lo que obtenemos la distribución de momentos de la Fig. 7.22c; en seguida, partiendo de los valores conocidos de los momentos en el centro y en los extremos de la viga, determinamos la sección en que se presenta el momento máximo, y su valor; igualando el momento máximo a \$M\_p\$, obtendremos una distribución de momentos para la que se cumplirá la condición de plasticidad (pero no la de mecanismo, pues el momento en el empotramiento resultará ligeramente inferior a \$M\_p\$), la que nos permitirá calcular, de acuerdo con el teorema del límite inferior, un límite inferior del valor de la carga de colapso. Enseguida, movemos la articulación central a la sección de momento máximo y, aplicando el principio del trabajo virtual al mecanismo correspondiente, obtenemos un límite superior del valor de la carga de colapso: los dos límites así obtenidos estarán tan cercanos, en general, que no será necesario realizar ningún tanteo adicional (de hecho, el valor de \$M\_p\$ obtenido corriendo la articulación intermedia a la sección de momento flexionante máximo puede considerarse siempre igual al momento plástico real).

Para aplicar este método es conveniente deducir expresiones generales que nos permitan determinar la sección en que se presenta el momento máximo y el valor de éste en una viga con carga uniforme, cuando se conocen los momentos en el centro del claro y en sus extremos.

La Fig. 7.25 muestra un miembro típico, de longitud \$L\$, sujeto a una carga uniformemente distribuida cuya intensidad total es \$P\$. Los momentos en los dos extremos y en el centro del claro se han designado, respecti-

vamente,  $M_I$ ,  $M_D$  y  $M_C$ , y el diagrama de momentos es parabólico.

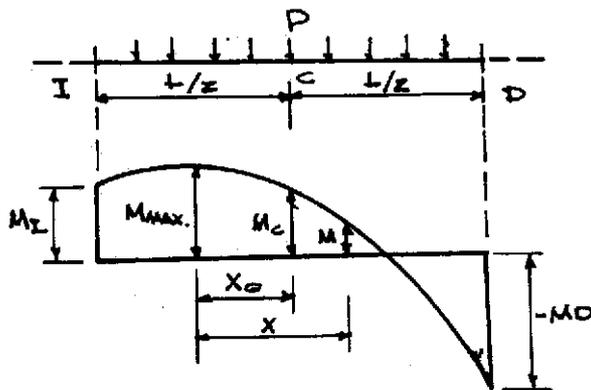


FIGURA 7.25

El momento flexionante máximo,  $M_{max}$ , se presenta a una distancia  $X_0$  a la izquierda del centro de la viga.

Puesto que la fuerza cortante es nula en la sección en que el momento flexionante es máximo, el momento  $M$  a una distancia  $X$  de la sección donde se presenta el máximo vale:

$$M = M_{max} - \frac{PX^2}{2L} \quad (23)$$

Ahora bien, si  $X=X_0-L/2$ ,  $M=M_I$ , y si  $X=X_0+L/2$ ,  $M=M_D$ , luego:

$$M_I = M_{max} - \frac{P}{2L}(X_0^2 - X_0L + \frac{L^2}{4}) \quad \text{y} \quad M_D = M_{max} - \frac{P}{2L}(X_0^2 + X_0L + \frac{L^2}{4})$$

Despejando  $X_0$  de estas dos ecuaciones obtenemos:

$$X_0 = \frac{M_I - M_D}{P} \quad (24)$$

Y haciendo  $M=M_C$  cuando  $X=X_0$  en la Ec. (23):

$$M_{max} = M_C + \frac{PX_0^2}{2L} \quad (25)$$

Por consiguiente, conocidos  $M_I$ ,  $M_C$  y  $M_D$ , la Ec. (24) nos permite determinar la posición de la sección donde se presenta el momento máximo y la Ec. (25) el valor de éste.

Debe observarse que el análisis anterior carece de significado si el valor de  $X_0$  dado por la Ec. (24) es mayor que  $L/2$ , ya que en ese caso el momento flexionante aumentará o disminuirá en forma continua a lo largo de la viga y no presentará ningún máximo entre sus extremos (es decir, no se formará ninguna articulación plástica en el miembro considerado).

Aplicemos estos resultados al problema que estamos estudiando.

De la Fig. 7.22c vemos que, con la suposición de que la articulación intermedia se forma en el centro del claro, tenemos los valores siguientes de los momentos:

$$M_I = -M_p, \quad M_D = 0 \quad \therefore \quad X_0 = \frac{-M_p - 0}{P} = -\frac{M_p}{P}$$

El signo negativo indica que el momento máximo se presenta a la derecha del centro de la viga, como puede verse que sucede en la Fig. 7.22c.

Llevamos ahora el valor de  $X_0$  a la Ec. (25), teniendo en cuenta que el momento en el centro del claro vale  $M_p$ :

$$M_{max} = M_p + \frac{P(M_p/P)^2}{2L} = M_p + \frac{M_p^2}{2PL}$$

Pero  $M_p$ , obtenido de la suposición de que la articulación se forma en el centro del claro, vale  $PL/12$ , luego:

$$M_{max} = \frac{PL}{12} + \frac{P^2L^2}{288PL} = \frac{25PL}{288}$$

Igualando este valor con  $M_p$ , y despejando  $P$ , obtenemos un límite inferior de  $P_c$ :

$$\frac{25PL}{288} = M_p \quad \therefore \quad P = 11.52 \frac{M_p}{L} \leq P_c$$

Calculamos ahora la carga correspondiente al mecanismo de colapso con la articulación intermedia en la posición dada por el valor de  $X_0$  que acabamos de obtener:

$$X_0 = - \frac{M_p}{P} = - \frac{PL}{12P} = - \frac{L}{12}$$

La distancia del apoyo de la izquierda a la articulación es :

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{12} = \frac{7}{12} L$$

Aplicando el principio del trabajo virtual al mecanismo de la Fig. -- 7.26 obtenemos:

$$P \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{7\theta L}{12} \right) = M_p(\theta + \theta + \frac{7\theta}{5})$$

$$\therefore \quad P = 11.657 \frac{M_p}{L} \geq P_c$$

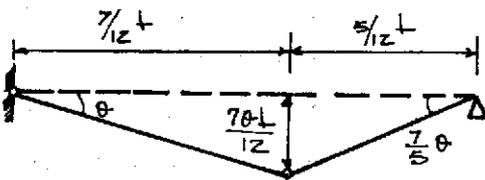


FIGURA 7.26

Por consiguiente, la carga de colapso está comprendida entre los límites siguientes:

$$11.52 \frac{M_p}{L} \leq P_c \leq 11.675 \frac{M_p}{L}$$

Para fines prácticos no es necesario, en general, obtener una preci--

sión mayor; además, como dijimos antes,  $11.657Mp/L$  es casi igual al valor exacto de la carga crítica.

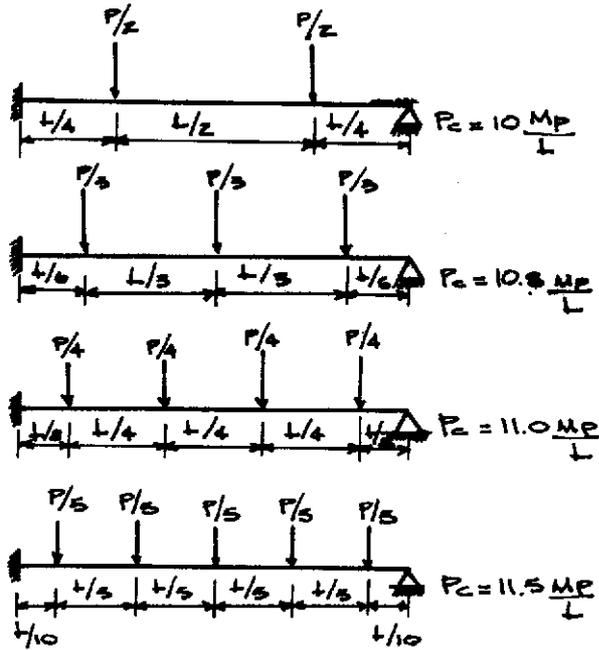


FIGURA 7.27

Por último, resolveremos el problema sustituyendo la carga uniformemente distribuida por cargas concentradas. En la Fig. 7.27 se muestran los valores correspondientes a varias maneras distintas de hacer esa sustitución.

Puede verse que al ir aumentando el número de cargas el valor de  $P_c$  se va acercando a la carga crítica correspondiente a la uniformemente distribuida, pero se conserva siempre abajo de él, es decir, los resultados obtenidos están siempre -- del lado de la seguridad.

### 7.7 MARCOS CON CABEZAL INCLINADO, (METODO DE LOS MECANISMOS).

En muchas ocasiones es necesario determinar la carga de colapso correspondiente a un mecanismo formado por cuatro barras, y si algunas de éstas son inclinadas puede complicarse extraordinariamente la determinación geométrica de los desplazamientos y giros de los distintos puntos de la estructura utilizando los procedimientos que hemos visto hasta ahora.

Es, pues, conveniente emplear otro método para plantear la ecuación -- del principio del trabajo virtual, basado en la determinación de los centros instantáneos de rotación de las barras que componen el mecanismo de colapso, correspondientes a un pequeño movimiento del mismo.

Ilustraremos el procedimiento a seguir por medio de un ejemplo (Fig. 7.28).

Las articulaciones en A y en B son reales y el mecanismo de colapso - corresponde a la formación de dos articulaciones plásticas en C y D, con lo que la estructura se convierte en un mecanismo de cuatro barras, AC, CD, DB y BA, ésta última fija.

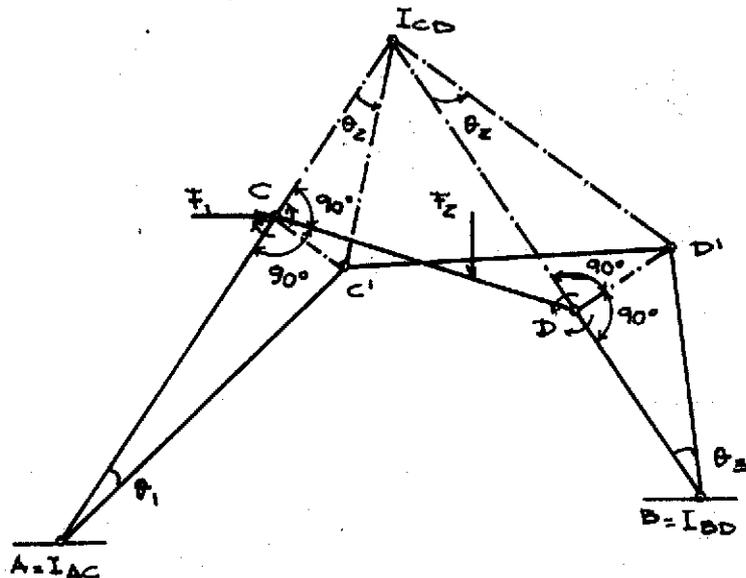


FIGURA 7.2B

Demos un movimiento virtual a la estructura, produciendo una rotación  $\theta_1$  de la barra AC alrededor de su centro de rotación A: el problema es-- triba en calcular los trabajos exterior e interior correspondientes a e-- se mecanismo, producidos respectivamente por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  y por -- los momentos existentes en las articulaciones plásticas; evidentemente, para ello necesitamos estudiar la geometría del movimiento del mecanismo.

La barra DB está dotada también de un movimiento de rotación, alrede-- dor de B, mientras que el movimiento de CD es plano, con centro instantá-- neo de rotación en  $I_{CD}$ , intersección de las prolongaciones de AC y BD (- en efecto, el punto C, por formar parte de AC, tiene que moverse sobre u-- na normal a esa recta, y por una razón semejante el desplazamiento de D es perpendicular a BD; pero C y D son, al mismo tiempo, puntos de la ba-- rra CD, luego el centro instantáneo de rotación de ésta tiene que estar en la intersección de la prolongación de los ejes de AC y BD, para que -- los desplazamientos de C y D sean normales a las rectas que los unen -- con el centro de rotación de dicha barra).

Podemos expresar  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en función de  $\theta_1$  y de la geometría de la es-- tructura:

$$\overline{CC'} = \theta_1 \cdot \overline{AC} = \theta_2 \cdot \overline{CI_{CD}} \quad \therefore \theta_2 = \theta_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{CI_{CD}}}$$

$$\overline{DD'} = \theta_2 \cdot \overline{I_{CD}D} = \theta_3 \cdot \overline{BD} \quad \therefore \theta_3 = \theta_2 \cdot \frac{\overline{I_{CD}D}}{\overline{BD}} = \theta_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{CI_{CD}}} \cdot \frac{\overline{I_{CD}D}}{\overline{BD}}$$

Veamos ahora como valuar los trabajos realizados por las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  y lo pares, en función de los giros y de las dimensiones de la estructura; para ello utilizaremos las Figs. 7.29a y b, en las que hemos dibujado, aisladas, las barras AC y CD, respectivamente.

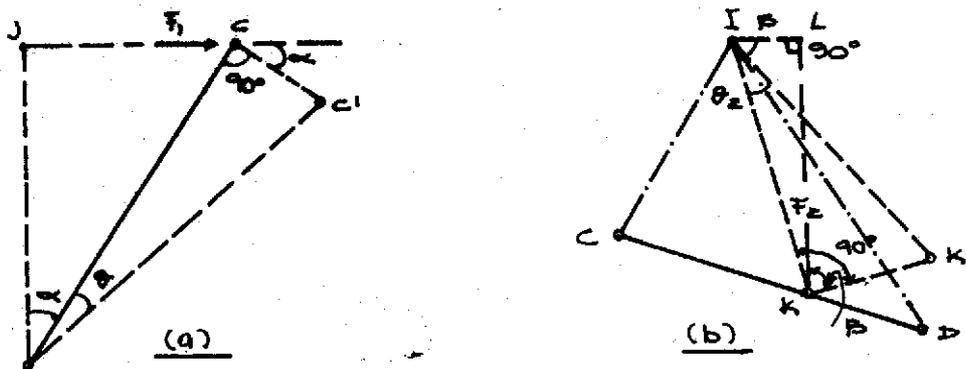


FIGURA 7.29

Observando la Fig. 7.29a vemos que el trabajo realizado por la fuerza  $F_1$  durante la rotación  $\theta_1$  vale:

$$t_{F_1} = F_1 \cdot \overline{CC'} \cdot \cos \alpha = F_1 \cdot \theta_1 \overline{AC} \cos \alpha = F_1 \theta_1 \overline{AJ} = F_1 \cdot \overline{AJ} \theta_1 = M_{F_1/A} \cdot \theta_1$$

Utilizando la Fig. 7.29b valuamos el trabajo que realiza  $F_2$  al girar la barra CD un ángulo  $\theta_2$  alrededor de su centro instantáneo de rotación:

$$t_{F_2} = F_2 \cdot \overline{DD'} \cdot \cos \beta = F_2 \cdot \theta_2 \overline{I_{CD}D} \cdot \cos \beta = F_2 \cdot \overline{IK} \cdot \cos \beta \theta_2 = F_2 \cdot \overline{IL} \cdot \theta_2 = M_{F_2/I} \cdot \theta_2$$

Es decir, el trabajo realizado por una fuerza que obra sobre una barra dotada de un movimiento de rotación, al darle un giro  $\theta$ , es igual al producido al multiplicar el momento de la fuerza respecto al centro de rotación por el ángulo de giro  $\theta$  (si la barra está dotada de un movimiento plano el resultado es el mismo, con respecto al centro instantáneo de rotación).

Evidentemente, cuando sobre la barra actúa un par de intensidad  $\mu$ , el trabajo que efectúa es:

$$t_{\mu} = \mu \cdot \theta$$

Ejemplo 7.10. Calcular la carga de colapso correspondiente al mecanismo no mostrado en la Fig. 7.30.

El tramo ABC gira alrededor de A, la columna DE alrededor de E y el segmento de cabezal CD tiene un movimiento plano con centro instantáneo en  $I_{CD}$ , punto de intersección de las prolongaciones de las rectas AC y ED.

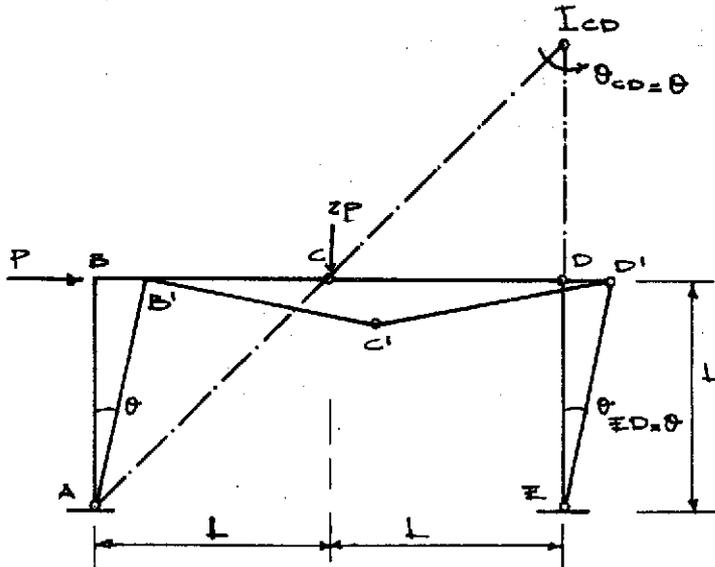


FIGURA 7.30

Los triángulos ABC y  $CDI_{CD}$  son semejantes, y puesto que BC es igual a CD,  $I_{CD}D$  tiene también que ser igual a AB, o sea igual a L, y  $CI_{CD}$  igual a AC. Por consiguiente:

$$\overline{CC'} = \overline{AC} = \theta_{CD} \cdot \overline{CI_{CD}}$$

Pero también:

$$\overline{AC} = \overline{CI_{CD}} \therefore \theta_{CD} = \theta$$

Análogamente se demuestra que:

$$\theta_{ED} = \theta_{CD} = \theta$$

El trabajo de las fuerzas exteriores vale:

$$te = PL\theta + 2PL\theta = 3PL\theta$$

El trabajo interior, absorbido en las articulaciones plásticas, puede determinarse de cualquiera de las dos maneras siguientes: la primera consiste en suponer que en cada articulación existen dos momentos, de intensidad  $M_p$ , y en calcular por separado el trabajo realizado por cada uno de ellos; la segunda consiste en valorar la rotación total en cada articulación, como suma de las de las dos barras que concurren en ella, y multiplicarla por el momento plástico.

Siguiendo el primer camino:

$$ti = M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta = 6M_p\theta$$

Y de acuerdo con el segundo:

$$ti = M_p\theta + M_p(\theta + \theta) + M_p(\theta + \theta) + M_p\theta = 6M_p\theta$$

Igualemos ahora los trabajos exterior e interior:

$$3PL\theta = 6M_p\theta \quad \therefore \quad P = 2M_p/L$$

Evidentemente, en este caso sencillo podríamos llegar al mismo resultado fácilmente, sin recurrir a la determinación del centro instantáneo de rotación, pero en algunas estructuras, entre las cuales es típico el marco de dos aguas, la utilización del centro instantáneo de rotación -- permite reducir extraordinariamente el trabajo numérico necesario para calcular la carga de colapso correspondiente a algunos de los mecanismos posibles, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.11.** Calcular la carga de colapso del marco de la Fig. 7.31.

Existen siete secciones en las que pueden aparecer articulaciones -- plásticas (marcadas en la Fig. 7.31a) y el grado de hiperestaticidad de la estructura es tres, luego hay cuatro mecanismos independientes, dos -- tipo viga y otros dos correspondientes a los grados de libertad.

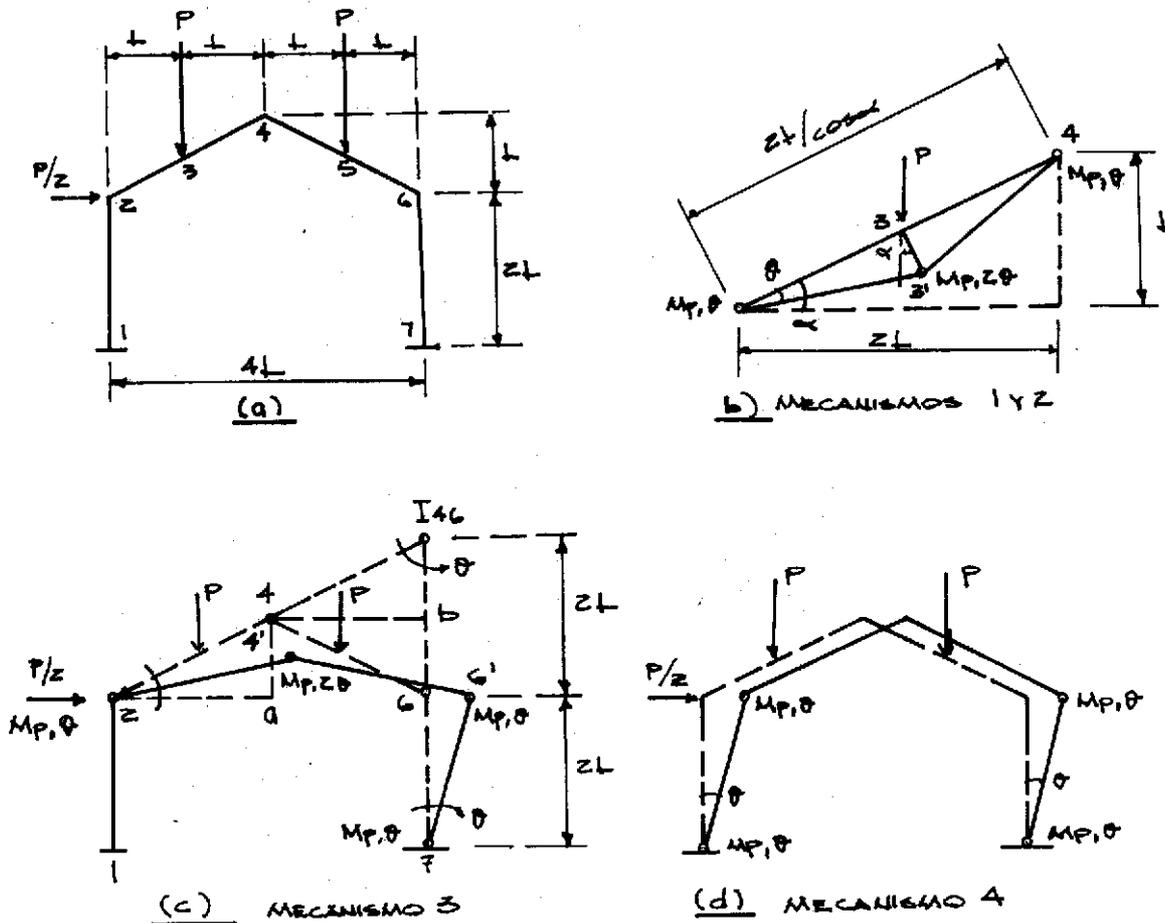


FIGURA 7.31

Las cargas correspondientes a los mecanismos independientes 1, 2 y 4 se obtienen por los métodos usuales, y valen:

1 y 2.  $t_e = P \cdot \frac{L}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = P(L/\cos \theta) \cdot \cos \theta = PL\theta$

$t_i = 4M_p\theta \quad \therefore \quad PL\theta = 4M_p\theta \quad \text{y} \quad P_1 = P_2 = \frac{4M_p}{L} \geq P_c$

4.  $\frac{P}{2} \cdot 2L = 4M_p\theta \quad \therefore \quad P_4 = \frac{4M_p}{L} \geq P_c$

Para estudiar el mecanismo 3 recurrimos al concepto de centro instantáneo de rotación; la barra 2-4 gira alrededor de 2, la 6-7 alrededor de 7 y el centro instantáneo de rotación de 4-6 está en la intersección de las prolongaciones de 2-4 y 7-6.

Hacemos que la barra 2-4 gire un ángulo  $\theta$  y queremos determinar las rotaciones de las otras dos.

De la Fig. 7.3lc:

$\Delta 2a4 \cong \Delta 4bI; \quad \overline{2a} = 2L = \overline{4b} \quad \therefore \quad \overline{24} = \overline{4I} \quad \text{y} \quad \overline{a4} = L = \overline{bI}$

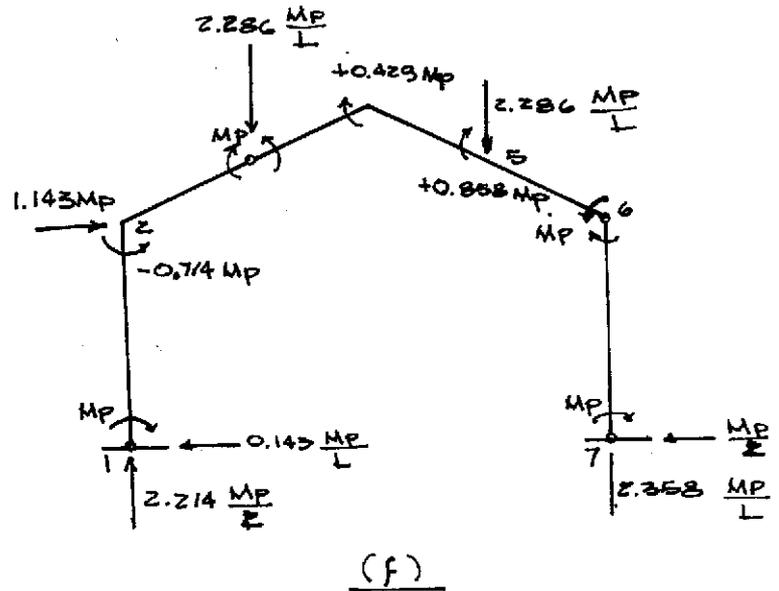
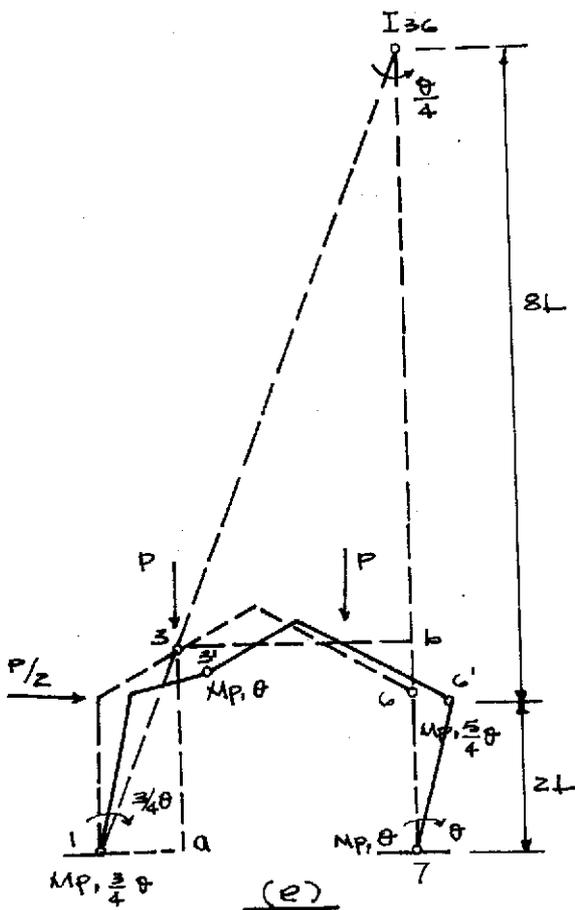


FIGURA 7.31 (CONTINUACIÓN)

Por consiguiente, el ángulo de rotación de 4-6 es el mismo que el de 1-2,  $\theta$ ; además, las distancias de 6 a 1 y a 7 son iguales, luego también la columna de la derecha gira un ángulo  $\theta$ .

En la Fig. 7.31c hemos marcado los ángulos de giro totales en cada articulación, suma de las rotaciones de las dos barras que concurren en ellas alrededor de sus respectivos centros instantáneos.

Podemos ya plantear la ecuación del principio del trabajo virtual:

$$3. \quad PL\theta + PL\theta = M_p\theta + M_p \cdot 2\theta + M_p \cdot 2\theta + M_p\theta \quad \text{y} \quad 2P\theta L = 6M_p\theta$$

$$\therefore P_3 = \frac{3M_p}{L} \geq P_c$$

En la Fig. 7.31e se ha dibujado el mecanismo real de colapso; de nuevo calculamos la carga que le corresponde utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación; el del tramo 3-6 se encuentra en la intersección de las prolongaciones de las rectas 1-3 y 7-6, y estudiando la geometría de la estructura se calculan todos los ángulos de giro partiendo de uno supuesto.

En efecto, démosle el valor  $\theta$  a la rotación de la columna 6-7.

$$I_{a3} \cong 3bI \quad \therefore \frac{\overline{bI}}{a3} = \frac{\overline{3b}}{Ia} \quad \text{y} \quad \overline{bI} = a3 \cdot \frac{\overline{3b}}{Ia} = \frac{5}{2} L \cdot \frac{3L}{L} = 7.5 L$$

Por consiguiente:

$$\overline{I6} = \overline{Ib} + \overline{b6} = 7.5 L + 0.5 L = 8.0 L$$

$$\overline{66'} = \overline{76} \cdot \theta = \overline{6I} \cdot \theta_{36} \quad \therefore \theta_{36} = \theta \frac{\overline{76}}{\overline{6I}} = \theta \frac{2L}{8L} = \frac{\theta}{4}$$

Siguiendo un camino análogo se obtiene la rotación en 1, que vale  $\frac{3}{4}\theta$ .

La ecuación del principio del trabajo virtual para el mecanismo de la Fig. 7.31e es:

$$\frac{P}{2} \cdot 2L \cdot \frac{3}{4}\theta + PL \cdot \frac{3}{4}\theta + PL \cdot \frac{\theta}{4} = M_p \cdot \frac{3}{4}\theta + M_p\theta + M_p \cdot \frac{5}{4}\theta + M_p\theta$$

$$\frac{7}{4} P\theta L = 4M_p\theta \quad \therefore P = 2.286 \frac{M_p}{L} = P_c$$

Como comprobación de que ésta es, efectivamente, la carga de colapso, se han calculado los momentos en las secciones 2, 4 y 5, los cuales se muestran en la Fig. 7.31f; puede verse que todos ellos son menores que  $M_p$  (para calcularlos se obtuvieron primero los valores de las reacciones

partiendo de los momentos conocidos en las secciones en que se forman articulaciones plásticas).

Es interesante hacer ver como se obtiene el mecanismo de colapso de la Fig. 7.31e, partiendo de los independientes. Como se muestra en la Fig. 7.32, para obtenerlo es necesario superponer el mecanismo 1 con el 3 y el 4, dándoles a las rotaciones de éstos los valores adecuados para que al hacer la superposición desaparezcan articulaciones plásticas. Se llega, finalmente, al mecanismo de la Fig. 7.32e, que es igual al de la Fig. 7.31e, con los valores de los ángulos de giro multiplicados por dos, lo que no tiene ninguna importancia, ya que las rotaciones pueden tener valores cualesquiera, con tal de que sean pequeños.

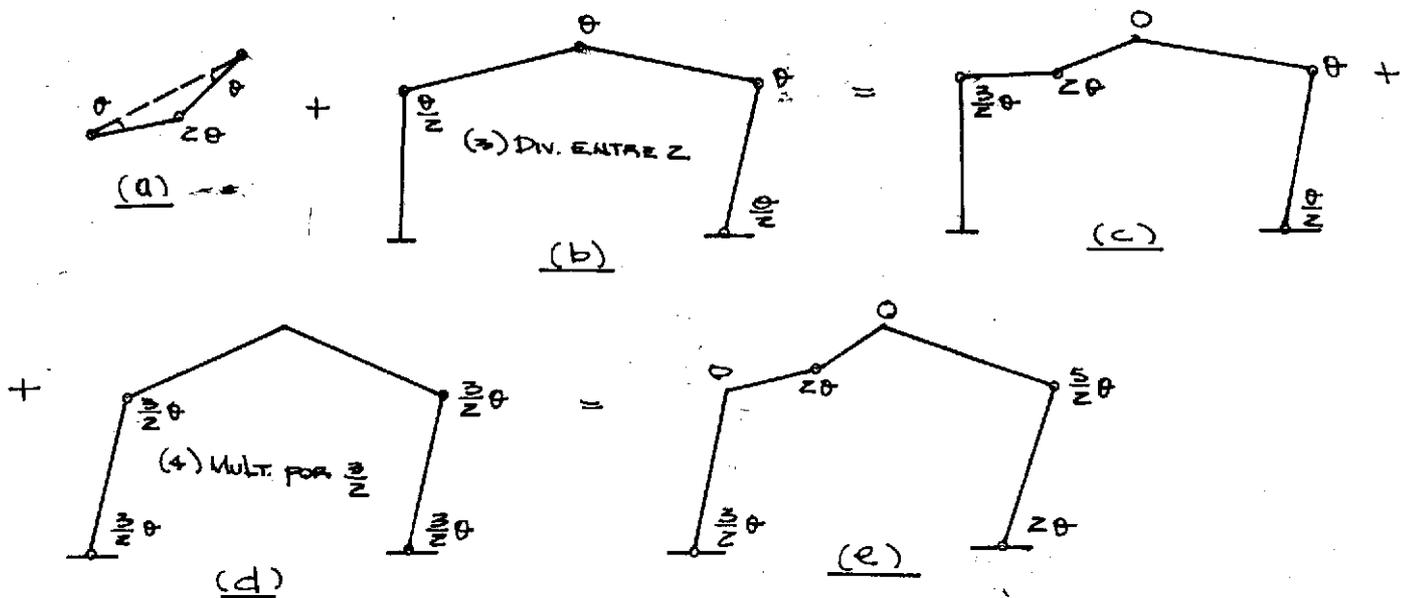


FIGURA 7.32

## C O N C L U S I O N E S

En la teoría de la plasticidad, en lugar de basarse el diseño en el método del esfuerzo permisible el problema se aborda considerando la máxima carga que puede soportar una estructura actuando como una unidad.

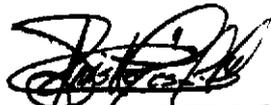
El procedimiento de diseño plástico difiere del método convencional de esfuerzos permisibles en tres aspectos importantes: (a) se usan cargas últimas en vez de cargas de servicio, (b) las fuerzas y momentos en los miembros sometidos a cargas últimas se determinan sobre una base más realista, que incluye la acción inelástica, y (c) los miembros se proporcionan de manera tal que su resistencia última exceda, o cuando menos iguale, a las fuerzas y momentos producidos por las cargas últimas.

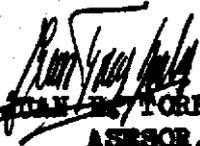
Aunque el diseño plástico es un método racional que tiene en cuenta el comportamiento inelástico de la estructura, no reemplazará a los demás métodos de análisis y diseño. El método tiene muchas ventajas que animan a usarlo, pero tiene también algunas limitaciones. Entre las ventajas se cuentan: (a) posibilidad de determinar la capacidad de sobrecarga bajo condiciones de carga sencillas, (b) uso eficiente del material, (c) simplicidad de los cálculos del análisis plástico para estructuras reticulares sencillas, (d) las estructuras están sujetas frecuentemente a grandes esfuerzos difíciles de predecir, tales como los ocasionados por asentamiento, montaje, etc., el diseño plástico previene tales situaciones, permitiendo deformaciones plásticas, y (e) diseño de detalles más económicos que reflejan el comportamiento plástico.

Entre las limitaciones se cuentan: (a) el diseño plástico es de escaso valor en el caso de aceros frágiles de alta resistencia, (b) no es aún satisfactorio para los casos en que son problema los esfuerzos residuales, las concentraciones locales de esfuerzos y los esfuerzos por fatiga, así como los efectos de las fuerzas cortantes y normales, el pandeo local y lateral y el efecto del recubrimiento del concreto, y (c) aunque para muchas estructuras indeterminadas, el análisis plástico es más simple que el análisis elástico, debe tenerse en cuenta que las estructuras plásticas inestables son más difíciles de detectar que las estructuras elásticas inestables.

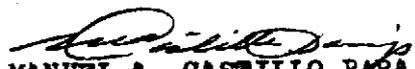
B I B L I O G R A F I A

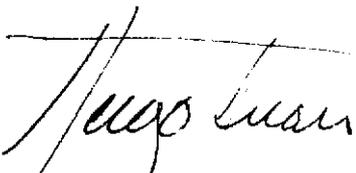
1. Hodge, P. G., "Plastic Analysis of Structures", McGraw-Hill, -- Nueva York, 1968.
2. "Plastic Design in Steel", American Institute of Steel Constructions (A.I.S.C.), Seventh Printing, Nueva York.
3. "Manual of Steel Construction", American Institute of Steel --- Construction (A.I.S.C.), Seventh Edition, Nueva York.
4. McCormac, Jack C., "Diseño de Estructuras Metálicas", Representaciones y servicios de Ingeniería, S.A., México.
5. Bresler, Lin y Scalzi, "Diseño de Estructuras de Acero", Editorial Idmusa-Wiley, S.A., México.
6. Parker, Harry, "Diseño Simplificado de Estructuras de Acero", - Editorial Idmusa, México.
7. Van den Breek, J. A., "Theory of Limit Design", John Wiley and Sons, Nueva York, 1968.
8. Buen, Oscar de, "Análisis Plástico de Estructuras de Acero", Facultad de Ingeniería, México.
9. Neal, B. C., "The Plastic Methods of Structural Analysis", Chapman an Hall, Londres, 1966.

  
JOSE LUIS REYES FLORES

  
ING. JUAN DE TORRES BERNADES  
ASESOR.

  
Vo.Bo. ING. JOAQUIN LOTTMANN E.  
JEFE DEL DEPTO. DE ESTRUCTURAS.

  
Vo.Bo. ING. MANUEL A. CASTILLO BARAJAS  
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL.

  
IMPRIMASE.  
ING. HUGO QUIÑONES  
DECANO.