

V.L. 087 (325)C
MFV: 886

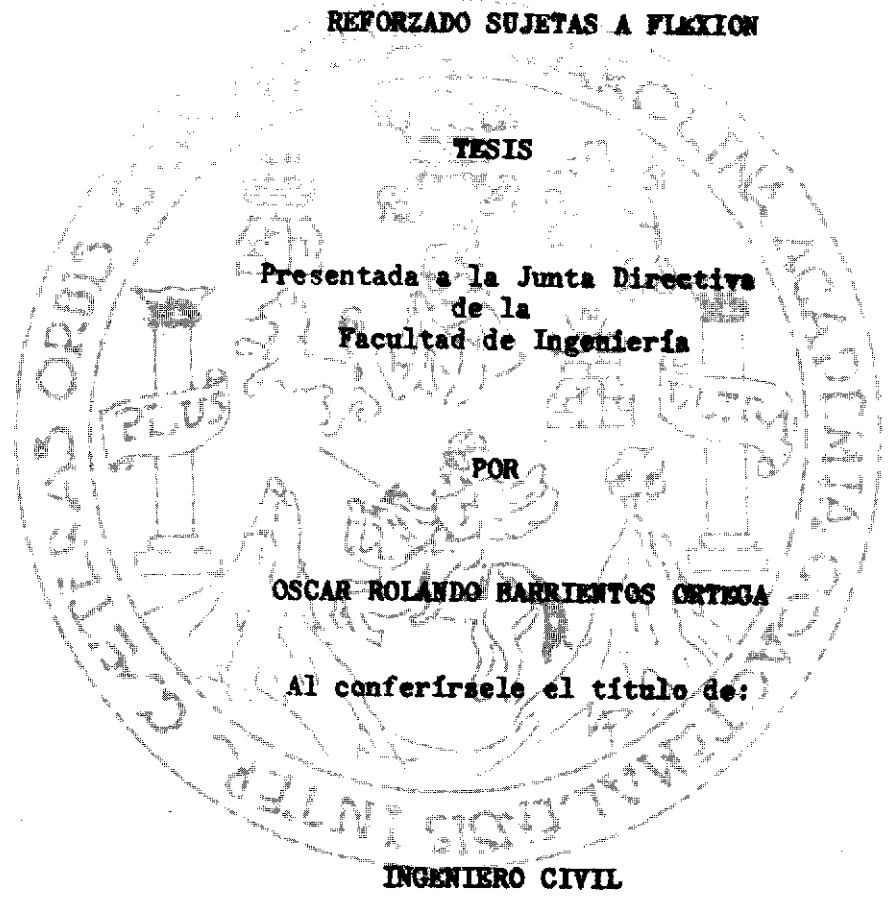
PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
Biblioteca Central

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Escuela de Ingeniería Civil

DISEÑO OPTIMO CON RELACION AL COSTO DE SECCIONES DE CONCRETO
REFORZADO SUJETAS A FLEXION



TESIS

Presentada a la Junta Directiva
de la
Facultad de Ingeniería

POR

OSCAR ROLANDO BARRIENTOS ORTEGA

Al conferírsele el título de:

INGENIERO CIVIL

Guatemala, Noviembre de 1975.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
BIBLIOTECA
DEPARTAMENTO DE TESIS-REFERENCIA

JUNTA DIRECTIVA DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:	Ing. Hugo Quan Má
Vocal Primero:	Ing. Julio Campos B.
Vocal Segundo:	Ing. Roberto Barrios M.
Vocal Tercero:	Ing. Leonel Aguilar G.
Vocal Cuarto:	Br. Julio R. Urdiales
Vocal Quinto:	Br. Edgar E. Cifuentes
Secretario:	Ing. José Luis Terrón

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN

GENERAL PRIVADO

Decano:	Ing. Hugo Quan Má
Examinador:	Ing. Walter Lange
Examinador:	Ing. Joaquín Lottmann
Examinador:	Ing. Manuel Castillo B.
Secretario:	Ing. José Luis Terrón

TESIS DE REFERENCIA
NO
SE PUEDE SACAR DE LA BIBLIOTECA
BIBLIOTECA CENTRAL - USAC.

A MIS PADRES

RECONOCIMIENTO:

Al Ingeniero Héctor Monzón D. por su valiosa cooperación en la asesoría para la elaboración de este trabajo.

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que la ley de la Universidad de San Carlos establece, tengo el honor de someter a vuestra - consideración mi trabajo de tesis titulado:

**DISEÑO OPTIMO CON RELACION AL COSTO DE SECCIONES DE CONCRETO
REFORZADO SUJETAS A FLEXION**

Tema que me fuera asignado por la Honorable Junta Directiva de la Facultad de Ingeniería.

C O N T E N I D O

1.- INTRODUCCION:

1.1 El diseño de la sección óptima por flexión.....	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Objetivos	2
1.4 Teorías y Métodos básicos	3
1.5 Simbología fundamental	3

2.- DISEÑO POR FLEXION:

2.1 Exposición del método de Resistencia Última	6
2.2 Bases de la flexión por Resistencia Última	8
2.3 Porcentaje balanceado de refuerzo en la Resistencia Última	10
2.4 Diseño de secciones rectangulares simplemente reforzadas	12
2.5 Ejemplo	14
2.6 Diseño de secciones con refuerzo en ambas caras ...	16

3.- COSTO Y CALIDAD DE LOS MATERIALES EN GUATEMALA:

3.1 El concreto en Guatemala	19
- Calidad de los elementos y características	19
- Precios unitarios del concreto	20
3.2 El acero en Guatemala	22
- Calidad y Características	22
- Precios Unitarios	23
3.3 La madera en Guatemala	24
- Generalidades	24
- Precio unitario de formaleta	24

4.- OPTIMIZACION

4.1 Generalidades	26
4.2 Definiciones y relaciones	26
4.3 Principales métodos existentes	28
4.4 Métodos directos	29
4.5 Métodos indirectos	31
4.6 Restricciones de igualdad	33
4.7 Método de Eliminación	34
4.8 Variables de estado y de decisión	35

4.9	Derivadas restringidas (Método Jacobiano)	38
4.10	Método de Multiplicadores de Lagrange	40
4.11	Resumen y comentarios	42
5.- APLICACION DEL METODO DE OPTIMIZACION AL DISEÑO:		
5.1	Planteamiento de las ecuaciones básicas	44
	- Ecuación objetivo	44
	- Ecuación restrictora	45
5.2	Optimización por el método de Eliminación	46
5.3	Optimización por el método Jacobiano	48
5.4	Optimización por el método de Multiplicadores de Lagrange	50
6.- APLICACION E INTERPRETACION DE LAS FORMULAS OPTIMAS - GRAFICAS		
6.1	Valor óptimo con "d" variable	54
6.2	Valor óptimo con "b" variable	56
6.3	Valor óptimo con la relación "b/d" constante...	57
6.4	Generalizaciones	59
6.5	Gráficas	60
7.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES:		
7.1	Conclusiones y recomendaciones sobre el diseño óptimo de secciones de concreto reforzado su- jetas a flexión	66
	- Del diseño	66
	- De los costos de materiales	66
	- De la optimización	66
	- De la aplicación de las fórmulas óptimas al - ejemplo específico	68
7.2	Conclusiones y recomendaciones de carácter ge- neral	69
8.- REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS		

1.1 EL DISEÑO DE LA SECCION OPTIMA POR FLEXION

A la fecha se cuenta con gran variedad de publicaciones relativas al diseño de miembros de concreto reforzado que de hecho es un tema fundamental en la Ingeniería Civil. Regularmente el problema se enfoca sobre todo desde el punto de vista técnico, es decir, planteando las metodologías más recientes disponibles para lograr un elemento estructural de acuerdo a ciertas normas o especificaciones. Sin embargo, puede enfocarse también desde el punto de vista económico (COSTOS) que el presente estudio considera de la mayor importancia, dada el alza de precios observada en el mercado de materiales.

La tendencia general que prevalece es la de diseñar al elemento que reúna todos los requerimientos de seguridad para las condiciones de carga (en el presente caso de flexión) a un costo mínimo, esto es, la sección óptima con relación al costo.

El problema en sí involucra dos o más variables por lo que no es factible una solución sencilla, y en el más elemental de los casos, el intentar resolverlo por tanteos resulta muy largo y tedioso. Afortunadamente se tiene ahora la ayuda de la computadora electrónica que para determinados casos es el arma más adecuada de usar, pero por otra parte como se verá más adelante, por medio de las técnicas de optimización se consiguen expresiones relativamente sencillas que no necesitan de la computadora y ofrecen al diseñador un sistema segu-

ro y práctico de obtener la sección óptima.

1.2 ANTECEDENTES

Hasta la fecha en la carrera de Ingeniería Civil y específicamente en la rama estructural, no se han elaborado trabajos de optimización como tal. Con respecto al caso de diseño económico, el único trabajo efectuado es el tema de tesis del Ingeniero Claudio Olivares Pitet, denominado "Diseño de Secciones Económicas de Concreto Reforzado para Guatemala", cuyo contenido es un estudio bastante completo de costos y formas de conseguir secciones económicas, concluyendo que el elemento determinante en el costo de secciones de concreto reforzado es el acero.

1.3 OBJETIVOS

Por la conveniencia de diseñar una sección óptima a través de un sistema seguro y práctico como se señala en el primer párrafo, se puede resumir como finalidad primordial de este trabajo la deducción de fórmulas generales que puedan aplicarse a problemas específicos para obtener la sección más adecuada del miembro de concreto reforzado sometido a cargas flexionantes variables a un costo mínimo. Como parte del contexto se expone un ejemplo con las ecuaciones óptimas aplicadas y se presentan gráficas con las curvas típicas donde pueden apreciarse las distintas relaciones de costo con las variables de diseño.

En general se pretende dejar un trabajo de interés práctico que sea de utilidad al medio guatemalteco donde la industria de construcción está en una fase de crecimiento constante.

1.4 TEORIAS Y METODOS BASICOS

En el desarrollo de este trabajo, la teoría fundamental utilizada es la teoría de Resistencia Última del "Building - Code Requirements for Reinforced Concrete" (ACI Standards - 318-71) por el American Concrete Institute para la parte de diseño. Se emplea esta teoría como método de trabajo por - considerarse en la práctica como la más racional y realista en el logro de una seguridad estructural, y por ser la que - sirvió de base para el proyecto "Normas Sísmicas para la Ciudad de Guatemala" elaborado por la Universidad de San Carlos en colaboración con la Municipalidad de Guatemala.

En el aspecto de optimización, los métodos principales mencionados tienen como fundamento el Cálculo Infinitesimal y algunos elementos de Algebra Matricial, de tal manera que la teoría básica de esta parte es puramente matemática.

1.5 SIMBOLOGIA FUNDAMENTAL

A continuación los símbolos principales utilizados en el trabajo. De no aparecer en la tabla siguiente algún - símbolo, se encontrará especificado en el desarrollo subsiguiente.

α = Profundidad del bloque compresivo rectangular equivalente. (cm.)

α_b = Profundidad del bloque compresivo rectangular equivalente para la condición balanceada. (cm)

A = Area (cm^2)

A_s = Area del acero en la zona de tensión (cm^2)

A'_s = Area del acero en la zona de compresión (cm^2)

b = Ancho del rostro compresivo. (cm)

C_c = Fuerza compresiva en el concreto. (Kg)

C_s = Fuerza compresiva en el acero (Kg)

d = Profundidad efectiva; distancia del rostro compresivo al centroide del acero en tensión.

d' = Distancia del centroide del refuerzo de compresión al rostro compresivo.

E_c = Módulo de elasticidad del concreto.

E_s = Módulo de elasticidad del acero.

f'_c = Esfuerzo compresivo del concreto. (Kg/cm^2)

f'_s = Esfuerzo calculado del acero en compresión. (Kg/cm^2)

f_y = Esfuerzo de cedencia del acero de refuerzo. (Kg/cm^2)

h = Profundidad total de la sección (cm)

$m = f_y / 0.85 f'_c$

M_u = Momento último de diseño. (Kg-m)

$q = (f_y / f'_c) \rho$

R_u = Coeficiente de resistencia para la Resistencia Última

$$R_u = \frac{M_u}{bd^2} = q f'_c [1 - 0.59q]$$

T = Fuerza de tensión en el acero. (Kg)

- ω = Peso unitario del concreto . (Kg/m³)
 $\times$ = Profundidad de la fibra extrema compresiva al eje -
 neutro de la sección. (cm)
 $\times_b$ = Profundidad de la fibra extrema compresiva al eje
 neutro de la sección para la condición balanceada.
 ϵ = Deformación unitaria.
 ϵ_c = Deformación unitaria en el concreto.
 ϵ_s = Deformación unitaria en el acero de tensión.
 ϵ'_s = Deformación unitaria en el acero de compresión.
 ϵ_y = Deformación de cedencia para el refuerzo.
 ρ = Porcentaje de acero en tensión.
 ρ' = Porcentaje de acero en compresión.
 ρ_b = Porcentaje balanceado de acero en tensión.
 ϕ = Factor de reducción de capacidad.

2.1 EXPOSICION DEL METODO DE RESISTENCIA ULTIMA:

El término "Resistencia Ultima" se ha utilizado comunmente por los diseñadores y por los códigos de construcción desde hace unos 20 años. Sin embargo la resistencia calculada bajo las provisiones del código ACI 318-71, sólo representan un valor definido por el código en mención y no necesariamente el valor "último", de allí que el propio código no menciona "Resistencia Ultima" sino utiliza expresiones como "Método de Diseño por Resistencia" o "Proporcionante para la Resistencia Adecuada". A pesar de ello en el presente trabajo se utilizará el término "Resistencia Ultima" únicamente con fines de claridad.

Toda estructura debe siempre diseñarse para resistir las cargas esperadas en el uso normal bajo un régimen adecuado de esfuerzos de manera que guarden cierta relación los esfuerzos de servicio con los esfuerzos últimos, y para el efecto dan cuenta una variedad de factores que pueden agruparse en dos categorías generales: Factores de carga y Factores de Reducción de Capacidad. En el método de resistencia última las cargas de servicio se incrementan lo suficiente por medio de los factores de carga para obtener un valor de carga última, y luego ésta se divide entre el factor de reducción de capacidad para conseguir la carga teórica de diseño. En seguida se diseña el elemento estructural para que provea la resistencia última

deseada, tomando en cuenta así, el comportamiento no lineal - de la relación esfuerzo-deformación del concreto.

Las cargas de servicio mencionadas en el código (ACI 9.3) son: Carga viva, Carga de viento, Carga de sismo, Carga lateral de presión de tierra y Carga de presión de fluidos, pero para el caso de Guatemala donde el diseño asísmico es aplicable, puede emplearse la más crítica de las siguientes expresiones (la mayor):

$$(1) \quad U = 1.05D + 1.275L + 1.4E \quad (2.1 a)$$

donde 1.05 , 1.275 y 1.4 son los factores de carga

U es la carga última

D, L y E son las cargas de servicio muerta, viva y de sismo respectivamente.

6

$$(2) \quad U = 1.4D + 1.7L \quad (2.1 b)$$

donde 1.4 y 1.7 son los factores de carga

U es la carga última

D y L son las cargas de servicio muerta y viva respectivamente.

Expresando las ecuaciones anteriores en términos de momentos quedan así:

$$M_u = 1.05 M_D + 1.275 M_L + 1.4 M_E \quad (2.2 a)$$

$$6 \quad M_u = 1.4 M_D + 1.7 M_L \quad (2.2 b)$$

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

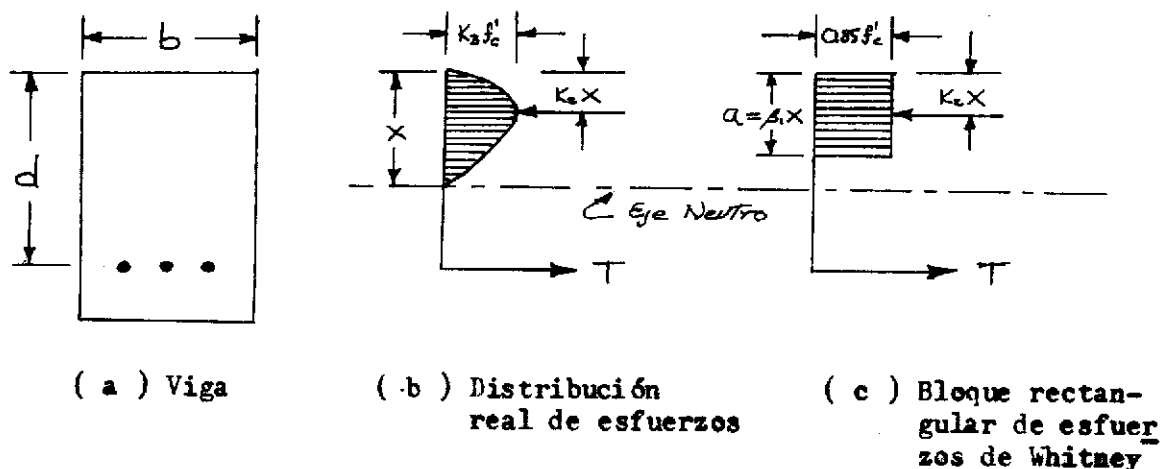
-7- Biblioteca Central

En lo relativo a factores de reducción de capacidad (ϕ) el código (ACI 9.2) da valores para distintas condiciones de carga. Específicamente para la flexión el valor dado es $\phi=0.90$ por lo que el momento último de diseño requerido en flexión - puede expresarse:

$$M_u \geq \frac{U}{\phi} = \frac{U}{0.90} \quad (2.3)$$

2.2 BASES DE LA FLEXION POR RESISTENCIA ULTIMA

El comportamiento general de la relación esfuerzo-deformación para el concreto, es no lineal para niveles de esfuerzo - mayores de $0.5 f'_c$ en las probetas de ensayo (cilindro o cubo standard). Suponiendo que la zona compresiva de una viga tiene la misma variación general esfuerzo-deformación, la distribución de esfuerzos compresivos para una viga que ha alcanzado su resistencia teórica se ha comprobado que es de forma aproximadamente parabólica. Sin embargo el esfuerzo máximo de compresión en la viga, no es necesariamente igual a f'_c y por simplicidad se ha adoptado un sistema equivalente a la distribución parabólica de esfuerzos, propuesto por Whitney en la década de - 1930. Whitney propuso un bloque rectangular de esfuerzos (Fig 2.1) en el cual se utiliza un esfuerzo promedio de $0.85 f'_c$ - con un rectángulo de profundidad $\alpha = \beta_1 \times$ de tal manera que - $\frac{\alpha}{2} = k_2 \times$. Whitney determinó que β_1 debe ser 0.85 para - concreto con $f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2$ y 0.05 menos por cada 70 Kg/cm^2 que sobrepase f'_c los 280 Kg/cm^2 .



d = Peralte efectivo; distancia del rostro compresivo al
centroide del acero en tensión.

FIG. 2.1 DEFINICION DE LA DISTRIBUCION RECTANGULAR DE ESFUER-
ZOS DE WHITNEY

Por medio del rectángulo equivalente se obtiene la re-
sistencia a flexión de la siguiente manera:

$$C = 0.85 f'_c b a \quad (2.4)$$

$$T = A_s f_y \quad (2.5)$$

donde con el uso de f_y se asume que el acero cede antes que
falle el concreto.

Igualando $C = T$ queda: $a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \quad (2.6)$

Recordando: $M_u = A_s f_y \left(d - \frac{1}{2} a \right) \quad (2.7)$

y Sustituyendo la ecuación (2.6) en (2.7) se obtiene:

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{1}{2} \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \right)$$

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{A_s f_y}{1.7 f'_c b} \right) \quad (2.8)$$

El código ACI acepta explícitamente el rectángulo de Whit-
ney (ACI 10.2.7)

Puede notarse que β_1 sólo se necesita para establecer la localización del eje neutro y éste para determinar la deformación del acero, de manera que mientras esta deformación sea mayor - que la de cedencia del acero, la resistencia a flexión no es afectada por el valor de β_1 .

2.3 PORCENTAJE BALANCEADO DE REFUERZO EN LA RESISTENCIA ULTIMA

Se conoce como condición balanceada a la situación en que la deformación máxima en la fibra compresiva alcanza el valor - de 0.003 simultaneamente con la deformación de primer cedencia $\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$ en el refuerzo de tensión. En estas circunstancias puede ocurrir una falla repentina de colapso pues la capacidad de rotación de la sección transversal por distancia longitudinal - unitaria, $\left(\frac{0.003}{x_b} \text{ o } \frac{\epsilon_y}{(d-x_b)} \text{ en la fig. 2.3 a) } \right)$ es relativamente pequeña. Sin embargo el bajar la cantidad de refuerzo de tensión el eje neutro se mueve hacia arriba por la condición de equilibrio $C=T$ y por lo tanto se incrementa la capacidad de rotación de la sección transversal por distancia longitudinal - unitaria $\left(\frac{0.003}{x_b} \text{ o } \frac{\epsilon_y}{(d-x_b)} \text{ en la fig. 2.3 b) } \right)$. Nótese que esta rotación es la causa de las deflexiones en la viga y es análoga a la relación $\frac{M}{EI}$ en la sección de una viga homogénea de un solo material. Por ello se tiene que cuando $\epsilon_s > \epsilon_y$ por una cantidad significativa, la deflexión es mayor ante una falla amenazante. El código (ACI 10.3.2) tiene provisiones para limitar la cantidad máxima de refuerzo de tensión en zonas sísmicas a un 50% de la cantidad en la condición balanceada. Ver figs. 2.2 y 2.3

Rostro Compresivo

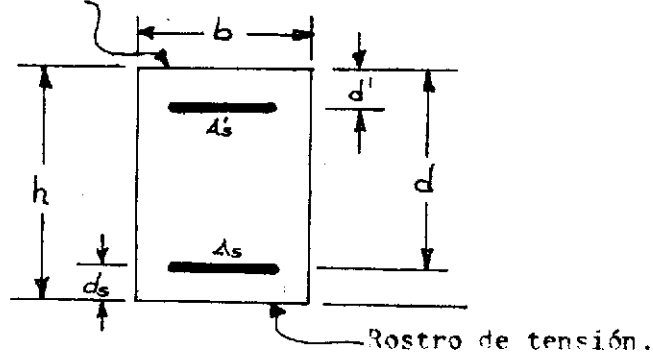
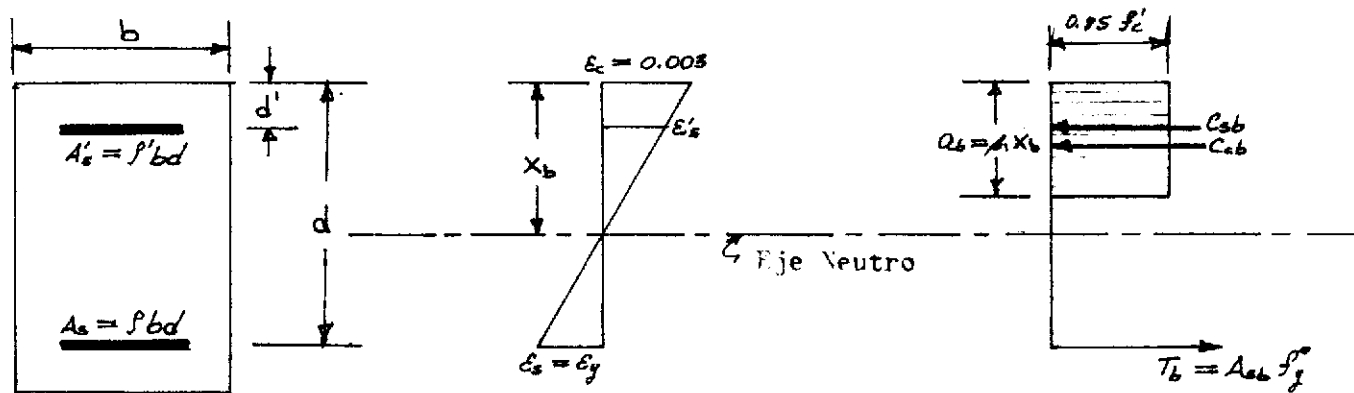
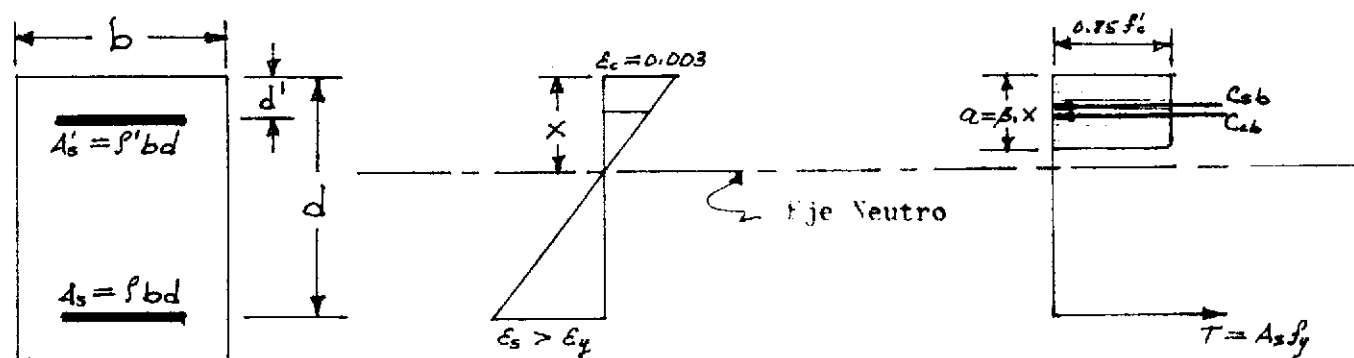


FIG. 2.2

SECCION TRANSVERSAL DE VIGA DOBLEMENTE REFORZADA.



(a) Condición Balanceada ; $A_{sb} = \rho_b b d$



(b) Condición Requerida : $\rho \leq 0.5 \rho_b$

FIG. 2.3 CONDICION BALANCEADA Y PORCENTAJE MAXIMO DE REFUERZO SEGUN ACI.

A partir de las condiciones de equilibrio y compatibilidad puede obtenerse la expresión para el porcentaje balanceado de refuerzo ρ_b :

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left[\beta_1 \left(\frac{6117}{6117 + f_y} \right) - \rho' \right] + \frac{f'_s}{f_y} \rho' \quad \text{SISTEMA METRICO} \quad (2.9)$$

(ver ref. No. 15 para la deducción de la misma).

En el desarrollo siguiente relativo a la metodología de diseño, por razones prácticas y generalidades de construcción en Guatemala, se analizarán únicamente las secciones rectangulares, considerando que son las más representativas. No se enfocarán las secciones "T" pues como tales muy raras veces se dan y por ende no es tan importante su estudio para efectos de optimización.

2.4 DISEÑO DE SECCIONES RECTANGULARES SIMPLEMENTE REFORZADAS

El problema general consiste en determinar d , b y A'_s en base al valor de ρ requerido y conociendo las propiedades de los materiales f'_c y f_y .

las dos condiciones de equilibrio son:

$$C = T \quad (2.10 a)$$

$$M_u = C \text{ ó } T \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (2.10 b)$$

y en base a ellas se obtiene el llamado "Coeficiente de Resistencia" expresado

$$R_u = \frac{M_u}{b d^2} = q f'_c (1 - 0.59 q) \quad \text{donde } q = \frac{\rho f_y}{f'_c} \quad (2.11)$$

$$R_u = \frac{M_u}{bd^2} = \rho f_y \left(1 - \frac{1}{2} \rho m\right) \quad \text{donde} \quad m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} \quad (2.12)$$

Sin tomar en cuenta algunas decisiones de tipo práctico, el procedimiento a seguir en el diseño por Resistencia Última de secciones rectangulares con refuerzo sólo de tensión involucra los siguientes pasos:

- (1) Asumir un valor de $\rho \leq 0.5 \rho_b$ pero mayor que el mínimo de $\frac{14.06}{f_y}$ (ACI 10.5). El valor ρ_b se puede obtener por estática o por la ecuación (2.9) que para $\rho' = 0$ se vuelve:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{6117}{6117 + f_y} \right) \quad \text{SISTEMA METRICO}$$

También puede asumirse un valor para $\rho \frac{f_y}{f'_c}$ toda vez que $\rho \leq 0.5 \rho_b$

- (2) Determinar el bd^2 requerido a partir de

$$bd^2 = \frac{M_u}{R_u}$$

- (3) Escoger un par adecuado de valores para b y d (es recomendable utilizar el valor de 1.5 a 2.0 b para d), tal que el bd^2 provisto sea aproximadamente igual que el bd^2 requerido. (nota: en realidad no se escoge d sino h , la profundidad total, de la cual se obtiene d , manteniendo la cobertura mínima de protección, por lo regular de 5 a 6 cm).

- (4) Determinar el valor revisado ρ después de calcular $R_u = \frac{M_u}{bd^2}$ para la sección escogida usando cualquiera de los siguientes métodos:

a) Por fórmula (el más exacto):

$$\rho = \frac{1}{m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2mR_u}{f_y}} \right)$$

b) Por curvas

c) Por proporción aproximada: $\rho_{revisado} = \rho_{orig.} \frac{R_u \text{ revisado}}{R_u \text{ original}}$

(5) Calcular A_s de: $A_s = \rho_{rev.} \times b d_{actual}$

(6) Seleccionar el refuerzo, y chequear la resistencia de la sección para asegurar que: $M_u \geq \frac{U}{\phi}$

2.5 EJEMPLO

Considerar el pie del contrafuerte de un muro de retención con carga $U = 23,900 \text{ Kg-m}$. Asumir $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y $f_y = 2,810 \text{ Kg/cm}^2$

SOLUCION:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{6117}{6117 + f_y} \right) = \frac{0.85(0.85)(210)}{2810} \left(\frac{6117}{6117 + 2810} \right)$$

$$\rho_b = 0.037 \Rightarrow 0.5 \rho_b = 0.0185 \quad \therefore \text{Asumir } \rho = 1.8 \%$$

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{2810}{0.85 \times 210} = 15.74$$

$$R_u = \rho f_y \left(1 - \frac{1}{2} \rho m \right) = 0.018 \times 2810 \left[1 - 0.5 (0.018)(15.74) \right]$$

$$R_u = 43.414 \text{ Kg/cm}^2$$

$$M_u = \frac{U}{\phi} = \frac{23,900}{0.90} \approx 26,600 \text{ Kg-m} \quad \therefore$$

$$b d^2 = \frac{M_u}{R_u} = \frac{26,600 \times 100}{43.414} \approx 61,275 \text{ cm}^3$$

Se prueba, $b = 30 \text{ cm}$ y se obtiene $d = 45 \text{ cm}$

Por lo tanto se asume $b = 30 \text{ cm}$ y $d = 47 \text{ cm}$
(para $h = 54 \text{ cm}$)

El peralte efectivo se ha hecho mayor que el requerido para $\rho = 1.8\%$ sobre todo para efectos de control de deflexión, por lo tanto:

$$R_{u\text{req.}} = \frac{M_u}{bd^2} = \frac{26,600 \times 100}{30 \times (47)^2} \approx 40$$

$$\rho_{\text{nuevo}} = \frac{1}{m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2m R_u}{f_y}} \right) = \frac{1}{15.74} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2(15.74)(40)}{2810}} \right)$$

$$\rho_{\text{nuevo}} = 0.0164$$

$$A_s = \rho b d = 0.0164 \times 30 \times 47 = 23.124 \text{ cm}^2$$

∴ Pueden usarse 6 # 7 23.22 cm²

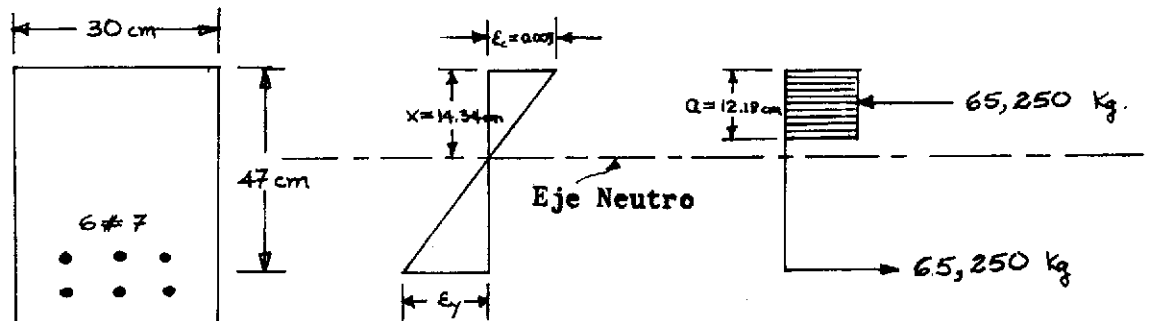


FIG. 2.4 SECCION PARA EL EJEMPLO

Es de notar que en el ejemplo presentado, las consideraciones sobre el riesgo de deflexión, se han hecho en forma bastante rudimentaria, pero el ejercicio y la práctica dan un criterio más fundamentado para el control de la misma, permitiendo evitar el chequeo según las recomendaciones del código ACI.

2.6 DISEÑO DE SECCIONES CON REFUERZO EN AMBAS CARAS

La razón principal para reforzar doblemente una sección de concreto, es decir en la zona de tensión y en la de compresión, puede ser cualquiera de las apuntadas a continuación:

a) Para aumentar la resistencia en la zona compresiva:

Esto es, cuando se desea que una sección rectangular de concreto de dimensiones determinadas soporte un momento mayor al que puede resistir aunque esté reforzada con la máxima cantidad permisible de acero en tensión.

b) Para reducir la deflexión diferida:

Debido al escurrimiento plástico de las partículas con el tiempo, una sección de concreto puede sufrir una deflexión apreciable adicional a la inmediata producida por las cargas. Esta se reduce al reforzar con acero la zona compresiva de dicha sección.

c) Para resistir la reversión de momentos:

Miembros de concreto sujetos a reversión de momentos, es decir que tengan que resistir cargas alternadas en ambos sentidos (por ejemplo un sismo), necesitan refuerzo en ambas caras para evitar una posible falla por tensión.

d) Para lograr un armado adecuado:

En general, el refuerzo puede decirse que forma el "esqueleto" del cuerpo del concreto, y de aquí que muchas veces se coloque tanto en la zona de tensión, como en la de compresión.

Cualquiera que sea el caso, por la naturaleza del proble-

blema y debido a la limitación de las expresiones críticas la optimización de este tipo de secciones puede hacerse en forma aproximada.

Habiendo decidido que ha de usarse acero en compresión - por el motivo que sea, el diseñador necesita determinar la - cantidad de acero de tensión y de compresión a utilizar, con el tamaño limitado de sección para proveer el servicio deseado, y para el efecto se puede servir de las ecuaciones de equilibrio:

$$C_c + C_s = T \quad (2.13)$$

$$M_u = C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) + C_s (d - d') \quad (2.14)$$

Luego, para comprobar la solución debe verificarse que - la parte del hierro de tensión que se supone trabaja con el - concreto, no exceda el 50% de la cantidad para la condición - balanceada, y que el acero de compresión sobrepase la deforma - ción de fluencia. De no ser así las ecuaciones de equilibrio deberán reformularse usando un esfuerzo f'_s en el acero de com - presión proporcional en la deformación en el mismo.

Cuando se requiere acero de compresión por resistencia, - puede obtenerse una solución única haciendo la cantidad de a - cero de tensión igual a $0.50 \rho_b b d$. Al hacer esto, es demos - trable que " $\bar{x}$ ", la localización del eje neutro es como 3% me - nor que el valor en la sección simplemente reforzada con $0.50 \rho_b$ por lo que, un procedimiento recomendable es asumir un valor de " x " a este nivel, o uno más pequeño si se desea un control de deflexión. En este último caso, puede demostrarse que la

cantidad de acero de tensión no cambia en forma significativa (generalmente disminuye un poco), pero la cantidad de acero de compresión si aumenta considerablemente, reduciendo - así la deflexión diferida y aumentando el costo.

COSTO Y CALIDAD DE LOS MATERIALES EN GUATEMALA:

3.1 EL CONCRETO EN GUATEMALA

- Calidad de los elementos y características:

El concreto simple se obtiene mezclando cemento y agua con agregados (gruesos o finos) y a veces aditivos. Su resistencia depende de muchos factores, sobre todo de la proporción cemento-agua, proporción de sus ingredientes, condiciones de temperatura y la humedad bajo la cual se coloca y cura.

El cemento Portland, llamado así por su semejanza a unas rocas de Portland, Inglaterra, es un material con propiedades adhesivas y cohesivas que le permiten unir en presencia del agua, elementos minerales (agregados) para formar una masa sólida y resistente.

Existen cinco tipos principales de cemento según lo establece el ASTM (American Society for Testing and Materials) y son como siguen:

TIPO	USO
I	Construcción Ordinaria donde no se requieren propiedades especiales.
II	Construcción Ordinaria expuesta a la acción moderada de sulfatos o donde se requiere un calor moderado de hidratación.
III	Cuando se requiere una resistencia alta a corto tiempo
IV	Cuando se requiere bajo calor de hidratación
V	Donde se necesita alta resistencia a sulfatos.

En Guatemala se produce únicamente el tipo I, que siendo de relativamente buena calidad, es el que se utiliza en la mayor parte de construcciones y será el que sirva de base para los fines del presente trabajo.

Los agregados forman por lo regular cerca del 75% del volumen total del concreto y por lo tanto sus propiedades influyen definitivamente en el comportamiento del mismo. El agregado fino (arena) es cualquier material de 3.5 mm o menos de diámetro y el grueso (pedrín o grava) cualquier material de mayor tamaño, con las limitaciones que da el código (ACI 3.3.2). Dadas las condiciones geológicas de Guatemala, estos materiales son fáciles de conseguir y de buena calidad permitiendo elaborar un concreto de resistencia adecuada y relativamente bajo precio.

La resistencia del concreto, denotada por f'_c en el código - ACI, es la resistencia compresiva medida en probetas cilíndricas de 15 cm de diámetro por 30 cm de alto en el vigésimo octavo (28vo) día después que fueron hechas. Se acostumbra un diseño de mezcla para obtener valores que oscilen entre los 70 Kg /cm² y 350 Kg/cm². Naturalmente se obtienen valores más bajos también. En el diseño de concreto reforzado los valores más comunes son los de 210 a 250 o aún 420 Kg/cm² . Para situaciones especiales se pueden conseguir valores de hasta 770 Kg/ cm².

- Precios Unitarios del Concreto:

Comúnmente en fundiciones pequeñas y en circunstancias adecuadas, el concreto se prepara en el mismo lugar, aunque con mucha lentitud y calidad un tanto variable, pero cuando el volumen a fundir es razonablemente grande, o para trabajos deli-

cados, o cuando la altura a la que ha de hacerse la fundición es muy elevada, esta práctica es poco efectiva. Para estos casos existen compañías que elaboran el concreto en grandes cantidades y que cuentan con el equipo necesario para superar las dificultades más comunes, colocando el concreto fluido en el lugar donde el interesado lo desea. Estas compañías establecen el precio por metro cúbico de concreto, y para efectos del presente trabajo se tomarán como cifras promedio los de la tabla 3.1 que servirán de base para los cálculos posteriores.

TABLA 3.1

TAMAÑO DE AGREGADO MAXIMO	RESISTENCIA A COMPRESION A 28 DIAS EN Kg/cm^2								
	70	105	140	175	210	245	280	315	350
2"	- -	20.24	20.79	22.18	22.83	24.12	25.30	- -	- -
1-1/4"	19.88	20.72	21.34	21.97	23.82	24.90	26.21	28.81	29.90
3/4"	20.96	21.90	22.63	23.62	24.49	26.02	27.09	29.48	31.22
3/8"	- -	- -	22.56	23.78	25.65	26.38	27.62	- -	- -

LISTA DE PRECIOS UNITARIOS (Q/m^3) DE CONCRETO SEGUN EL TAMAÑO MAXIMO DE AGREGATO USADO, Y LA RESISTENCIA A COMPRESION A 28 DIAS (Kg/cm^2) APLICABLES EN LA CIUDAD CAPITAL DE GUATEMALA.
(PRECIOS DE LA COMPAÑIA "MIXTO LISTO" AL 31 DE AGOSTO DE 1975)

Estos precios son para concreto puesto en obra a nivel suelo.

Existen recargos por algunos factores como:

- Distribuir el concreto sobre el área deseada.
- Subir el concreto a distintos niveles en edificios.
- Descarga lenta.
- Entrega en horas inhábiles o días festivos.

Sin embargo dada la variabilidad de estos recargos, no se tomará ninguno en cuenta para el presente desarrollo debiendo cuidar la persona interesada de utilizar el precio aplicable a cada situación específica para fines de optimización.

3.2 EL ACERO EN GUATEMALA

- Calidad y Características:

El acero empleado como refuerzo de tensión en el concreto, es un material ferroso que es esencia hierro conteniendo carbono pero nunca es más del 0.30% de su peso. El carbono es el elemento empleado para regular las propiedades del acero. Al hierro puro que es suave y dúctil, la adición de carbono le aumenta dureza y resistencia (Ver referencia No. 6), pero le va restando ductilidad. En general la calidad y las propiedades mecánicas del acero dependen de:

- 1) Método de fabricación
- 2) Su composición
- 3) El trabajo mecánico
- 4) El tratamiento de calor.

Para los fines de concreto reforzado, la resistencia mínima del acero utilizado es de 2,300 Kg/cm² (punto mínimo de cedencia), pero pueden obtenerse resistencias de tensión -

de hasta 5,200 Kg/cm² . En Guatemala existen varias fábricas de acero y la producción de éste es de calidad aceptable. La materia prima usada es sobretodo chatarra obtenida en el área, con alguna importación de hierro para casos especiales y como resultado se obtiene un acero con las características indispensables, y de acuerdo a las normas y especificaciones de la ASTM.

- Precios Unitarios:

Debido sobretodo a la fluctuación que sufre la disponibilidad de materia prima (chatarra), los precios del acero en Guatemala y en el área centroamericana son muy variables. A la fecha y en base a las fábricas más importantes que lo producen, los precios en vigencia están en relación directa a las resistencias y oscilan aproximadamente como sigue:

RESISTENCIAS			PRECIOS UNITARIOS (Por qq)
2,300	Kg/cm ²	(33 Ksi)	Q 15.50
2,800	"	(40 Ksi)	
3,500	"	(50 Ksi)	Q 16.00
4,200	"	(60 Ksi)	
5,000	"	(72 Ksi)	
5,200	"	(75 Ksi)	Q 17.00

(Hasta Q 19.00)

El acero de más demanda o sea el más empleado es el de 4,200 Kg/cm² (60,000 psi) estimándose que el 50% de todo el solicitado sea de esta resistencia y el otro 50% formado por las demás categorías. Por esta razón, para efectos del presente trabajo el modelo promedio y utilizado como repre-

sentativo será el acero de 4,200 Kg/cm² de resistencia con precio de Q 16.00/qg.

3.3 LA MADERA EN GUATEMALA

- Generalidades:

En Guatemala, la variedad de clases de madera existentes es muy amplia y en términos generales puede decirse que de buena calidad. A diferencia del concreto y el hierro, el precio de la madera no depende tanto de sus propiedades mecánicas - como de sus características naturales y cualidades decorativas. Sin embargo para los objetivos de este estudio no se entrará - a detalles en este sentido, sino se enfocará únicamente la utilización de la madera como material para formaleta. Para este fin, lo que más interesa es un tipo de madera que resista al peso de concreto, y que tenga precio bajo, no importando tanto la apariencia ni la calidad.

Aunque en algunas ocasiones se desea una superficie de concreto expuesto y para ello se emplean duelas de madera cepillada, la generalidad de los casos únicamente requieren madera rústica para el encofrado regular, utilizando la misma en repetidas oportunidades.

- Precio Unitario de Formaleta:

El tipo de madera más común para los usos señalados, es el pino que es también el más barato, contando con recursos naturales suficientes para abastecer la demanda. El ciprés es otra variedad de las más rústicas pero regularmente se utiliza

para otros fines y luego las demás clases disponibles son ya -
maderas consideradas finas. En vista de ello, para el presente
trabajo el pino será el representativo, con un precio a la fe-
cha de Q 0.15 el pié tabla ($\neq$).

Para analizar el precio unitario de formaleta (Q/m^2) se
tomará en cuenta también el precio de clavos y de mano de obra,
asumiendo condiciones normales y sin dificultades irregulares.
Comúnmente se emplea madera de 1 pulgada de grueso para forma-
leta (tabla).

$$1 \text{ pié}^2 = 1" \times 12" \times 12" = 1 \neq @ 0.15 = Q 0.15$$

$$1 \text{ m}^2 = (3.28)^2 = 10.76 @ 0.15 \dots\dots = Q 1.61$$

Asumiendo que se usará tres veces la madera: $1 \text{ m}^2 = 1.61/3 = Q 0.54/m^2$

Tomando un promedio de 2 Lbs. de clavo por m^2 $0.40 \text{ ¢/lb} = Q 0.80/m^2$

Mano de Obra:

Según precios por trato, hechura y colocación (promedio): $Q 0.50/m^2$

Desencofrado (mitad del anterior):..... : $Q 0.25/m^2$

Márgen de precaución é imprevistos (20%) : $Q 0.41/m^2$

Q 2.50/m²

Como valor representativo unitario de formaleta se toma-
rá entonces el de $Q 2.50/m^2$. Debe recordarse de todas formas,
que en cada caso específico el diseñador debe analizar el cos-
to respectivo para lograr los propósitos de optimización lo -
más fielmente posible.

4

OPTIMIZACION

4.1 GENERALIDADES

El afán de perfección del hombre encuentra una de sus expresiones en la teoría de Optimización. Esta teoría estudia - como describir y conseguir lo mejor, una vez se conozca y se se pa modificar lo que es bueno o malo. A través de siglos han existido nociones de la teoría en mención, pero los cálculos tan voluminosos y tediosos han inhibido su aplicación práctica. - Actualmente el desarrollo de las computadoras no solo ha vuelto los métodos antiguos atractivos, sino ha estimulado bastante - investigación moderna sobre el tema.

Son tres los pasos a seguir para el diseño ideal del sistema que interese.

PRIMERO: Conocer exacta y cuantitativamente como interaccionan las variables del sistema.

SEGUNDO: Es necesario una medida singular de la efectividad del sistema, expresable en términos de las variables del mismo.

TERCERO: Escoger aquellos valores de las variables del sistema que provean la efectividad óptima.

Por lo tanto, los conceptos optimización y selección están íntimamente relacionados.

4.2 DEFINICIONES Y RELACIONES

La función conteniendo las variables a optimizar se llama "Función Objetivo" y puede representarse abreviadamente como - un vector columna de "n" variables y que puede denominarse pun

to X.

$$\bar{X} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \quad (4.1)$$

donde T denota transposición.

Ahora, en toda función objetivo existen restricciones debido a que en la práctica muchos sistemas son físicamente imposibles, impropios, inseguros o de antemano conocidos como -antieconómicos. Estas son limitaciones que demarcarán la llamada "región factible" (F). En general esta región será - el espacio dentro del cual el diseño es aceptable, es decir en el que no ocurren fallas (como fracturas, cedencia, etc.) y en el que las variables respectivas no violen límites establecidos. Las restricciones son las igualdades o desigualdades - que demarcan las fronteras de dicho espacio.

Cuando todas las restricciones son igualdades estrictas la región factible "F" se conoce como región factible cerrada.

Y cuando las restricciones (cualquiera de ellas) son desigualdades estrictas, las partes de la frontera de "F" están fuera de "F" y se dice que "F" es una región abierta.

Considérese por ejemplo un punto determinado $\bar{X}^{**}$ tal que $Y(\bar{X}^{**}) \leq Y(\bar{X})$ para todo $\bar{X} = \bar{X}^{**}$ en "F", entonces a $Y(\bar{X}^{**})$ se le llama mínimo de Y y $\bar{X}^{**}$ es el criterio de minimización. Si $\bar{X}^{**}$ está en la frontera de "F" a Y^{**} se le llama "Mínimo de Frontera", de lo contrario es "Mínimo Interior".

De la misma forma puede definirse el máximo de una función, cuidando únicamente de invertir la desigualdad.

En general, puede llamarse a $Y(\bar{x}^{**})$ el óptimo y a x^{**} el criterio óptimo:

$$Y(\bar{x}^{**}) \equiv Y^{**} \equiv \min_{x \in F} [Y(x)] \quad (4.2)$$

Considérese ahora un punto factible $\bar{x}^*$ y el conjunto de puntos $\bar{X}$ en una vecindad factible de $\bar{x}^*$. Estos son puntos que satisfacen no solo las desigualdades que describe "F" sino la condición adicional:

$$0 < |\bar{x} - \bar{x}^*| < r$$

$$\text{donde } |\bar{x} - \bar{x}^*| \equiv \left[\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*)^2 \right]^{1/2}$$

Por lo que r es el radio de una región esférica n -dimensional abierta con centro en $\bar{x}^*$ y conteniendo los puntos $\bar{x}$ y x^* . La vecindad factible se denominará "N". Si existe una vecindad factible conteniendo a $\bar{x}^*$ tal que $Y(\bar{x}^*) \leq Y(\bar{x})$ para $x \in N$ entonces $Y(\bar{x}^*)$ se conoce como "Mínimo Local" y $\bar{x}^*$ como "Criterio - Mínimo Local".

$$Y^* \equiv Y(\bar{x}^*) \equiv \min_{x \in N} [Y(x)] \quad (4.3)$$

Esta nomenclatura se hace necesaria para establecer la diferencia entre el mínimo Y^{**} (Por lo regular el que se desea) y el mínimo local Y^* que por las técnicas de optimización es el que por lo regular se obtiene. Un mínimo Y^{**} también llamado - Mínimo Global ("Mínimo Menor") es siempre un mínimo local, pero no a la inversa. Una función objetivo con un óptimo local único y por ende global se llama Unimodal.

4.3 PRINCIPALES METODOS EXISTENTES

Puede ocurrir que sólo ha de considerarse un número finito de criterios. Supóngase cualquier problema en que sencillamente se valore la función objetivo para todos los casos posibles, y luego se escoge el valor óptimo directamente. Este método (si se le puede llamar así), de "enumeración exhaustiva" es teóricamente simple pero prácticamente tedioso; también se le denomina " acceso por fuerza bruta ". (Aún con las computadoras tan rápidas es justificable un procedimiento mejor que éste).

Por conveniencia las técnicas de optimización pueden dividirse en dos clases: Métodos Directos y Métodos Indirectos.

4.4 MÉTODOS DIRECTOS

Los métodos directos principian en un punto arbitrario y por mejoramiento sucesivos prosiguen en forma "escalonada" - hasta el óptimo. Se utilizan cuando no existe información sobre la función objetivo y la región factible, o bien cuando la expresión analítica de la función objetivo es muy complicada.- En general son dos las técnicas empleadas por estos métodos:

1.- Técnicas de Eliminación

2.- Técnicas de Ascenso Directo

Las técnicas de Eliminación en general persiguen reducir la región donde puede estar la cima y son muy efectivas en casos con únicamente una variable. Un hecho interesante de estas técnicas es que su efectividad como procedimientos de optimización puede a su vez optimizarse; es decir que es posible - desarrollar técnicas óptimas de eliminación. La base de estas

técnicas es la filosofía "minimax" una especie de pesimismo con trolado, que enseña como conseguir lo mejor evitando lo peor.

Las técnicas de Ascenso tienen dos propósitos fundamentales: 1) Conseguir un valor mejorado del objetivo y 2) Brindar informa ción útil para la localización de experimentos futuros donde pre bablemente se encuentren valores deseables.

En forma resumida, las técnicas de ascenso funcionan con a- yuda de la computadora de la siguiente manera:

Se introducen a la computadora la función restrictora (e- cuaciones que demarcan la región factible) y la función objeti- vo. Los datos serán los materiales y dimensiones necesarias.

En seguida se establecé un punto de diseño (date) dentro - de la región aceptable (es relativamente fácil proponer un dise- ño conservador), y se inciai la ejecución evaluando numericamen te la dirección dentro del espacio en la cual el movimiento del punto inicial de diseño mejorará más rápidamente la función ob- jetivo. El movimiento del punto puede encauzarse ó hacerse al azar y se continúa hasta que la función objetivo mejore o se - tope con una frontera de restricción. Cuando se alcance un - punto donde un gran número de pruebas no presenten otra direc- ción aceptable, hay una gran probabilidad que dicho punto de - diseño sea un óptimo local.

Se puede decir entonces que los Métodos Directos son ite- rativos. Al igual que los Indirectos, son aplicables a proble- mas lineales y no lineales y sirven para funciones objetivos - irrestringidas así como para funciones con restricciones en - forma de ecuación o desigualdad. Sin embargo para ello se de- be valer de muchas técnicas que por salirse del enfoque primor- dial de este estudio, se prefiere omitirlas. (ver Ref. No. 16)

Entre los métodos principales de los directos pueden citarse:

- Método de Hooke y Jeeves
 - Método de Rosenbrock
 - Método de Gelfand y Tsetlin
 - Método de Humphrey
- } METODOS DE BORDE
- El método de Tangentes paralelas de Shah
 - El método de Tangentes paralelas de Buehler
 - Método de gradientes deflectadas de Fletcher y Powell

A esta categoría pertenece también el Método de Mínimos Cuadrados de Gauss.

4.5 METODOS INDIRECTOS

Estos métodos son los que servirán para el caso aquí tratado, Se les llama indirectos porque requieren la solución de ecuaciones en lugar de una búsqueda directa del óptimo. Funcionan porque la solución de dichas ecuaciones es también la localización del óptimo. La efectividad de los métodos indirectos cuando pueden utilizarse estriba en que llegan al punto óptimo sin examinar puntos no-óptimos.

Para el desarrollo de estos métodos es necesaria la aplicación de cálculo diferencial, por lo que se harán algunas definiciones previas:

Se recuerda la definición de derivada:

$$\frac{dy}{dx_i} \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left[\frac{Y(x_i + \Delta x_i) - Y(x_i)}{\Delta x_i} \right] \quad (4.4)$$

Esto es para el caso de una variable. Cuando hay más de una variable independiente la generalización apropiada es el conjunto de "N" primeras derivadas parciales: $\frac{\partial Y}{\partial x_j}$ ($j=1,2,\dots,n$) cada una definida como la función obtenida por diferenciación respecto a x_j sola, manteniendo todas las demás variables constantes.

$$\frac{\partial Y}{\partial x_j} \equiv \lim_{\partial x_j \rightarrow 0} \left[\frac{Y(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \partial x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - Y(\bar{x})}{\partial x_j} \right] \quad (4.5)$$

Además el matemático Taylor demostró que la diferencia - entre $Y(\bar{x} - \partial \bar{x})$ y $Y(\bar{x})$ abreviada ∂Y está dada por la expansión en serie:

$$\partial Y \equiv Y(\bar{x} - \partial \bar{x}) - Y(\bar{x}) \quad (4.6)$$

$$\partial Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} \right) \partial x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_n} \right) \partial x_n + O(\partial \bar{x}^2) \quad (4.7)$$

El término $O(\partial \bar{x}^2)$ puede descartarse pues es demostrable que desaparece en el límite a medida que ∂x_j tiende a cero. Por lo tanto, en forma resumida

$$\partial Y = \nabla Y \partial \bar{x} \quad (4.8)$$

donde a ∇Y se le llama el gradiente de Y, y es el vector fila de primeras derivadas parciales:

$$\nabla Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial x_n} \right) \quad (4.9)$$

y $\partial \bar{x}$ es un vector columna de pequeños desplazamientos.

Euler demostró que en un punto óptimo el gradiente desaparece (Ref. No. 7) lo que significa en términos geométricos que el plano tangente a la función es horizontal en un óptimo.

Por ende, el método indirecto clásico reduce el problema original de optimización sin restricciones, a la aplicación de primeras derivadas parciales a la ecuación conteniendo las variables a optimizar (función objetivo), igualar a cero y resolver las ecuaciones simultáneas.

Sin embargo esta es condición necesaria pero no suficiente para que un punto sea óptimo, pues una tangente es horizontal en un óptimo, en determinados puntos de inflexión, o en un lugar plano. Cualquier lugar donde desaparezca el gradiente se denomina "punto estacionario". Las condiciones suficientes para determinar si un punto es óptimo, involucran también la serie de expansión de Taylor, tomando en cuenta los términos cuadráticos y derivadas de mayor grado. Por no ser de utilidad para el presente caso, no se expone la demostración, quedando a interés del lector consultar la referencia No. 7 para una discusión completa sobre el tema.

4.6 RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Del párrafo anterior se desprende que un óptimo ocurre en la ausencia de condiciones laterales, donde la función objetivo es insensible a cambios en las variables independientes. Sin embargo en muchas ocasiones la función objetivo debe satisfacer condiciones de esta índole, dadas en forma de ecuaciones o de desigualdades. Cuando las restricciones son en forma de desigualdad, el problema de optimización es bastante más complicado, presentando muchos y variados casos y formas de resolución. No obstante, en el desarrollo de este

trabajo no se encuentran restricciones de este tipo y por ende no se abordarán los métodos pertinentes a esta clase de problemas, recomendando consultar la referencia No. 16.

El caso más sencillo y que específicamente es el aplicable al presente trabajo, es cuando la función objetivo debe satisfacer condiciones laterales dadas en forma de ecuaciones que relacionan las variables independientes. En este caso el óptimo se encuentra necesariamente en la frontera de la región factible "F". Los métodos indirectos son válidos únicamente para óptimos interiores, pero los problemas con restricciones igualdad (ecuaciones) pueden transformarse muchas veces en nuevos que tengan el óptimo adentro de la región factible. En las siguientes secciones se verá como lograr esto.

4.7 METODO DE ELIMINACION

Basicamente este método consiste en despejar una de las variables independientes en la ecuación restrictora y luego eliminar la misma variable de la ecuación objetivo, sustituyéndola por la nueva expresión. El óptimo de la nueva expresión, de una variable menos, se obtiene derivando parcialmente e igualando a cero.

Cuando puede usarse, el método de eliminación es efectivo porque reduce el número de variables independientes y consecuentemente el de ecuaciones derivativas que deben resolverse. Sin embargo, ello requiere la expresión de la ecuación restrictora en forma cerrada, tarea muchas veces imposible de lograr.

Los demás métodos indirectos para resolver problemas con restricciones igualdad, trabajan con las expansiones de Taylor en la función objetivo y en cada restricción. Esto conduce a la partición de las variables independientes en dos grupos: - Variables de Estado y Variables de Decisión. En seguida las ecuaciones lineales se resuelven para las diferenciales de estado como funciones lineales de las diferenciales de decisión. Los coeficientes de estas expansiones lineales se conocen como "derivadas de decisión" y son junto con los conceptos de "estado" y "decisión", ideas suficientemente poderosas para resolver sistemas mucho más complicados que el caso sencillo de restricción igualdad. Para la derivación respectiva se descartan los diferenciales cuadráticos y de mayor grado. Hay pruebas rigurosas que dan validez a este procedimiento (Ref. No. 16).

Supóngase M restricciones diferenciales

$$f_m(\bar{x}) = 0 \quad ; \quad m = 1, \dots, M \quad (4.10)$$

La región factible "F" está compuesta por todos los puntos $\bar{x}$ que satisfagan la ecuación (4.10). Cada punto de la región es fronterizo y no hay puntos interiores, mucho menos un óptimo. En cada vecindad de un punto factible $\bar{x}$ hay puntos no factibles donde algunas diferenciales $\partial f_m \neq 0$, y puntos - factibles donde todas $\partial f_m = 0$. Para todos los puntos en la vecindad factible "N" las diferenciales $\partial \bar{x}$ deben satisfacer la condición:

$$\partial f_k = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_n} \right) \partial x_n = \nabla f_k \cdot \partial \bar{x} \quad (4.11)$$

Igualmente existe la expansión para la función objetivo que da para ∂Y no necesariamente igual a cero:

$$\partial Y = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial Y}{\partial X_n} \right) \partial X_n = \nabla Y \cdot \partial \bar{X} \quad (4.12)$$

En "X" se supone que las derivadas parciales son conocidas por lo que las ecuaciones (4.11) y (4.12) constituyen $M+1$ ecuaciones lineales en $N+1$ diferenciales desconocidas: ∂Y y las "n" componentes del vector diferenciable $\partial \bar{X}$. Por facilidad se asume que todas las ecuaciones son linealmente independientes y que $M < N$. Ver Ref. No. 4.

Se arreglan las ecuaciones (4.11) y (4.12) colocando a la izquierda los términos que involucran a ∂Y y las primeras "M" componentes de $\partial \bar{X}$.

$$-\partial Y + \sum_{n=1}^M \left(\frac{\partial Y}{\partial X_n} \right) \partial X_n = - \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial Y}{\partial X_n} \right) \partial X_n \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=1}^M \left(\frac{\partial f_n}{\partial X_n} \right) \partial X_n = - \sum_{n=M+1}^N \left(\frac{\partial f_n}{\partial X_n} \right) \partial X_n \quad (4.14)$$

Por facilidad de distinción entre los diferenciales de cada lado puede llamársele $S_m \equiv X_n$; $m, n = 1, \dots, M$ a las variables de estado.

A la diferencia $P \equiv N - M$ se le conoce como el número de grados de libertad, y por conveniencia se puede expresar un juego de índices nuevo: $p = 1, \dots, P$ dado por

$$p = n - M \quad ; \quad n = M+1, \dots, N$$

Las variables con estos índices se llaman variables de decisión :

$$d_p = X_p$$

Entonces se pueden expresar las ecuaciones (4.13) y (4.14) así:

$$-\partial Y + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial Y}{\partial S_m} \right) \partial S_m = - \sum_{p=1}^P \left(\frac{\partial Y}{\partial d_p} \right) \partial d_p \quad (4.15)$$

$$\sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial f_k}{\partial s_m} \right) \partial s_m = - \sum_{p=1}^P \left(\frac{\partial f_k}{\partial d_p} \right) \partial d_p \quad (4.16)$$

Deben existir exactamente "M" variables de estado, y "P" variables de decisión, pero no siempre es necesario definir - cual de las M + P variables independientes se colocan en estas categorías, toda vez se mantenga la independencia lineal.

Según como se escojan, cualquier especificación de las - diferenciales de decisión permite calcular valores numéricos para los términos del lado derecho de las ecuaciones (4.15) y (4.16). Luego las ecuaciones (4.16) pueden resolverse para - los valores únicos de las diferenciales de estado que mantie- nen el nuevo punto $\bar{X} + \partial \bar{X}$ dentro de la región factible; luego el cambio resultante ∂Y en la función objetivo calculado a través de la ecuación (4.15) puede usarse para ver si la per- turbación fue una mejora.

Las variables de decisión pueden manejarse libremente, - mientras que las variables de estado sólo se ajustan para man- tener el punto nuevo factible. Un ajuste arbitrario de más - de "P" variables sacarían $\bar{X} + \partial \bar{X}$ fuera de la región factible; y especificación de menos de "P" variables dejaría muchas can- tidades desconocidas, imposibilitando la localización de un - punto nuevo. En vista que "P" es el número exacto de decisio- nes que puede hacerse sin afectar la factibilidad, mide el nú- mero de "grados de libertad" del sistema. Cada restricción - adicional reduce el número de grados de libertad y esto, por reducir el número de variables de decisión en realidad facili- ta el problema de optimización.

4.9 DERIVADAS RESTRINGIDAS (METODO JACOBIANO)

Expresando en forma matricial los coeficientes de las variables de estado se puede definir la llamada Matriz Jacobiana:

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad (4.17)$$

La determinante de $\bar{J}$ ($|\bar{J}|$) se conoce como Jacobiana ó determinante funcional:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (s_1, \dots, s_m)} \equiv |\bar{J}| \quad (4.18)$$

Para la solución se necesitan otros "M" Jacobianos que se obtienen sustituyendo f_k ($k=1, \dots, M$) por Y , en cada lugar donde aparezca:

$$\frac{\partial (f_1, \dots, f_{k-1}, Y, f_{k+1}, \dots, f_m)}{\partial (s_1, \dots, s_m)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-1}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_{k-1}}{\partial s_m} \\ \frac{\partial Y}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial Y}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial s_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix} ; \quad k=1, \dots, M \quad (4.19)$$

Finalmente, se obtienen "P" más determinantes de orden $M+1$ sumando a $|\bar{J}|$ una fila y una columna involucrando la objetivo "Y" y una decisión " d_p ":

$$\frac{\partial(y, f_1, \dots, f_m)}{\partial(d_p, s_1, \dots, s_m)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial d_p}, \frac{\partial y}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial d_p}, \frac{\partial f_1}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial d_p}, \frac{\partial f_m}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

$$p = 1, \dots, P$$

Simplificando, y por algunas manipulaciones elementales de determinantes se llega a:

$$\partial y = \sum_{p=1}^P \frac{\frac{\partial(y, f_1, \dots, f_m)}{\partial(d_p, s_1, \dots, s_m)}}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(s_1, \dots, s_m)}} \partial d_p \quad (4.21)$$

Ahora, diferenciando parcialmente esta expresión con respecto a una variable típica de decisión mientras las demás $P-1$ se mantienen constantes dá por resultado una razón de cambio - del objetivo por perturbaciones factibles (no arbitrarias) - en la "P"ava. variable de decisión, lo que a su vez causará un reajuste en las variables de estado. A esta derivada parcial se le dará el símbolo $\frac{\delta y}{\delta d_p}$ para distinguirla de $\frac{\partial y}{\partial d_p}$ que es la que se obtiene para perturbaciones no-factibles, manteniendo los estados constantes.

$$\frac{\delta y}{\delta d_p} = \frac{\frac{\partial(y, f_1, \dots, f_m)}{\partial(d_p, s_1, \dots, s_m)}}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(s_1, \dots, s_m)}} \quad (4.22)$$

Al valor $\frac{\delta y}{\delta d_p}$ se le llama la "derivada restringida" de "y" con respecto a " d_p " o bien la "P"ava. derivada de decisión.

Ya que las diferenciales de decisión pueden ser arbitrarias sin causar que $\bar{x} + \partial \bar{x}$ se salga del vecindario factible ' $\mathcal{P}$ ' "P"-dimensional, $\bar{x}$ es ahora interior a "P" aunque se encuen

en las restricciones. (ver Ref. No. 16)

Derivando con respecto a cualquiera de las variables independientes dá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma^*}{\partial x_n} - \bar{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_n} \right) &= 0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_n} (\gamma^* - \bar{\lambda} \bar{f}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

El término $(\gamma^* - \bar{\lambda} \bar{f})$ se llama función de Lagrange ("L")

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \equiv \gamma(\bar{x}) - \lambda f(\bar{x}) \quad (4.26)$$

Sus derivadas con respecto a λ son las funciones restrictoras que por la ecuación 4.10 deben ser cero en un punto factible:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\bar{f}(\bar{x}) = 0 \quad (4.27)$$

Las ecuaciones (4.25) y (4.27) establecen que cualquier óptimo local factible $\bar{x}^*$ es un punto estacionario para la función de Lagrange y a la vez dan $M+N$ ecuaciones en las M " λ_k " desconocidas y las N " x_n " desconocidas que en principio pueden resolverse para $\bar{x}^*$ y λ .

Existiendo tantas ecuaciones como desconocidas cualquier $\bar{x}^*$ (óptimo local) tiene un juego único de coeficientes de sensibilidad λ asociados con él siempre que las ecuaciones (4.25) y (4.27) sean independientes en el vecindario de $\bar{x}^*$. De aquí - que no importa el juego de variables que se designe como "estados" al definir λ en la ecuación (4.24) pues λ será la misma.

En la formulación de Lagrange no se distingue cuales son -

las variables de estado y cuáles las de decisión. Esto la hace útil en trabajo teórico donde no es necesario elaborar cálculos numéricos y donde, como en el ejemplo por verse en el siguiente capítulo, no se requiere la selección de variables particulares como "decisiones".

4.11 RESUMEN Y COMENTARIOS

En los incisos anteriores se ha expuesto los casos generales de optimización, notando que uno de los más sencillos es el de optimización con restricciones en forma de igualdad, presentando para la solución del mismo tres métodos fundamentales: De Eliminación, el Método Jacobiano y el de Multiplicadores de Lagrange.

De los tres, el más elemental es el de eliminación que para casos sencillos es el más indicado, pues como se ha visto reduce el número de variables independientes. Sin embargo en problemas más complicados muchas veces es imposible llevar las ecuaciones restrictoras a forma cerrada y dado el procedimiento del método, el proceso operacional se dificulta más, sobre todo cuando son varias ecuaciones.

El método Jacobiano es el más general de los tres. A través de él se analizó que la dificultad de un problema depende del número de grados de libertad del mismo. Su secuencia operacional aunque es más larga y relativamente más difícil que la de los otros dos, básicamente se reduce a la solución de las "N" ecuaciones resultantes de los componentes del vector diferencial $\partial \bar{x}$. Introduce los conceptos de "estado", "decisión", "grados de libertad" y "derivada restringida" que sir-

ven para resolver problemas mucho más complicados que el sencillo de restricción igualdad, formando el cimiento de la teoría de optimización en general.

El método de multiplicadores de Lagrange se reduce a la solución de las $M + N$ ecuaciones simultáneas en las $M + N$ desconocidas $(N x_n, M \lambda_k)$. Aunque esto luce más difícil que la solución sencilla de " N " ecuaciones por el método Jacobiano (y muchas veces lo es), hay ocasiones en que las $M + N$ ecuaciones son más fáciles de resolver. Además, el método de Lagrange como se ha visto, da los coeficientes de sensibilidad como sub-productos de los cálculos.

En el caso específico del diseño óptimo de miembros de concreto reforzado sometidos a flexión el método de Lagrange no presenta ninguna ventaja sobre los otros dos métodos, pero existen situaciones más complicadas en que sí muestra su valor.

5.1 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES BASICAS- Ecuación Objetivo:

Con base en los planteamientos del capítulo anterior, se sabe que inicialmente debe definirse cuales serán las variables a optimizar y luego determinar cómo interaccionan.

En el caso específico del diseño de secciones sometidas a flexión las variables más adecuadas de usar, como puede comprobarse del capítulo respectivo, son las dimensiones "b" ó "d" - del miembro, y el área de acero "As" ó el porcentaje " ρ ". En algunas oportunidades incluso puede emplearse como constante la relación "b/d" y hacer variable cualquiera de las dos.

Naturalmente, la sección óptima que se consiga, será relativa a la variable que se haya escogido. Nunca se obtiene un óptimo absoluto pues para optimizar una de las variables "b", - "d" ó " ρ ", una de las otras dos debe mantenerse constante.

En vista que se persigue una optimización relativa al costo, la ecuación objetivo puede plantearse como el costo total - por longitud unitaria de la viga y en función de las tres variables. Para ello puede integrarse el costo por los distintos - componentes de interés:

* COSTO DEL ACERO (C_a) que puede expresarse como:

$$C_a = A_s W_s P_s$$

donde

$$A_s = \text{Area del acero (m}^2 \text{)}$$

$P_s = \text{Precio del acero (Q/qq)}$

$W_s = \text{Densidad del acero (qq/m)}$

* COSTO DEL CONCRETO (C_c) que puede expresarse:

$$C_c = bd P_c$$

donde

$b = \text{ancho (m)}$

$d = \text{Profundidad efectiva (m)}$

$P_c = \text{Precio del concreto (Q/ m}^3 \text{)}$

* COSTO DE FORMALETEO (C_f) que puede expresarse:

$$C_f = (2d + b) P_f$$

donde

$P_f = \text{Precio de formaleteo (Q/ m}^2 \text{)}$

* COSTO DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL PERALTE (C_d) que puede expresarse:

$$C_d = d K_h$$

donde

$K_h = \text{Costo por modificar el peralte del miembro}$

De tal manera que la ecuación objetivo pertinente queda expresada así:

$$C_t = C_a + C_c + C_f + C_d$$

o sea:

$$C_t = A_s W_s P_s + b d P_c + (2d + b) P_f + d K_h \quad (5.1)$$

- Ecuación Restrictora:

Del capítulo 2 se tiene que la base del diseño por flexión usando el método de Resistencia Última y aceptado por el código

ACI 318-71, es la distribución rectangular de esfuerzos propuesta por C. S. Whitney y expresada por la ecuación del momento último (2.8)

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{A_s f_y}{1.7 f'_c b} \right)$$

Para los fines de la optimización aquí perseguida esta es la ecuación que demarca la región factible de diseño y - por lo tanto es la restricción aplicable al caso.

En seguida, ya que se conocen las ecuaciones objetivo - y restrictora, pueden aplicarse los métodos de optimización respectivos.

Para apreciar la forma en que éstos trabajan y por facilidad matemática, se usarán como variables en el desarrollo, la profundidad efectiva "d" y el área de acero "As", dejando el ancho "b" como constante.

Posteriormente se expondrán las expresiones obtenidas al dejar "d" constante y "b" con "As" variables así como al dejar la relación "b/d" constante.

5.2 OPTIMIZACION POR EL METODO DE ELIMINACION

Según el capítulo 4, se despeja de la ecuación restrictora una variable. En este caso se despejará " d ":

$$\text{De: } M_u = A_s f_y d - \frac{A_s^2 f_y^2}{1.7 f'_c b}$$

Llamando

$$r = \frac{f_y^2}{1.7 f'_c b}$$

$$d = \frac{M_u + A_s^2 r}{A_s f_y}$$

$$\therefore \underline{\underline{d = \frac{1}{f_y} (M_u A_s^{-1} + A_s r)}}$$

Se sustituye ahora "d" por el nuevo valor, en la ecuación objetivo:

$$C_T = y = A_s \omega_s p_s + b p_c \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) + 2 p_f \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) + b p_f + \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) K_h$$

$$y = A_s \omega_s p_s + b p_f + \frac{1}{f_y} (M_u A_s^{-1} + A_s r) (b p_c + 2 p_f + K_h)$$

Llamando $K_p = (b p_c + 2 p_f + K_h)$ queda:

$$y = \frac{1}{f_y} (M_u A_s^{-1} + A_s r) K_p + A_s \omega_s p_s + b p_f$$

Derivando con respecto a la otra variable ("A_s") e igualando a cero:

$$\frac{dy}{dA_s} = - \frac{M_u A_s^{-2} K_p}{f_y} + \frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s = 0$$

$$\frac{M_u A_s^{-2}}{f_y} K_p = \frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s \Rightarrow M_u K_p = A_s^2 f_y \left(\frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s \right)$$

Despejando, $A_s^2 = \frac{M_u K_p}{r K_p + f_y \omega_s p_s}$

Sustituyendo por su valor y por

queda: •

$$A_s^2 = \frac{U K_p}{\phi \left(\frac{1.7 f_c' b}{1.7 f_c' b} \right) + f_y \omega_s p_s} \quad \text{que después de ciertas manipulaciones se vuelve:}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y} \left[\frac{1.7 f_c' b K_p}{f_y K_p + 1.7 f_c' b \omega_s p_s} \right]}$$

(5.2)

donde: $K_p = b p_c + 2 p_f + K_h$

5.3 OPTIMIZACION POR EL METODO JACOBIANO

Inicialmente se conocen 2 variables y 1 restricción, por lo que es : $2 - 1 = 1$ grado de libertad

Por facilidad puede llamarse: $A_s = S_1$ y $d = d_1$

La ecuación restrictora igualada a cero puede expresarse:

$$f_1 = A_s f_y d - \frac{A_s^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u$$

$$f_1 = S_1 f_y d_1 - \frac{S_1^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u \quad (5.3)$$

Ahora aplicando los Jacobianos correspondientes, ecuaciones - (4.18), (4.19), (4.20) se obtiene:

$$(1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial S_1} \left(S_1 f_y d_1 - \frac{S_1^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u \right)$$

$$= f_y d_1 - 2 S_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \quad (5.4)$$

$$(2) \quad \frac{\partial C_T}{\partial S_1} = \frac{\partial Y}{\partial S_1} = \frac{\partial}{\partial S_1} \left[S_1 \omega_s p_s + b d_1 p_c + (2 d_1 + b) p_f + d_1 k_h \right]$$

$$= \omega_s p_s \quad (5.5)$$

$$(3) \quad \frac{\partial (Y, f_1)}{\partial (d_1, S_1)} = \begin{vmatrix} (b p_c + 2 p_f + k_h) & \omega_s p_s \\ (S_1 \quad f_y) & \left(f_y d_1 - 2 S_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \right) \end{vmatrix}$$

$$= \left[(b p_c + 2 p_f + k_h) \left(f_y d_1 - 2 S_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \right) - \omega_s p_s S_1 f_y \right] \quad (5.6)$$

Seguidamente puede aplicarse la "derivada restringida de Y respecto a d_p " - ecuación (4.22) -, obteniendo:

Se sustituye ahora "d" por el nuevo valor, en la ecuación objetivo:

$$C_T = y = A_s \omega_s p_s + b p_c \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) + 2 p_f \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) + b p_f + \left(\frac{M_u A_s^{-1} + A_s r}{f_y} \right) K_h$$

$$y = A_s \omega_s p_s + b p_f + \frac{1}{f_y} (M_u A_s^{-1} + A_s r) (b p_c + 2 p_f + K_h)$$

Llamando $K_p = (b p_c + 2 p_f + K_h)$ queda:

$$y = \frac{1}{f_y} (M_u A_s^{-1} + A_s r) K_p + A_s \omega_s p_s + b p_f$$

Derivando con respecto a la otra variable ("As") e igualando a cero:

$$\frac{dy}{dA_s} = - \frac{M_u A_s^{-2} K_p}{f_y} + \frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s = 0$$

$$\frac{M_u A_s^{-2}}{f_y} K_p = \frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s \Rightarrow M_u K_p = A_s^2 f_y \left(\frac{r K_p}{f_y} + \omega_s p_s \right)$$

Despejando, $A_s^2 = \frac{M_u K_p}{r K_p + f_y \omega_s p_s}$

Sustituyendo por su valor y por

queda: •

$$A_s^2 = \frac{U K_p}{\phi \left(\frac{f_y^2 K_p}{1.7 f_c^2 b} \right) + f_y \omega_s p_s} \quad \text{que después de ciertas manipulaciones se vuelve:}$$

$$A_s = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y} \left[\frac{1.7 f_c^2 b K_p}{f_y K_p + 1.7 f_c^2 b \omega_s p_c} \right]} \quad (5.2)$$

donde: $K_p = b p_c + 2 p_f + K_h$

5.3 OPTIMIZACION POR EL METODO JACOBIANO

Inicialmente se conocen 2 variables y 1 restricción, por lo que es : $2 - 1 = 1$ grado de libertad

Por facilidad puede llamarse: $A_s = S_1$ y $d = d_1$

La ecuación restrictora igualada a cero puede expresarse:

$$f_1 = A_s f_y d - \frac{A_s^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u$$

$$f_1 = s_1 f_y d_1 - \frac{s_1^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u \quad (5.3)$$

Ahora aplicando los Jacobianos correspondientes, ecuaciones - (4.18), (4.19), (4.20) se obtiene:

$$(1) \quad \frac{\partial f_1}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left(s_1 f_y d_1 - \frac{s_1^2 f_y^2}{1.7 f_c^2 b} - M_u \right)$$

$$= f_y d_1 - 2 s_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \quad (5.4)$$

$$(2) \quad \frac{\partial C_T}{\partial s_1} = \frac{\partial Y}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left[s_1 \omega_s p_s + b d_1 p_c + (2 d_1 + b) p_f + d_1 k_h \right]$$

$$= \omega_s p_s \quad (5.5)$$

$$(3) \quad \frac{\partial (Y, f_1)}{\partial (d_1, s_1)} = \begin{vmatrix} (b p_c + 2 p_f + k_h) & \omega_s p_s \\ (s_1 \quad f_y) & \left(f_y d_1 - 2 s_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \right) \end{vmatrix}$$

$$= \left[(b p_c + 2 p_f + k_h) \left(f_y d_1 - 2 s_1 \frac{f_y^2}{1.7 f_c^2 b} \right) - \omega_s p_s s_1 f_y \right] \quad (5.6)$$

Seguidamente puede aplicarse la "derivada restringida de Y respecto a d_p " - ecuación (4.22) -, obteniendo:

$$\frac{\partial Y}{\partial d_r} = \frac{\frac{\partial (Y, f_y)}{\partial (d_i, s_i)}}{\frac{\partial f_y}{\partial s_i}} = \frac{[(b_{pe} + 2p_f + k_h)(f_y d_i - 2s_i \frac{f_y^2}{1.7f_z b}) - \omega_s p_s s_i f_y]}{(f_y d_i - 2s_i \frac{f_y^2}{1.7f_z b})}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial d_r} = (b_{pe} + 2p_f + k_h) - \frac{\omega_s p_s s_i f_y}{(f_y d_i - 2s_i \frac{f_y^2}{1.7f_z b})} \quad (5.7)$$

En un óptimo factible se sabe que $\left(\frac{\partial Y}{\partial d_r}\right) = 0$ (Ec. 4.23) por lo que llamando:

$$K_p = (b_{pe} + 2p_f + k_h)$$

$$y \quad r = \frac{f_y^2}{1.7f_z b}$$

queda la ecuación (5.7) así:

$$\frac{\partial Y}{\partial d_r} = K_p - \frac{\omega_s p_s s_i f_y}{f_y d_i - 2s_i r}$$

Despejando, queda:
$$d_i = \frac{\omega_s p_s f_y s_i + 2s_i r K_p}{f_y K_p}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación restrictora da:

$$s_i f_y \left(\frac{\omega_s p_s f_y s_i + 2s_i r K_p}{f_y K_p} \right) - s_i^2 r - M_u = 0$$

Sustituyendo otra vez s_i por A_s y d_i por d queda:

$$A_s^2 \omega_s p_s f_y + 2A_s^2 r K_p - A_s^2 K_p r = M_u K_p$$

Despejando,

$$A_s^2 = \frac{M_u K_p}{\omega_s p_s f_y + 2r K_p - r K_p}$$

Después de ciertas manipulaciones elementales y de sustituir "r" por su valor $\frac{f_y^2}{1.7f_z b}$ y M_u por $\frac{U}{\phi}$ queda igual que la ecuación (5.2) :

$$A_s = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y} \left[\frac{1.7 f'_c b K_p}{f_y K_p + 1.7 f'_c b \omega_s \rho_s} \right]}$$

donde: $K_p = b \rho_c + 2 \rho_f + K_h$

5.4 OPTIMIZACION POR EL METODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Por la ecuación (4.26) se tiene:

$$\bar{C} = C_T + \lambda g \quad \text{llamada Ecuación de Costo (5.8)}$$

donde: $C_T =$ Ecuación Objetivo

$g =$ Ecuación Restrictora

$\lambda =$ Multiplicador de Lagrange

En la ecuación (5.8) aparecen tres variables: "d", "A_s", y "λ"
y por la ecuación (4.27) se sabe que derivando con respecto a ellas e igualando a cero se obtienen tres ecuaciones simultáneas cuya solución produce los resultados óptimos.

Operando:

$$\bar{C} = A_s \omega_s \rho_s + b d \rho_c + (2d + b) \rho_f + d K_h + \lambda \left(A_s f_y d - \frac{A_s^2 f_y^2}{1.7 f'_c b} - M_u \right)$$

Seguidamente se deriva respecto a cada variable:

$$(1) \frac{d\bar{C}}{dA_s} = \omega_s \rho_s + f_y d \lambda - 2 A_s \lambda \frac{f_y^2}{1.7 f'_c b} = 0$$

$$(2) \frac{d\bar{C}}{dd} = b \rho_c + 2 \rho_f + K_h + A_s f_y \lambda = 0$$

$$(3) \frac{d\bar{C}}{d\lambda} = A_s f_y d - \frac{A_s^2 f_y^2}{1.7 f'_c b} - M_u = 0$$

Llamando $r = \frac{f_y^2}{1.7 f'_c b}$

y $K_p = b \rho_c + 2 \rho_f + K_h$

De (1) se despeja λ :
$$\lambda = \frac{\omega_s p_s}{2A_s r - f_y d} \quad (a)$$

De (2) también se despeja:
$$\lambda = - \frac{k_p}{A_s f_y} \quad (b)$$

Igualando (a) = (b) :
$$\frac{\omega_s p_s}{2A_s r - f_y d} = - \frac{k_p}{A_s f_y}$$

Se despeja "d" :
$$d = \frac{A_s f_y \omega_s p_s + 2A_s r k_p}{f_y k_p} \quad (5.9)$$

Ahora sustituyendo "d" en (3) y cambiando signos:

$$A_s^2 r - A_s f_y \left(\frac{A_s f_y \omega_s p_s + 2A_s r k_p}{k_p f_y} \right) + M_u$$

Operando y sustituyendo "r" por su valor nuevamente y expresando $M_u = \frac{U}{\phi}$:

$$A_s = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y} \left[\frac{1.7 f_c' b k_p}{f_y k_p + 1.7 f_c' b \omega_s p_s} \right]}$$

donde:

$$k_p = b p_c + 2 p_f + k_h$$

Como puede apreciarse, a través de los tres métodos se obtiene la misma expresión para la variable "As" que puede considerarse como la fundamental. A partir de ella se pueden derivar las otras fórmulas de interés, así:

De la ecuación (5.9),
$$d = \frac{A_s f_y \omega_s p_s + 2A_s r k_p}{k_p f_y}$$

Se despeja As :
$$A_s = \frac{f_y d k_p}{f_y \omega_s p_s + 2 r k_p}$$

donde:
$$r = \frac{f_y^2}{1.7 f_c' b}$$

Se sabe que
$$\rho = \frac{A_s}{b d}$$

Y por lo tanto:
$$\rho_o = \frac{\frac{f_y d k_p}{f_y \omega_s p_s + 2 r k_p}}{b d} = \frac{f_y k_p}{b (f_y \omega_s p_s + 2 r k_p)}$$

Operando y sustituyendo "r" nuevamente por su valor se obtiene:

$$\rho_o = \left[\frac{2 f_y}{1.7 f'_c} + \frac{b \omega_s \rho_s}{k_p} \right]^{-1}$$

(5.10)

Ahora en la ecuación restrictora,

$$A_s f_y d - A_s^2 r - M_u = 0$$

$$\text{con } r = \frac{f_y^2}{1.7 f'_c b}$$

Se sustituye A_s por $\rho_o b d$:

$$\rho_o^2 b^2 d^2 r - \rho_o b d f_y d + M_u = 0$$

Despejando "d", operando y sustituyendo "r" por su valor, y M_u por $\frac{U}{\phi}$, se obtiene la expresión para la profundidad efectiva óptima:

$$d_o = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y b \rho_o} \left[\frac{1.7 f'_c}{1.7 f'_c - \rho_o f_y} \right]}$$

(5.11)

Debe notarse que para el caso particular aquí tratado, el método más sencillo es el de Eliminación, pero son fácilmente apreciables las características de los tres señalados en el capítulo anterior, comprobándose que el método Jacobiano es el más general y analítico, aplicable a problemas mucho más complicados.

De la misma manera como se derivaron las ecuaciones óptimas anteriores, dejando "d" y "As" como variables se pueden obtener expresiones óptimas al dejar "b" y "As" variables y "d"

constante, o bien, dejar la relación "b/d" constante. En cada caso el óptimo será relativo a las variables escogidas y diferente al ya obtenido.

A continuación se presentan éstas otras expresiones óptimas. Por ser innecesario al concepto, se omiten las operaciones matemáticas, ilustrando unicamente el resultado de interés que es el porcentaje de acero.

Dejando "b" y "As" variables y "d" constante, que es el caso más indicado para el control de deflexiones, se obtienen las expresiones :

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{f_y}{1.7 f_c'} + \sqrt{\left(\frac{f_y}{1.7 f_c'}\right)^2 + \frac{f_y}{1.7 f_c'} K_{ed}} \quad (5.12)$$

$$A_{s_o} = \frac{U}{\phi f_y d} \left[\sqrt{\frac{f_y}{1.7 f_c' K_{ed}} + f_y} + 1 \right] \quad (5.13)$$

$$\text{donde: } K_{ed} = \frac{d \omega_s \rho_s}{d \rho_c + \rho_f} \quad (5.14)$$

Al dejar la relación "d/b" constante, se consigue la expresión:

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{f_y}{1.7 f_c'} + \frac{K_{er}}{2} + \sqrt{\left[\frac{f_y}{1.7 f_c'} + \frac{K_{er}}{2}\right] + \frac{f_y}{1.7 f_c'} K_{er}} \quad (5.15)$$

$$\text{donde: } K_{er} = \frac{b \omega_s \rho_s}{2 b \rho_f + (2 + b/d) \rho_f + K_h} \quad (5.16)$$

Cada uno de los casos brinda un costo $\bar{C}$ diferente, que el diseñador está en libertad de escoger. Siempre habrá un valor mínimo, pero no siempre será el más adecuado para las circunstancias, habiendo diversos factores de consideración, y es aquí donde el interesado debe decidir con mucha cautela y criterio.

Por facilidad de comprensión, se aplican las fórmulas óptimas al mismo ejemplo del capítulo 1 utilizando como datos los - precios presentados en el capítulo 3.

EJEMPLO 6.1:

Considerar el pié del contrafuerte de un muro de retención, sujeto a una carga de $U = 23,900 \text{ Kg-m}$. Utilizar concreto de $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y acero de $f_y = 2,810 \text{ Kg/cm}^2$

- Datos:
- $P_s = \text{Precio del acero de } 2,810 \text{ Kg/cm}^2 = Q 16.00/\text{qq}$
 - $W_s = \text{Densidad del acero} = 173 \text{ qq/m}^3$
 - $P_c = \text{Precio del concreto de } 210 \text{ Kg/cm}^2 \text{ con agregado de } 3/4" = Q 24.99/\text{m}^3$
 - $P_f = \text{Precio de formaleta} = Q 2.50/\text{m}^2$

Nota: El costo de mano de obra por armado del acero no se - tomará en cuenta. El diseñador deberá considerarlo - en cada caso particular según el tipo de varilla.

6.1 VALOR OPTIMO CON "d" VARIABLE

Ecuación a aplicar, la (5.10):

$$g_o = \left[\frac{2f_y}{1.7f'_c} + \frac{b_w p_s}{k_f} \right]^{-1}$$

donde $k_f = b p_c + 2 p_s + k_h$

Los costos directamente proporcionales al peralte (k_h) - en realidad no afectan mucho la obtención del óptimo, y en el

presente caso no son aplicables por lo que se descartarán en los análisis posteriores. No obstante para otros casos, sí pueden tener importancia debiendo cuidar el diseñador de incluirlos en los cálculos.

Asumiendo $b = 33$ cm y operando:

$$\rho_o = \left[\frac{2(2810)}{1.7 \times 210} + \left(\frac{0.33 \times 173 \times 16}{0.33 \times 24.49 + 2 \times 2.50} \right) \right]^{-1}$$

$$\underline{\underline{\rho_o = 0.01169}}$$

Como se puede apreciar, este valor es menor que el $0.5\rho_b$ y por lo tanto es el porcentaje óptimo de acero.

Ahora puede obtenerse la profundidad óptima "d" por la expresión (5.11):

$$d_o = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y b \rho_o} \left[\frac{1.7 f_c'}{1.7 f_c' - f_y \rho_o} \right]}$$

$$d_o = \sqrt{\frac{23900}{0.90 \times 28.1 \times 10^6 \times 0.33 \times 0.0117} \left[\frac{1.7 \times 2.1 \times 10^6}{1.7 \times 2.1 \times 10^6 - 28.1 \times 10^6 \times 0.0117} \right]}$$

$$\underline{\underline{d_o = 0.52 \text{ m}}}$$

Empleando los datos anteriores se puede calcular el área óptima de acero:

$$A_{s_o} = \rho_o b d_o = 0.01169 \times 0.33 \times 0.52$$

$$\underline{\underline{A_{s_o} = 20.08 \text{ cm}^2}}$$

USESE 4 #8

Como puede notarse, del valor de "b" asumido dependen los va-

lores "d" y "As". La experiencia da el criterio para escoger el valor inicial o bien se efectúan dos tanteos para obtener los valores adecuados.

En seguida puede estimarse el costo por metro lineal de contrafuerte:

$$C_T = A_s w_s p_s + b d p_c + (2d + b) p_f + d K_h$$

$$C_T = 0.002008 \times 173 \times 16 + 0.33 \times 0.52 \times 24.49 + (2 \times 0.52 + 0.33) 2.50$$

$$C_T = Q 13.19 / m. de alto$$

6.2 VALOR OPTIMO CON "b" VARIABLE

Ecuación de partida, (5.12):

$$\rho_o = \left[\frac{f_y}{1.7 f_c'} + \sqrt{\left(\frac{f_y}{1.7 f_c'} \right)^2 + \frac{f_y}{1.7 f_c'} K_{ed}} \right]^{-1}$$

donde

$$K_{ed} = \frac{d w_s p_s}{d p_c + p_f}$$

$$\text{Asumiendo } d = 52 \text{ cm: } K_{ed} = \frac{0.52 \times 173 \times 16}{0.52 \times 24.49 + 2.50} \approx 94.48$$

$$\rho_o = \left[\frac{2810}{1.7 \times 210} + \sqrt{\left(\frac{2810}{1.7 \times 210} \right)^2 + \left(\frac{2810}{1.7 \times 210} \right) 94.48} \right]^{-1}$$

$$\rho_o = 0.02758$$

En este caso debe emplearse el 0.5% pues es el valor fronterizo más cercano al óptimo,

$$\rho_o = 0.0185$$

Se puede encontrar ahora el área de acero óptima:

presente caso no son aplicables por lo que se descartarán en los análisis posteriores. No obstante para otros casos, sí pueden tener importancia debiendo cuidar el diseñador de incluirlos en los cálculos.

Asumiendo $b = 33$ cm y operando:

$$\rho_o = \left[\frac{2(2810)}{1.7 \times 210} + \left(\frac{0.33 \times 173 \times 16}{0.33 \times 24.49 + 2 \times 2.50} \right) \right]^{-1}$$

$$\underline{\underline{\rho_o = 0.01169}}$$

Como se puede apreciar, este valor es menor que el $0.5\rho_b$ y por lo tanto es el porcentaje óptimo de acero.

Ahora puede obtenerse la profundidad óptima "d" por la expresión (5.11):

$$d_o = \sqrt{\frac{U}{\phi f_y b \rho_o} \left[\frac{1.7 f'_c}{1.7 f'_c - f_y \rho_o} \right]}$$

$$d_o = \sqrt{\frac{23300}{0.90 \times 28.1 \times 10^6 \times 0.33 \times 0.0117} \left[\frac{1.7 \times 2.1 \times 10^6}{1.7 \times 2.1 \times 10^6 - 28.1 \times 10^6 \times 0.0117} \right]}$$

$$\underline{\underline{d_o = 0.52 \text{ m}}}$$

Empleando los datos anteriores se puede calcular el área óptima de acero:

$$A_{s_o} = \rho_o b d_o = 0.01169 \times 0.33 \times 0.52$$

$$\underline{\underline{A_{s_o} = 20.08 \text{ cm}^2}}$$

USESE 4 #8

Como puede notarse, del valor de "b" asumido dependen los va-

lores "d" y "As". La experiencia da el criterio para escoger el valor inicial o bien se efectúan dos tanteos para obtener los valores adecuados.

En seguida puede estimarse el costo por metro lineal de contrafuerte:

$$C_T = A_s w_s p_s + b d p_c + (2d + b) p_f + d K_h$$

$$C_T = 0.002008 \times 173 \times 16 + 0.33 \times 0.52 \times 24.49 + (2 \times 0.52 + 0.33) 2.50$$

$$C_T = Q 13.19 / m. de alto$$

6.2 VALOR OPTIMO CON "b" VARIABLE

Ecuación de partida, (5.12):

$$\rho_o = \left[\frac{f_y}{1.7 f_c'} + \sqrt{\left(\frac{f_y}{1.7 f_c'} \right)^2 + \frac{f_y}{1.7 f_c'} K_{ed}} \right]^{-1}$$

donde

$$K_{ed} = \frac{d w_s p_s}{d p_c + p_f}$$

Asumiendo $d = 52 \text{ cm}$: $K_{ed} = \frac{0.52 \times 173 \times 16}{0.52 \times 24.49 + 2.50} \approx 94.48$

$$\rho_o = \left[\frac{2810}{1.7 \times 210} + \sqrt{\left(\frac{2810}{1.7 \times 210} \right)^2 + \left(\frac{2810}{1.7 \times 210} \right) 94.48} \right]$$

$$\rho_o = 0.02758$$

En este caso debe emplearse el $0.5 \rho_o$ pues es el valor fronterizo más cercano al óptimo,

$$\rho_o = 0.0185$$

Se puede encontrar ahora el área de acero óptima:

Ecuación (5.13)

$$A_{s_o} = \frac{U}{\phi f_y d} \left[\sqrt{\frac{f_y}{1.7 f_c' K_{ed} + f_y}} + 1 \right]$$

$$A_{s_o} = \frac{23900}{0.90 \times 28.1 \times 10^6 \times 0.52} \left[\sqrt{\frac{28.1 \times 10^6}{1.7 \times 2.1 \times 10^6 \times 94.49 + 28.1 \times 10^6}} + 1 \right]$$

$$A_{s_o} = 0.00233 \text{ m}^2$$

Puede encontrarse el valor de "b"

$$b = \frac{A_{s_o}}{\rho_o d} = \frac{0.00233}{0.0185 \times 0.52}$$

$$b_o = 0.24 \text{ m.}$$

Y ahora el costo:

$$C_T = A_{s_o} \omega_s p_s + b d p_c + (2d + b) p_f$$

$$C_T = 0.00233 \times 173 \times 16 + 0.24 \times 0.52 \times 24.49 + (2 \times 0.52 + 0.24) 2.50$$

$$C_T = @12.69 / \text{m. de alto.}$$

6.3 VALOR OPTIMO CON LA RELACION "b/d" CONSTANTE

En este caso la ecuación a usar es la (5.15):

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{f_y}{1.7 f_c'} + \frac{K_{er}}{2} + \sqrt{\left[\frac{f_y}{1.7 f_c'} + \frac{K_{er}}{2} \right]^2 + \frac{f_y}{1.7 f_c'} K_{er}}$$

donde:

$$K_{er} = \frac{b \omega_s p_s}{2 b p_c + (2 + b/d) p_f + K_{ed}}$$

Aplicando valores y asumiendo $b = 33 \text{ cm}$ y $b/d = 0.635$

$$K_{er} = \frac{0.33 \times 173 \times 16}{2 \times 0.33 \times 24.49 + (2 + 0.635) 2.50} = \frac{913.44}{22.75} = 40.15$$

Y por lo tanto:

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{28.1}{1.7 \times 210} + \frac{40.15}{2} + \sqrt{\left[\frac{28.1}{1.7 \times 210} + \frac{40.15}{2} \right]^2 + \frac{28.1}{1.7 \times 210} 40.15}$$

$$\underline{\underline{\rho_o = 0.0164}}$$

Este ρ_o es menor que $0.5 \rho_b$ por lo que sí cumple con los requerimientos que manda el código.

Conociendo: $b = 0.33$ y $b/d = 0.635$ $d = 0.52$

Por lo que: $A_{s_o} = \rho_o b d = 0.0164 \times 0.33 \times 0.52$

$$\underline{\underline{A_{s_o} = 0.0028 \text{ m}^2}}$$

Puede ahora calcularse el costo:

$$C_T = A_s w_s p_s + b d p_c + (2d + b) p_f$$

$$C_T = 0.0028 \times 173 \times 16 + 0.33 \times 0.52 \times 24.49 + (2 \times 0.52 + 0.33) 2.50$$

$$C_T = Q 15.38 / m. \text{ de alto.}$$

Con base en los resultados de estas tres soluciones se puede observar que el método más económico para este ejemplo específico, es el de "b" variable. Naturalmente esto no significa que siempre sea el más adecuado. Las circunstancias dictarán el método pertinente a cada caso, y el ingeniero debe cuidar de aplicarlo correctamente.

Para el caso de secciones doblemente reforzadas no son aplicables las fórmulas anteriores a menos que el momento actuante sea el mismo en ambos sentidos. Sin embargo, algunas provisiones especiales para el diseño sísmico (ACI 318-71 Apéndice - "A") sí pueden combinarse con las fórmulas para conseguir una sección con refuerzo doble aunque sea en forma aproximada, mediante el criterio cuidadoso del diseñador.

Enfocando otro aspecto, es interesante notar que al descartar los términos P_f y K_d , las fórmulas óptimas pueden extenderse a distintos tipos de estructuras. Tomando la expresión - con "d" variable (ecuación 5.10) por ser la más sencilla queda:

$$\rho_o = \left[\frac{2f_y}{1.7 f_c'} + \frac{\omega_s \beta}{P_c} \right]^{-1} \quad (6.1)$$

Esta expresión es válida para el caso de zapatas, losas y muros, pues para estas estructuras, el costo de encofrado puede considerarse realísticamente como independiente de las variables.

Particularmente en el caso de losas, Sawco, citado por Hairsine (referencia No. 3, pp 250-251) derivó la siguiente expresión para el porcentaje óptimo de acero:

$$\rho_o = \frac{A_o}{b d_o} = \frac{C_c}{C_s} \quad (6.2)$$

descartando la deflexión por el propio peso de la losa.

No es sorprendente notar que los resultados que arroja la ecuación (6.2) son bastante parecidos a los obtenidos por la e

cuación (6.1)

Sin embargo para el uso de cualquiera de estas expresiones, debe enfatizarse lo fundamental que es el criterio y cuidado de parte del diseñador. Las condiciones que envuelven - cada problema determinarán la ecuación a usar, y en cada caso serán diferentes las variables de importancia. En muchas ocasiones incluso, el porcentaje de acero debe utilizarse únicamente como punto de partida ya que cambios en los precios - o redondeo de dimensiones, pueden influir significativamente en el valor del óptimo.

A continuación se presentan gráficas típicas para este estudio, basadas en la ecuación (6.1)

6.5 GRAFICAS

El objetivo primordial de las siguientes gráficas, es - mostrar la interrelación de los distintos parámetros que intervienen en las fórmulas óptimas.

Las gráficas (6.1), (6.2) y (6.3) presentan la variación del porcentaje óptimo de acero ($\%$) para los tres casos vistos, en función de la resistencia de los materiales y la relación de costos, descartando el de encofrado.

En la gráfica No. (6.4) se puede apreciar la variación de la relación COSTO TOTAL/COSTO OPTIMO en función del porcentaje de acero ($\%$) para las tres ecuaciones óptimas correspondientes. En ella se toma como base el costo óptimo del caso en que "d" es variable y "b" es fija, descartando el costo de encofrado. Utilizando la ecuación (6.1) para

el efecto se obtiene $\rho_o = 0.0078$ y $d_o = 0.63$

Como puede notarse, el valor del porcentaje óptimo de acero (ρ_o) disminuye al descartar el costo de encofrado y por ende aumenta el valor de " d_o ".

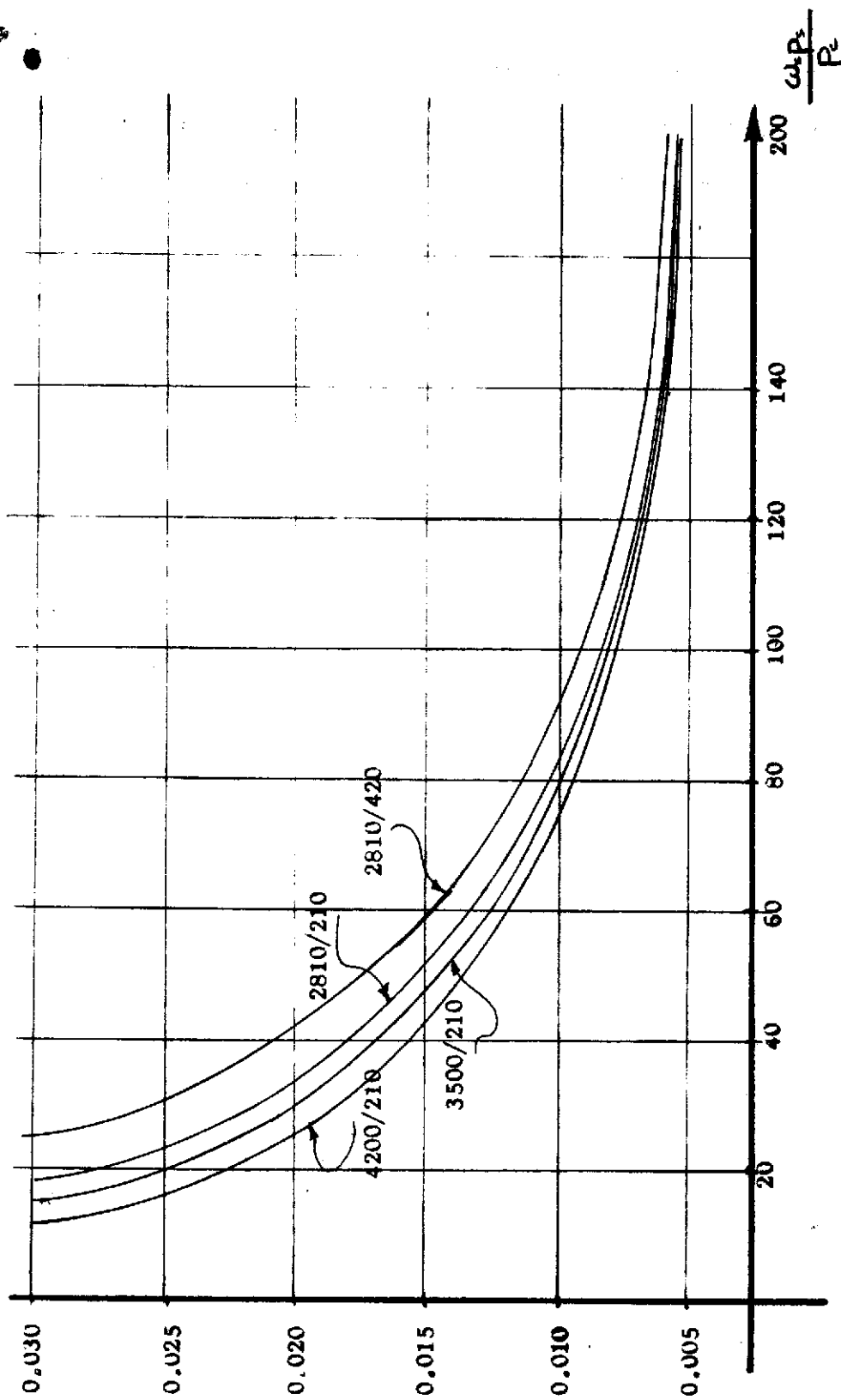


FIG. 6.1 PORCENTAJE OPTIMO DE ACERO EN FUNCION DE LA RESISTENCIA DE LOS MATERIALES

Y EL COSTO DE LOS MISMOs, DESCARTANDO EL DE ENCOFRADO.

Optimo según la ecuación 6.1 "d" variable y "b" fija. $\rho_o = \left(\frac{2f_y}{1.7f_c} + \frac{\omega_s P_s}{P_c} \right)^{-1}$

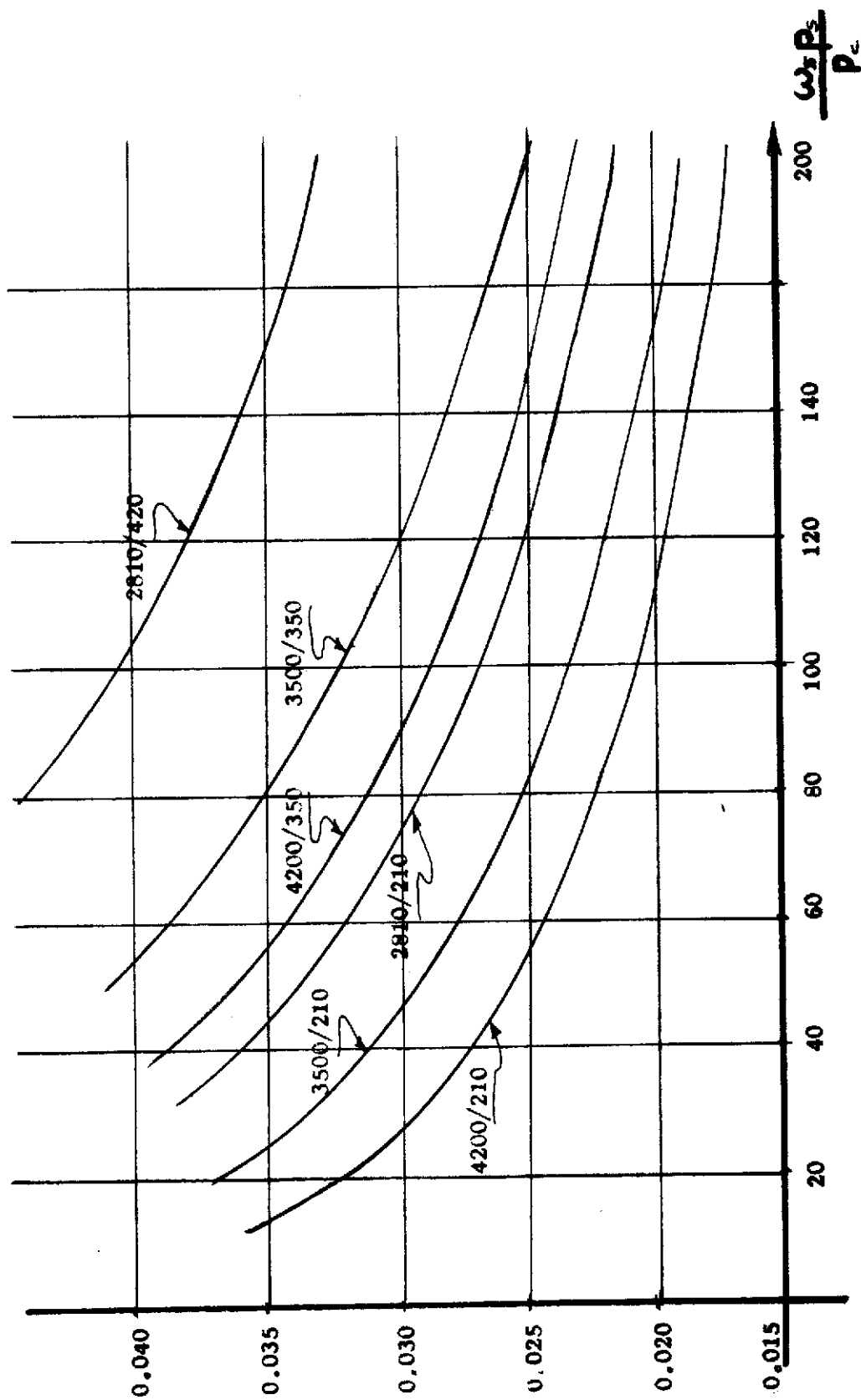


FIG. 6.2 PORCENTAJE OPTIMO DE ACERO EN FUNCION DE LA RESISTENCIA DE LOS MATERIALES

Y EL COSTO DE LOS MISMOS, DESCARTANDO EL DE ENCOFRADO

Optimo Según ecuación 5.12. "b" variable y "d" fija
$$P_o = \left[\frac{f_y}{1.7f_c} + \sqrt{\left(\frac{f_y}{1.7f_c} \right)^2 + \frac{f_y \omega_s P_s}{1.7f_c P_c}} \right]^{-1}$$

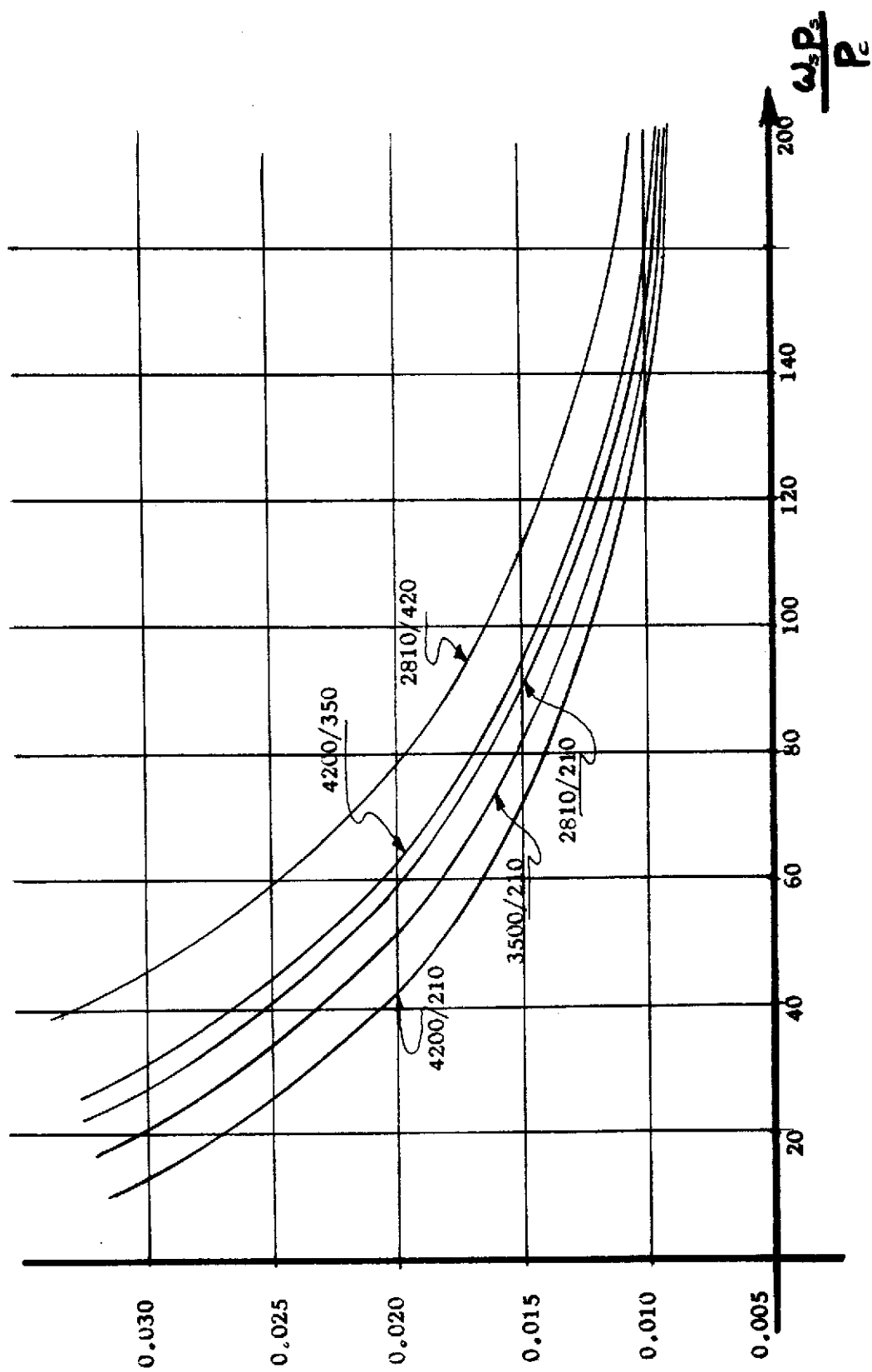


FIG. 6.3 PORCENTAJE OPTIMO DE ACERO EN FUNCION DE LA RESISTENCIA DE LOS MATERIALES

Y EL COSTO DE LOS MISMO, DESCARTANDO EL DE ENCOFRADO

Optimo según la ecuación 5.15. Relación "b/d" constante : $\frac{1}{c} = \frac{f_y}{1.7f_c} + \frac{\omega_s P_c}{4f_c} + \sqrt{\left(\frac{f_y}{1.7f_c} + \frac{\omega_s P_c}{4f_c}\right)^2 + \frac{f_y}{1.7f_c} \cdot \frac{\omega_s P_c}{2f_c}}$

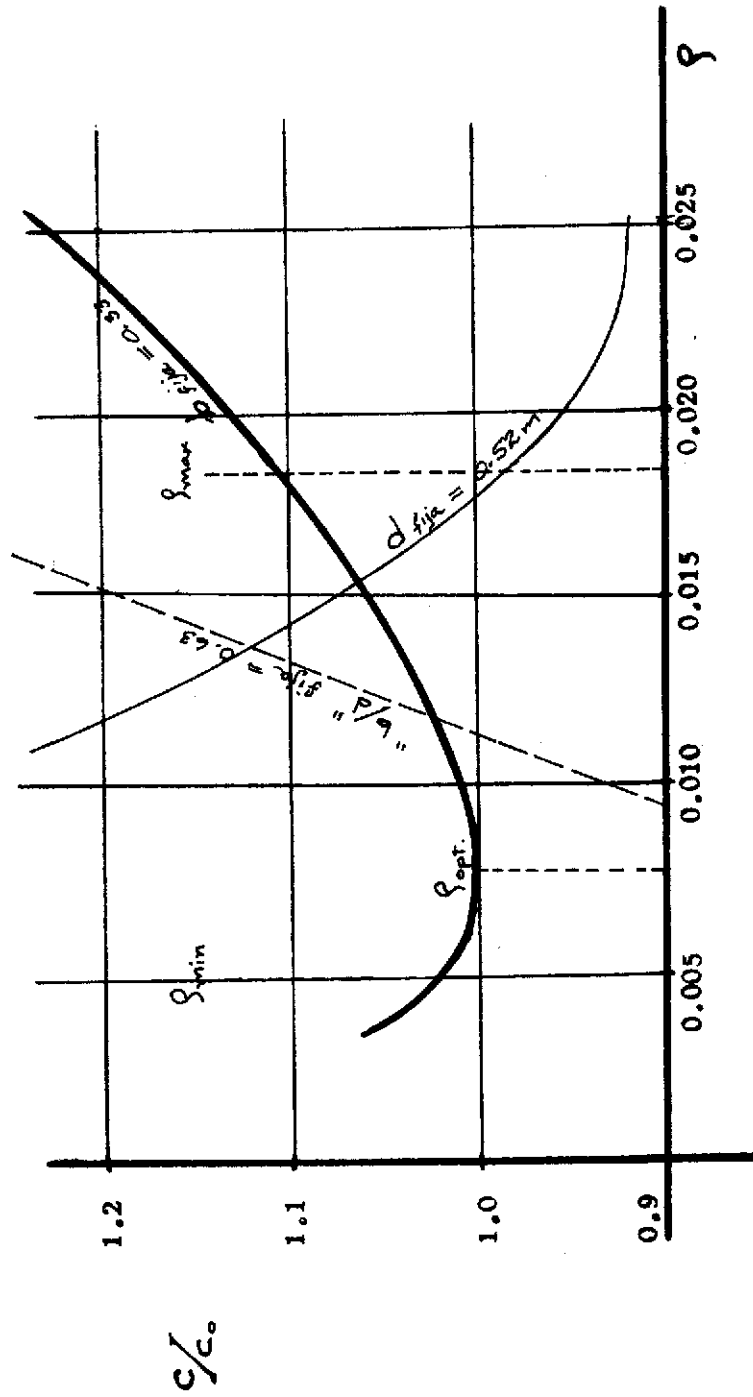


FIG. 6.4 COSTO TOTAL DIVIDIDO ENTRE COSTO OPTIMO EN FUNCION DEL PORCENTAJE

DE ACERO, DESCARTANDO EL COSTO DE ENCOFRADO.

Se ha tomado como base el porcentaje óptimo de acero según Ecuación 6.1: $\rho_o = \left(\frac{2f_y}{L+f_y} + \frac{\omega_b \rho_s}{\rho_c} \right)^{-1}$

Datos utilizados: $f_t = 210 \text{ kg/cm}^2$ $f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$ "b" fija asumida: 0.33 m

7.1 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES SOBRE EL DISEÑO OPTIMO DE SECCIONES DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A FLEXION

- Del diseño:

Acerca del diseño poco o nada puede concluirse pues las técnicas de diseño no constituyen el enfoque central del trabajo. La experiencia y la práctica siguen siendo los factores que determinan la rapidez y efectividad en el diseño.

- Del costo de los materiales:

Examinando la relación entre los tres materiales fundamentales que interesan: concreto - acero y madera, se puede concluir que el determinante en los resultados es el acero. Su costo es significativamente mayor que el del concreto y de allí que el porcentaje de acero óptimo (ρ_o) por lo regular sea bajo. La madera es el menos importante de los tres, pero su inclusión en las fórmulas óptimas "refina" más el valor óptimo obtenido.

- De la optimización:

Como ya se ha mencionado, la optimización es solamente el último de tres pasos necesarios para lograr una decisión racional, siendo los primeros dos: La descripción del sistema y la adopción de una medida de efectividad, prerequisites indispensables para el tercero.

No pueden descartarse los aspectos económicos e ingeni^{er}í

les de un problema de optimización sin correr el riesgo de una conformación incorrecta de las ecuaciones óptimas. En muchos problemas, el trabajo empleado en definir el aspecto de decisión matemáticamente, conseguir datos confiables y acordar los objetivos, excede por mucho al esfuerzo necesario para aplicar la optimización.

Con base en lo anterior, el consenso general de los expertos, es que la teoría de optimización no debe considerarse como una especialidad aislada empleada únicamente por consultores de terminados sino más bien como una valiosa rama más del conocimiento profesional de todo ingeniero. A este propósito puede decirse que una buena manera de incrementar el interés del ingeniero respecto a la base científica de su profesión es enseñándole la teoría de optimización, pues el tener a trabajar sus planes de optimización generalmente lo obligan a examinar más de cerca las hipótesis y teorías que entran en la descripción del sistema.

Particularmente en el caso del presente estudio, referente a problemas de optimización con restricciones igualdad, puede concluirse que aunque se "restringe" el valor del óptimo, se facilita el problema de decisión reduciendo el número de factores a considerar. La dificultad de un problema depende del número de grados de libertad -- diferencia entre el número de variables y el número de ecuaciones restrictoras -- y no en ninguna de estas cantidades por sí sola. En general puede discernirse la complejidad o dimensionalidad real de un problema con restricciones igualdad y resolverse indirectamente haciendo las derivadas de decisión igual a cero.

- De la Aplicación de las Fórmulas Óptimas al Ejemplo específico:

- a) La ecuación (5.10) y la figura 6.1 dan valores para el porcentaje óptimo de acero, pero si el resultado cae fuera del rango de $\rho_{\min.}$ a $\rho_{\max.}$ según el código ACI 318-71, entonces el óptimo obligado es el valor fronterizo más cercano.
- b) El porcentaje óptimo de acero (ρ_o) obtenido es relativo al costo de tal forma que los precios de materiales son los que determinan la sección más económica.

El valor del ρ_o es directamente proporcional al costo de factores no-acero (costo de concreto, formaleteo, excavación, incremento de peralte, etc.) y a la resistencia del concreto.

El valor del ρ_o es inversamente proporcional a la resistencia del acero y al costo del mismo.

- c) Por la gráfica No. 4 (ρ_o vs. ρ_o) puede apreciarse que la región del óptimo es relativamente plana, lo que indica que no es necesario un alto grado de precisión en la selección del término $\frac{b \rho_o}{K_f}$. Como se ha mencionado ya, debiera usarse únicamente como punto de partida en el diseño ya que factores no incluidos en la derivación, como cambios en los precios, redondeos de dimensiones, etc. pueden influir notablemente en el óptimo.
- d) A través del ejemplo puede notarse que algunos factores pueden ser constantes o influir poco en el costo de algunas estructuras. Entre ellos pueden mencionarse el costo de encofrado, costo de aumentar la altura del edificio para colocar una sección con mayor peralte, y el costo del acabado del concreto.

7.2 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE CARACTER GENERAL

El presente estudio pretende ser una base útil para la selección y determinación de dimensiones económicas en miembros estructurales individuales cuando la forma global de la estructura se ha decidido.

Debe tomarse en cuenta que soluciones sencillas tienen la ventaja de ser fáciles de usar pero inadecuadas para algunos problemas. Cantidades que son importantes para un problema pueden descartarse en otro. El ingeniero debe hacer un análisis detallado acerca de donde usar la solución sencilla o interpretar el óptimo obtenido con un juicio sereno.

Frecuentemente un criterio juicioso aunado a la experiencia, puede ser superior a las ecuaciones.

La optimización es aplicable a cualquier problema que pueda expresarse matemáticamente y en este sentido ofrece muchos beneficios a actividades como la Economía, Análisis de Operaciones, Administración de Empresas, Ingeniería y hasta a las Ciencias Políticas. Particularmente en el campo estructural de la Ingeniería Civil, las ventajas que la optimización puede brindar son incontables, descubriendo un campo amplio de trabajo que puede rendir insospechados frutos y quizás abrir paso a una nueva tendencia de diseño para el futuro.

A este respecto el presente estudio considera recomendable elaborar más investigaciones y trabajos sobre el tema, no exclusivamente en el ramo de las estructuras sino en todas las demás áreas, pues cualquiera que sea el campo a que se aplique la optimización, es indudable que a través de ella, se logra un pro-

greso significativo científico y de esta manera se contribuye
a conseguir un mundo mejor.

- 1.- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI STANDARDS)
"Building Code Requirements for Reinforced Concrete
(ACI 318-71)"
4th Printing, March 1973
American Concrete Institute, Detroit, Michigan
(pp 29, 30, 31, 64, 65, 66)
- 2.- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE
"Journal of the American Concrete Institute"
Proceedings V. 71
Nov. 1974 (pp 556-558)
- 3.- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE
"Journal of the American Concrete Institute"
Proceedings V. 72, No. 5, Detroit, Michigan
May 1975 (pp 249-253)
- 4.- BIRKHOFF, G. AND MACLANE, S.
"A. Survey of Modern Algebra"
Edit. Mac Millan, New York, 1941
- 5.- CONTRERAS, GONZALEZ, JOSE LUIS
"Flujos Optimos de Carga en Sistemas de Energía Eléctrica"
Tesis de Graduación
Universidad de San Carlos de Guatemala
Guatemala, 1973 (pp 35-64)
- 6.- DAVIS HARMER F - TROYELL, GEORGE EARL - WISKOCIL, CLEMENT T.
"The Testing and Inspection of Engineering Materials"
3rd Edit. McGraw Hill Book Co. Inc., New York
Koga Kusha Company Inc, Tokyo, Japan - 1964
- 7.- HANCOCK, HARRIS
"Theory of Maxima and Minima"
Dover, New York, 1960
(p. 33)
- 8.- KAPLAN, WILFRED
"Advanced Calculus"
5th Printing, Addison - Wesley Publishing Co. Inc.
Reading, Massachusetts, 1959
(pp 128-129)

- 9.- OLIVARES PITET, CLAUDIO
"Diseño de Secciones Económicas de Concreto Reforzado
para Guatemala"
Universidad de San Carlos de Guatemala, 1957
Tesis de Graduación
- 10.- PALACIOS ESTRADA, MIGUEL EDUARDO
"Manual de Diseño de Losas por el Método de Bandas"
Universidad de San Carlos de Guatemala, 1971
Tesis de Graduación
(pp 36-43)
- 11.- SPIEGEL, MURRAY R.
"Schaum's Outline Series"
"Mathematical Handbook"
McGraw Hill Book Company, New York 1968
(pp 53-54, 110-113)
- 12.- SPUNT, LEONARD
"Optimum Structural Design"
1st Edition, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs,
New Jersey, 1971
(pp 1-31, 143-147)
- 13.- THOMAS Jr. GEORGE B.
"Calculus and Analytic Geometry"
4th Edition, Addison-Wesley Publishing Co. Inc. 1969
Reading, Massachusetts
(pp 526-530)
- 14.- VIDES TOBAR, ARMANDO
"Análisis y Control de Costos de Ingeniería"
2da. Impresión, Editorial Piedra Santa
Guatemala, 1971
(pp 14^a-160)
- 15.- WANG, CHU-KIA - SALMON, CHARLES G.
"Reinforced Concrete Design"
Intext Press, Inc. New York 1973
(pp 1-70)
- 16.- WILDE, DOUGLAS J. - BEIGHTLER, CHARLES S.
"Foundations of Optimization"
4th Printing, Prentice Hall Inc.
Englewood Cliffs, N. J. 1967
(pp 1-41, 464-469)

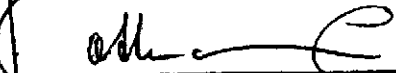

Oscar Relando Barrientos Ortega

Ve. Bo.



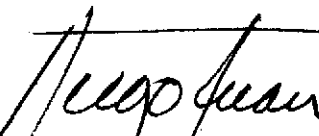
Ing. Héctor Monzón D.
Asesor

Ve. Bo.



Ing. Joaquín Lottman
Jefe del Departamento de
Estructuras

IMPRIMASE:


Ing. Hugo Quao M.
Decano