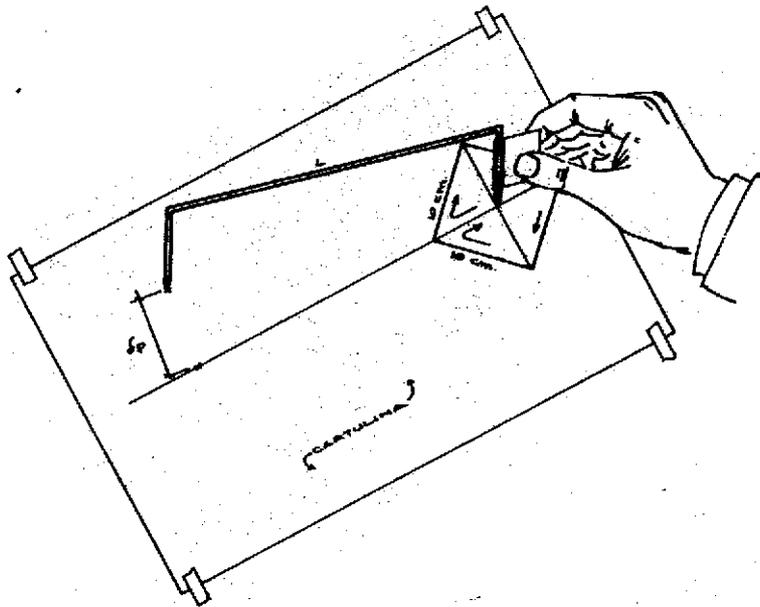


MIGUEL ANGEL SAGASTUME SOLARES

INVESTIGACION Y USO DE UN  
PLANIMETRO HECHIZO DE VARILLA



8  
(202)

GUATEMALA, ENERO DE 1970.

08T(189)c

MFD: 619

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

Guatemala, Centro América

INVESTIGACION Y USO DE UN PLANIMETRO  
HECHIZO DE VARILLA

TESIS

Presentada a la Junta Directiva  
de la  
Facultad de Ingeniería  
de la  
Universidad de San Carlos de Guatemala

por

MIGUEL ANGEL SAGASTUME S.

Al conferírsele el título de

INGENIERO CIVIL

Guatemala, enero de 1970.

JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA DE LA  
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

Decano:	Ing. Amando Vides Tobar
Vocal Primero:	Ing. Marco Antonio Cuevas
Vocal Segundo:	Ing. Francisco Ubieta B.
Vocal Tercero:	Ing. Adolfo Behrens
Vocal Cuarto:	Br. Alfredo Bonatti
Vocal Quinto:	Br. Eliseo Osorio R.
Secretario:	Ing. Héctor Centeno B.

TRIBUNAL QUE PRACTICO EL EXAMEN  
GENERAL PRIVADO

Decano:	Ing. Amando Vides Tobar
Vocal Segundo:	Ing. Francisco Ubieta B.
Examinador:	Ing. Octavio Cordón
Examinador:	Ing. Luis Felipe Mérida
Secretario:	Ing. Héctor Centeno B.

DEDICO ESTE ACTO

A MIS PADRES:

J. Arturo Sagastume D.  
Delia S. de Sagastume

A MI ESPOSA:

Aixa F. de Sagastume

A MIS HIJOS

A MIS HERMANOS

A La Facultad de Ingeniería

Al Departamento de Acueductos y Alcantarillado

A mis compañeros y amigos.

## C O N T E N I D O

### CAPITULO I: INTRODUCCION

### CAPITULO II: RESEÑA HISTORICA

- 2-1. Historia del planímetro
- 2-2. Desarrollo de la fórmula

### CAPITULO III: DESCRIPCION DEL PLANIMETRO

- 3-1. Descripción de un planímetro de Prytz
- 3-2. Descripción de un planímetro Hechizo de Prytz
- 3-3. Calibración
- 3-4. Constantes que intervienen en la de terminación del área

### CAPITULO IV: INVESTIGACION Y ANALISIS DE RESULTADOS

- 4-1. Investigación del No. conveniente de observaciones
- 4-2. Investigación si el promedio de las observaciones recorridas en el sentido de las agujas del reloj, es igual al promedio de las observaciones recorridas en el sentido contrario
- 4-3. Investigación si es indiferente partir de un polo cualquiera

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GOATEMAK  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE TESIS-REFERENCIA

- 4-4. Investigación del error de conformación
- 4-5. Investigación de la precisión del planímetro usado
- 4-6. Investigación de la ley de los errores de un planímetro
- 4-7. Investigación de la forma de medir áreas con perímetro irregular

#### CAPITULO V: CALCULO DE ERRORES Y DETERMINACION DE CONSTANTES

- 5-1. Consideraciones generales
- 5-2. Estudio de errores accidentales
- 5-3. Cálculo de la precisión
- 5-4. Cálculo de constantes
- 5-5. Cálculo del error de superficie debido a escala usada

#### CAPITULO VI: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA EL USO

- 6-1. Forma de medición de figuras de perímetro irregular

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

Es realmente el planímetro, uno de los más útiles y bellos instrumentos de la mecánica aplicada y el auxiliar máspreciado del ingeniero.

Es por esto, que el presente trabajo trata de dar a conocer al ingeniero una guía para la construcción y uso de un planímetro Hechizo de Varilla de fácil confección y manejo, al mismo tiempo que económico; con el cual se pueden medir áreas con bastante grado de aproximación y en una forma muy práctica.

La idea de esta investigación nació por una inquietud y deseo manifiesto del ingeniero Francisco Billeb Vela, asesor de esta tesis, el cual me fuera encomendado de sarrollar.

PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
Biblioteca Central

## SIGNIFICADO DE LETRAS USADAS EN TESIS

$\int P$	constante del planímetro
S	superficie planimetrada
L	longitud del planímetro
KE	constante de escala
E	escala usada en el dibujo
FD	factor de dilatación del papel
L <sub>m</sub>	longitud medida en la observación
L <sub>a</sub>	longitud acotada
A y B	con estas letras se designan los polos
$\bar{X}$	promedio aritmético de observaciones
$\bar{\bar{X}}$	promedio de promedios aritméticos de observaciones
v	error de observación individual
V	observación individual
E <sub>n</sub>	error normal
E <sub>p</sub>	error probable
E <sub>t</sub>	error temible
n	número de observaciones
Q	constante del error probable para número de observaciones
K <sub>t</sub>	constante teórica
E <sub>m</sub>	error de medición teórica
E <sub>r</sub>	error de medición real
S <sub>r</sub>	superficie real
K <sub>p</sub>	constante práctica
$\int F$	desplazamiento promedio de punta medidora en fig. irregular

## CAPITULO II

### RESEÑA HISTORICA DEL PLANIMETRO

#### 2-1. Historia del planímetro:

La idea de un planímetro para medir superficies recorriendo su perímetro, parece deberse al matemático J. M. Hermann, de Baviera, que la concibió en 1814. No se conoce publicación alguna de Hermann sobre la materia, pero en la memoria de Bauernfeind sobre "Historia del planímetro" en el año 1855, se encuentra la siguiente nota de Hermann.

"Las áreas de dos triángulos o de dos paralelogramos que tengan la misma base están entre sí en la misma relación que sus respectivas alturas. Supongamos ahora que se tiene un círculo cuya circunferencia sea igual a una de dichas bases comunes, y que esté unido de cierta manera a otro, de tal modo que cuando este último girando recorra toda la base, el primero dé una vuelta completa alrededor de su eje, siendo la altura de la figura de que se trate igual a la unidad. Supongamos luego que la altura de la figura sea igual a 2 y que el círculo primero dé, en este caso, dos vueltas alrededor de su eje mientras el segundo recorre la base; y por último, supongamos que el número de vueltas del círculo aumente proporcionalmente a la altura; en estas condiciones, pudiendo conocer el número de vueltas que da el círculo, se tiene un dispositivo que de modo mecánico determina el área de una figura. Es decir, que para obtener el área de las figuras regulares con una máquina, bastaría hallar el modo de que las revolu

ciones del círculo cumplieran con las condiciones de los supuestos anteriores."

Según Bauernfeind, construyó Hermann, en el año 1827, un planímetro fundado en esta idea, pero no dice cómo se resolvió el problema anterior. Es de suponer que el invento fue conocido por muy poca gente, y con el tiempo cayó en el olvido más completo.

El primer planímetro realmente práctico fue el inventado en 1827 por el ingeniero suizo Oppikofer. En este instrumento se encuentra, por primera vez, la ruedecilla contadora. Unos cuantos años más tarde fue construido el planímetro de Oppikofer, con algunos perfeccionamientos insignificantes, por el mecánico Ernst, de París. El planímetro de Oppikofer no se extendió mucho debido según parece a su escasa precisión.

En el año 1849 se dió a conocer el planímetro de Wetli, por su inventor, el ingeniero Wetli, de Zurich; este planímetro, fundado también en la teoría de Hermann. En este instrumento, hay también un carrillo que corre sobre dos guías, pero el cono está sustituido por un disco y otras diferencias menores. Este instrumento fue perfeccionado más tarde por el astrónomo Hansen, pero sin introducir en el mismo novedad alguna fundamental.

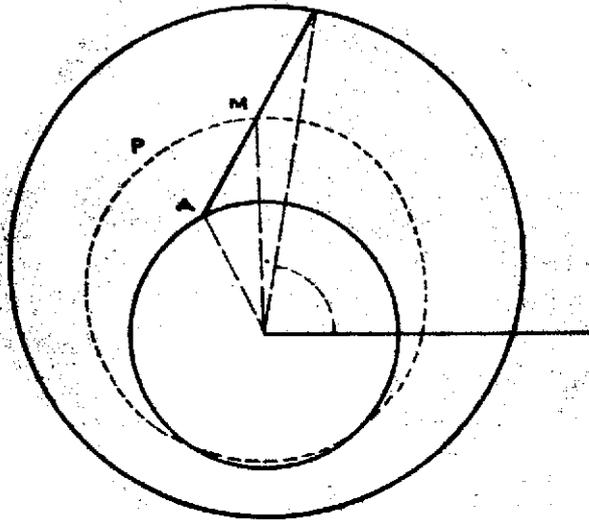
Los dos planímetros anteriores, el de Oppikofer y el de Wetli, estaban fundados en las propiedades de las coordenadas rectangulares.

En el año 1854, Amsler inventó un planímetro fundado en las propiedades de las coordenadas polares, y le denominó "planímetro polar", este instrumento es el más sencillo de los planímetros de recorrido y fue descrito dos años más tarde de su invención, en el libro titulado "So-

bre la determinación mecánica del área, del momento estático y del momento de inercia de las figuras planas."

Casi al mismo tiempo, en el año 1855, el profesor Miller, de la escuela de Minas de Leoben, expuso el mismo principio del planímetro polar, que fue construido por el mecánico Starke, de Viena.

En el año 1886, el capitán Dinamarqués Prytz, inventó un planímetro de construcción extraordinariamente sencillo y le denominó planímetro de varilla; este planímetro muy diferente a los anteriores, relaciona desplazamientos con las áreas propuestas basándose en el teorema siguiente: Cuando una recta AB de longitud constantes se mueve de manera que sus extremos describen dos curvas cerradas A y B, un punto cualquiera M de dicha recta, engendra otra curva P, cuya área guarda una relación también constante con las dos dadas.



**FIG. 2.1**

## 2-2. Desarrollo de la fórmula:

Si se tiene una recta de longitud  $L$ , que al desplazarse recorra una superficie en forma de cono truncado, por lo que los extremos de la recta estarán recorriendo dos curvas cerradas  $S$  y  $H$ , se puede demostrar que:

$$\underline{S = G + H}$$

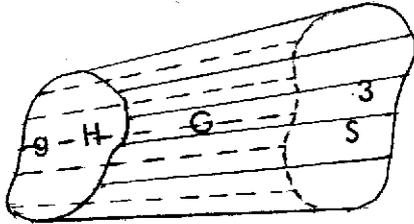


Figura 2.2

Con las letras  $S$  y  $H$  no designamos solamente las curvas recorridas, sino también las áreas limitadas por las mismas; para demostrar la anterior igualdad, se le debe dar signo al movimiento de la recta sobre la superficie barrida  $G$ , y consideremos como positiva  $G'$ , la parte de superficie recorrida de 1 a 3, etc., hasta 6, que corresponde a la parte en que la recta  $L$  está representada de trazo lleno en figura 2.2 y  $G''$  como negativa a la parte en que  $L$  está de trazo cortado; tomando valores absolutos es evidente que,  $S + G'' = G' + H$ , pero como  $G' - G'' = G$ , resulta que

$$\underline{S = G + H}$$

La recta al desplazarse lo puede hacer en 3 formas

diferentes.

2-2-1. Que la recta gire alrededor de su extremo izquierdo.

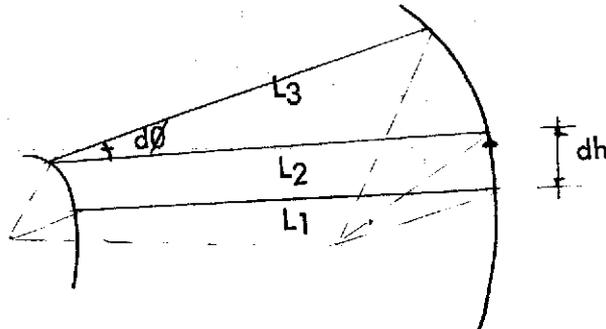


Figura 2.3

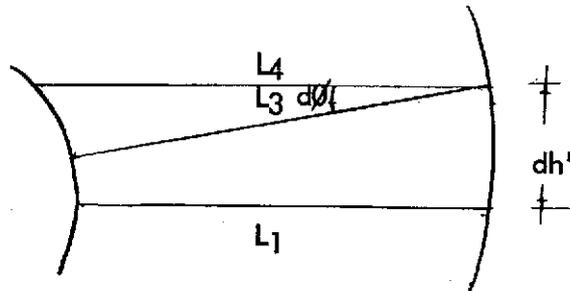
Este movimiento se puede dividir en 2 partes, la primera de  $L_1$  a  $L_2$  en la cual se mantiene la recta paralela a sí misma, siendo  $dh$  la distancia entre ambas posiciones y la segunda parte ó fase del movimiento, de  $L_2$  a  $L_3$ , en la cual la recta gira en ángulo  $d\theta$  alrededor de su extremo de la izquierda, en sentido normal ó positivo. Es decir, que la superficie barrida por la recta es la suma de un paralelogramo con un sector circular, por lo cual se tendrá:

$$dG = L dh + \frac{L^2}{2} d\theta$$

Integrando la ecuación anterior queda:

$$G = L \int dh + \frac{L^2}{2} \int d\theta$$

2-2-2. Desplazamiento paralelo y girar alrededor de su extremo de la derecha.



Para este caso, la recta se desplazará de  $L_1$  a  $L_4$  paralelamente a sí misma, siendo  $dh'$  la distancia entre ambas posiciones y que después gire un ángulo  $d\theta$  en sentido positivo alrededor de su extremo de la derecha, para colocarse en la posición  $L_3$ . En este caso la superficie comprendida entre  $L_1$  y  $L_3$  es igual a la diferencia entre un paralelogramo y un sector circular, teniéndose por consiguiente:

$$dG = L dh' - \frac{L^2}{2} d\theta$$

Pero como  $dh' = dh + Ld\theta$ , de donde se ve que esta ecuación es igual a la anterior. Integrándola resulta:

$$G = L \int dh' - \frac{L^2}{2} \int d\theta$$

2-2-3. Traslación paralela y girar alrededor de su punto medio.

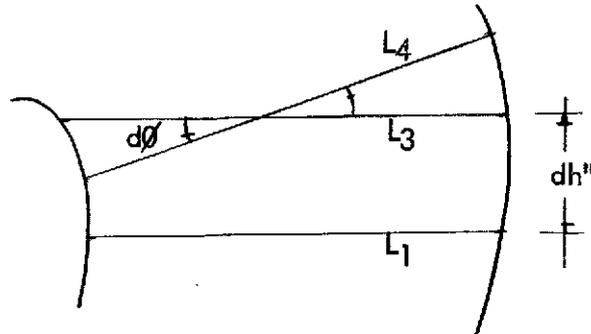


Figura 2.5

Se efectúan los dos movimientos: traslación paralela de  $L_1$  a  $L_3$ , en una distancia  $dh''$  y después girando la recta  $L$  un ángulo  $d\theta$  alrededor de su punto medio, de modo que la ecuación correspondiente queda

$$G = L \int dh''$$

En los casos anteriores puede observarse que las superficies  $S$  y  $H$  pueden quedar sin lazos ni recodos, de modo que las distintas posiciones de la recta  $L$  dividen la superficie  $G$  en fajas perfectamente definidas. Pero también en los casos más complicados, es decir, cuando las curvas  $S$  y  $H$  presentan lazos, o se cortan en  $\infty$ , etc., se obtiene la misma igualdad, si se toman del mismo modo los signos de cada parte, como sucede para todas las integraciones de superficies.

Si integramos las igualdades presentadas resulta:

$$S = G + H$$

siendo  $G = L^2\phi = CL$

El valor de  $L^2\phi$  o su igual  $CL$  para valores pequeños de  $\phi$ , se determina con toda facilidad, pero no sucede lo mismo con el de la superficie  $H$ , y queda aun por conocer el valor del área  $S$ , que se compone de un rectángulo  $CL$  y de otra superficie de contorno curvilíneo irregular  $H$ . Pero en condiciones normales, se tiene la ventaja de que la superficie  $H$  es mucho más pequeña que la  $S$  y tanto más pequeña cuanto menores son las dimensiones de  $S$  respecto a la longitud  $L$  de la varilla. Es decir, que cuando  $S$  es muy pequeña se puede despreciar el valor de  $H$ . Para seguir un método más exacto y preciso, hay que tener en cuenta el signo de la superficie  $H$  y volviendo a la fórmula fundamental  $S = G + H$ , deducida de la generación de superficie figura 2.2, tenemos que  $H$  es positiva cuando es recorrido en el mismo sentido que  $S$  y negativa cuando se recorre en sentido contrario.

De aquí se deduce un procedimiento mejor para determinar la superficie  $S$ , que consiste en recorrer su contorno dos veces con el planímetro colocado en dos posiciones simétricas respecto al punto de partida; es decir, formando entre sí las dos posiciones de la varilla un ángulo de  $180^\circ$ , con el vertice en el punto de arranque del punzón y recorriendo la superficie planimetrada en el mismo sentido para las dos posiciones; o bien colocando la varilla en una sola posición y recorriendo el contorno de la superficie 2 veces; una en el sentido de las agujas del reloj y otra, en el sentido contrario.

Se halla la media aritmética  $C = \frac{C' + C''}{2}$  de las longitudes  $C'$  y  $C''$  obtenidas y se multiplica esta media por  $L$ , resultando así, un valor para  $S$  mucho más exacto que

si sólo se operara con uno de los valores  $C'$  ó  $C''$ , partiendo del supuesto que las superficies  $H$ , sean iguales prescindiendo de sus signos respectivos.

Es decir, que tomaremos como fórmula para determinar el área de  $S$  la siguiente:

$$S = \frac{C' + C''}{2} L = CL$$

## CAPITULO III

## DESCRIPCION DEL PLANIMETRO DE VARILLA

## 3-1. Descripción de un planímetro Prytz:

En la figura 3.1 se muestra un planímetro de Prytz que consiste en una varilla de longitud  $L$ , que tiene en el extremo izquierdo  $L$  en forma de cuchillo, y el de la derecha  $3$ , es un punzón; en él tiene una aleta del cual se sostiene para su operación.

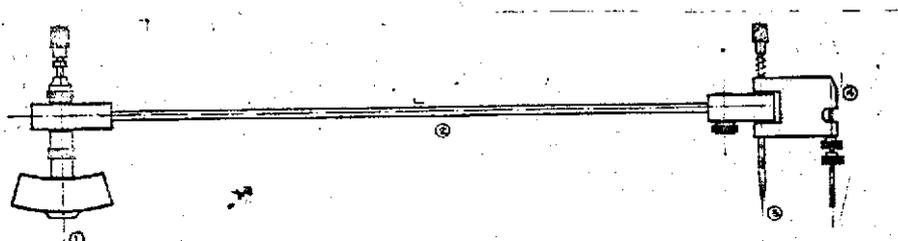


FIG. 3.1

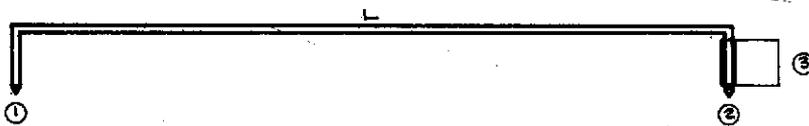
- ① CUCHILLO
- ② VARILLA
- ③ PUNZÓN
- ④ ALETA

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
BIBLIOTECA  
DEPARTAMENTO DE TESIS-REFERENCIA

El manejo y funcionamiento de este planímetro, consiste simplemente en recorrer con el punzón el contorno de la superficie cuya área se quiere determinar.

### 3-2. Descripción de un planímetro hechizo de varilla:

Es un pequeño instrumento que se puede fabricar fácilmente con un alambre en la forma indicada en la figura 3.2



**FIG. 3.2**

- ① PUNTA MEDIDORA
- ② PUNTA TRAZADORA
- ③ ALETA

La varilla puede ser de aproximadamente 29 cm. en longitud, la cual se le deja 25 cm. en su parte horizontal y dobleces de 2 cm. En los extremos de estos dobleces deben terminar en punta roma, tal que no se rasgue ni se trabe en el papel; en la parte derecha lleva una aleta que es de donde se sostiene con la mano para operar el instrumento. La longitud del planímetro afecta en la determinación del área deseada, pero posteriormente a su fabricación, se deberá calibrar.

### 3-3. Calibración:

Se traza sobre una cartulina u otro papel, un cuadrado con lados de 10 cm. (área de 100 cm<sup>2</sup>) y se dibuja la diagonal alargándola lo suficiente para que el planímetro quede sobre la prolongación. Se marca el centro del cuadrado y se coloca la punta trazadora en él y la medidora sobre la diagonal prolongada; marcando este punto.

Se recorre todo el perímetro del cuadrado saliendo por la diagonal y volviendo al centro después del recorrido por el mismo lugar, anotando la desviación del extremo medidor, en milímetros.

Se calcula la constante del planímetro, dividiendo el área circunvalada entre el espacio recorrido, por el extremo medidor del instrumento.

$$\delta P = \frac{S}{L}$$

Fórmula 3.1

- $\delta P$  = constante propia del planímetro
- S = superficie planimetrada
- L = longitud del planímetro

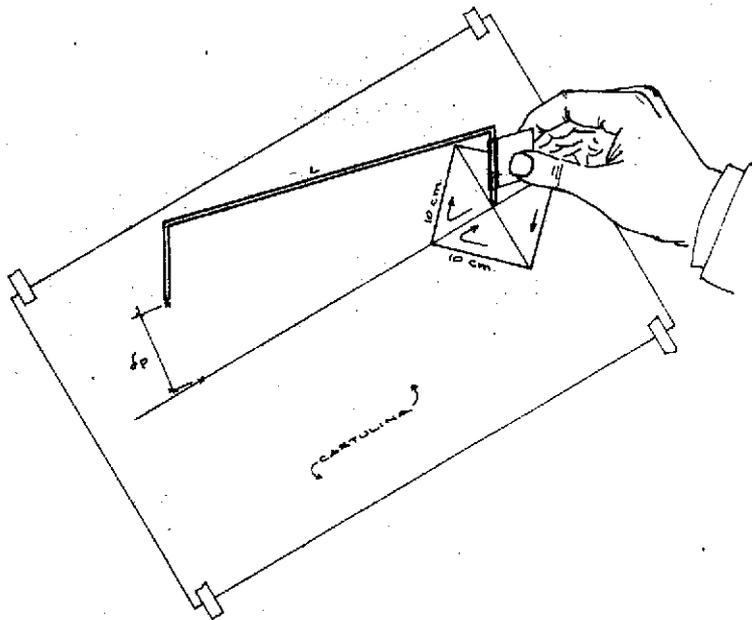


FIG. 3.3

### 3-4. Constantes que intervienen en la determinación del área:

Para determinar un área, previamente se deberán determinar las constantes siguientes:

#### 3-4-1. Constante del planímetro:

$$\int p = \frac{S}{L}$$

Es la relación que existe entre el área 100 cms<sup>2</sup> y la longitud L del planímetro, como se explicó anteriormente

#### 3-4-2. Factor de escala:

$$KE = \left(\frac{E}{100}\right)^2 \quad \text{Fórmula 3.2}$$

KE = constante de escala

E = escala usada en el dibujo

Si el plano tiene doble escala:

$$KE = \frac{EH \times Ev}{10,000}$$

EH = escala horizontal

Ev = escala vertical

El área requerida será:

$$S = (\int p \times KE \times L) \quad \text{Fórmula 3.3}$$

#### 3-4-3. Factor de dilatación del papel:

En los casos en donde se requiera mayor exactitud, debe tomarse en cuenta la dilatación del papel, ya que e

papel de dibujo experimenta alteraciones o cambia de tamaño a causa de la humedad y las variaciones en distintas direcciones no son siempre iguales. Esto puede hacerse calibrando el planímetro, sobre un cuadrado de área conocida del mismo plano y usando el factor calculado.

Analíticamente se puede también calcular un factor adicional, si se mide una longitud acotada, la que en ese momento será una longitud  $L_m$ . El factor será:

$$FD = \left( \frac{L_m}{L_a} \right)^2 \quad \text{Fórmula 3.4}$$

FD = factor de dilatación

$L_m$  = longitud medida

$L_a$  = longitud acotada

Tomando en cuenta este factor, el área requerida será:

$$S = \int p \times KE \times L \times FD \quad \text{Fórmula 3.5}$$

## CAPITULO IV

### INVESTIGACION Y ANALISIS DE RESULTADOS

#### 4-1. Investigación del número conveniente de observaciones en una medición:

Como primera etapa en la investigación, se hicieron varios ensayos sobre un cuadrado (fig. 4.1), para determinar número conveniente de observaciones para obtener mayor exactitud en una medición y como resultado de este análisis, se determinó que se debe hacer un promedio de 8 observaciones; 4 en el sentido de las agujas del reloj, y 4, en el sentido contrario para lograr resultados más exactos. Es por esto, que en los casos investigados a continuación, se usará siempre este número de observaciones para cada medición.

#### 4-2. Investigación si el promedio de las observaciones recorridas en el sentido de las agujas del reloj, es igual al promedio de las observaciones recorridas en el sentido contrario:

Para este caso se hicieron las observaciones con el procedimiento que se explica al inicio de este capítulo, para lo cual, se investigaron los polos "A" y "B", obteniéndose los valores dados en tabla 4.1 que corresponden a fig. 4.1. Y con estos datos, se calcular promedios para analizar los casos siguientes:

$$\underline{X_{\text{A}} = X_{\text{B}} ?}$$

4-2-1. Polo A?

$$\bar{X}_{\curvearrowright} = 3.95 \text{ cm.}$$

$$\bar{X}_{\curvearrowleft} = 4.47 \text{ cm.}$$

$$\underline{\bar{X}_{\curvearrowright} \neq \bar{X}_{\curvearrowleft}}$$

4-2-2. Polo B?

$$\bar{X}_{\curvearrowright} = 2.60 \text{ cm}$$

$$\bar{X}_{\curvearrowleft} = 3.02 \text{ cm.}$$

$$\underline{\bar{X}_{\curvearrowright} \neq \bar{X}_{\curvearrowleft}}$$

4-2-3. Polo A + B ?

2

$$\bar{X} \left( \frac{A+B}{2} \right) = 3.27 \text{ cm.}$$

$$\bar{X} \left( \frac{A+B}{2} \right) = 3.74 \text{ cm.}$$

$$\underline{\bar{X} \left( \frac{A+B}{2} \right)_{\curvearrowright} \neq \bar{X} \left( \frac{A+B}{2} \right)_{\curvearrowleft}}$$

Como queda demostrado, no se obtienen promedios semejantes al recorrer el perímetro del área medida en el sentido de las agujas del reloj, que en el sentido contrario.

4-3. **Investigación si es indiferente partir de un polo cualquiera**

$$\underline{\text{polo A} = \text{polo B ?}}$$

Polo A = 4.21 cm.

Polo B = 2.81 cm.

Polo "A" ≠ Polo B

Como queda demostrado no se debe partir de cualquier polo ni tampoco estos últimos resultados que representan el desplazamiento promedio de polo A ó de polo B, multiplicado por la longitud del planímetro, que es la fórmula del área demostrada en pag. 9, nos determinan el área propuesta. En cambio, si analizamos el promedio de los desplazamientos promedios de polo "A" y "B", podemos notar que este resultado multiplicado por la longitud del planímetro, se acerca bastante al área requerida, como a continuación se demuestra.

$$\frac{X_A + X_B}{2} = ?$$

$$\frac{4.21 + 2.81}{2} = 3.51 \text{ cm} = \int_p$$

El área propuesta, será este resultado multiplicado por la longitud del planímetro.

$$\begin{aligned} A &= L \times \int_p \\ A &= 30 \times 3.51 \\ A &= \underline{105.30 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Error 5%

De este resultado se puede deducir que se debe partir de un punto medio, encontrándose en la investigación, que se logra mayor exactitud, si el punto medio es el centro de la diagonal.

De las anteriores investigaciones podemos concluir.

a) Que con un planímetro de varilla, no se debe recorrer el perímetro del área propuesta partiendo de cualquier polo.

b) Que no se debe hacer el recorrido del perímetro en un solo sentido.

c) Que se debe partir siempre del centro de la diagonal.

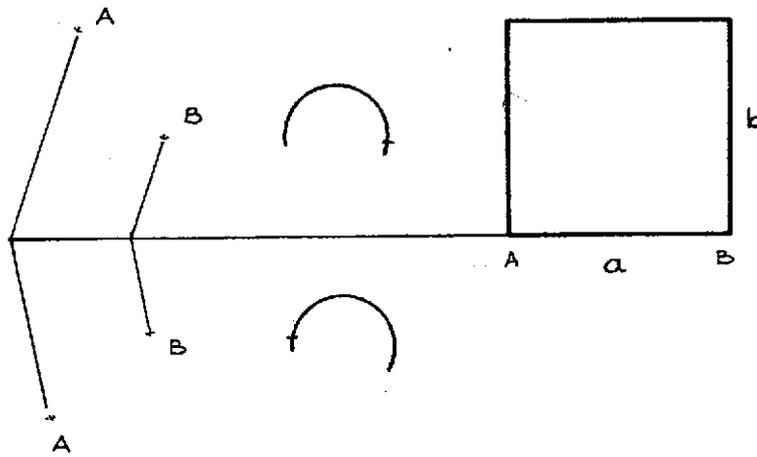


Figura 4.1

SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS.	POLO A	POLO B
	1	39.5 m.m.	25.9 m.m.
	2	39.0 "	26.1
	3	40.0 "	26.1
	4	40.0 "	25.9
	$\bar{X}$	39.50 m.m.	26.0 m.m.
	1	45.2	31.0
	2	45.2	31.0
	3	44.5	29.8
	4	44.1	29.9
	$\bar{X}$	44.75 m.m.	30.23 m.m.
	$\bar{\bar{X}}$	42.12 m.m.	28.11 m.m.

Cuadro 4.1

#### 4-4. Error de conformación:

Partiendo del polo "C", punto medio de la diagonal de un rectángulo, determinar hasta qué relación de largo a ancho se cumple la fórmula y comparar este resultado con el desplazamiento promedio al partir de polo A y polo B.

En los resultados correspondientes a este caso, el error de superficie que se comete en la medición, aproximadamente permaneció constante cuando  $a \approx 3b$  y en el capítulo V, pag. 57, se demuestra que la fórmula no se cumple cuando  $a \approx 3b$ ; por lo consiguiente, cuando las áreas medidas no llenen esta condición, se deberá fraccionar hasta que se cumpla dicha condición y emplear para cada área parcial el procedimiento descrito en pag. 62.

A continuación, se analizan los resultados obtenidos en pag. 41 para determinar el error de conformación.

Determinar si partiendo de polo "C" se obtiene el promedio de polo "A" y polo "B".

$$C = \frac{A + B}{2} ?$$

##### 4-4-1. Cuando $a = b$

##### Figura 4.2

$$\text{polo "C"} \quad \bar{X} = 3.47$$

$$\text{polos } \frac{A + B}{2} \quad \bar{X} = 3.53$$

$$3.47 \approx 3.53$$

$$\underline{C = \frac{A + B}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int p \times L \\ \text{Area} &= 3.47 \times 30 \\ \text{Area} &= \underline{103.1 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Error 3.1%

4-4-2. Cuando  $b = 2a$

Figura 4.3

$$\text{polo "C"} \quad \bar{X} = 69.00$$

$$\text{polos } \frac{A+B}{2} \quad \bar{X} = 73.78$$

$$69.00 \neq 73.78$$

$$\underline{C \neq \frac{A+B}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int p \times L \\ \text{Area} &= 6.9 \times 30 \\ \text{Area} &= \underline{207.00 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Error 3.5%

4-4-3. Cuando  $b = 3a$

Figura 4.4

$$\text{polo "C"} \quad \bar{X} = 103.75$$

$$\text{polos } \frac{A+B}{2} \quad \bar{X} = 116.45$$

$$\underline{103.75 \neq 116.45}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int p \times L \\ \text{Area} &= 10.37 \times 30 \\ \text{Area} &= \underline{311.25 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Error 3.75%

4-4-4. Cuando  $b = 4a$

Figura 4.5

polo "C"  $\bar{X} = 144.62$

polos  $\frac{A+B}{2}$   $\bar{X} = 170.16$

$$\underline{144.62 \neq 170.16}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 14.46 \times 30 \\ \text{Area} &= \underline{433.80 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

Error 8.45%

De los resultados anteriores podemos deducir lo siguiente:

a) Que cuando  $a = b$ , se obtiene el promedio de polo "A" y polo "B", para los otros casos presentados no se cumple esta condición.

b) Que partiendo del polo "C", el producto del desplazamiento encontrado por la longitud del planímetro nos da resultados más exactos.

c) Que partiendo del polo "C", se ahorran las observaciones de un polo.

d) Que el error de superficie que se comete, aproximadamente permanece constante cuando  $a \approx 3b$

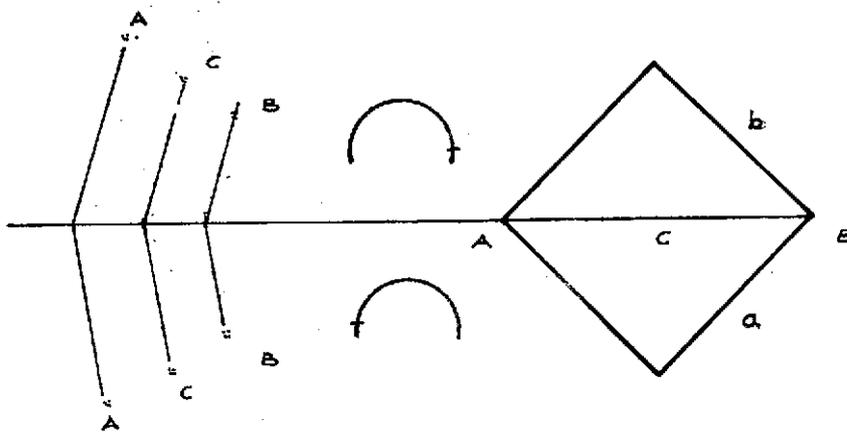


Figura 4.2

SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS.	POLO "A"	POLO "C"	POLO "B"
	1	45.5 m.m.	36.0 m.m.	26.9 m.m.
	2	43.0 "	35.9 "	26.9 "
	3	45.1 "	35.9 "	27.0 "
	4	43.1 "	35.9 "	26.8 "
	$\bar{x}$		45.17 m.m.	35.92 m.m.
	1	44.0 "	34.0	26.0
	2	42.3 "	33.2	26.1
	3	44.0 "	33.2	26.1
	4	42.3 "	33.2	26.0
	$\bar{x}$		43.15 m.m.	33.40 m.m.
	$\bar{x}$	44.16 m.m.	34.66 m.m.	26.47 m.m.

Cuadro 4.2

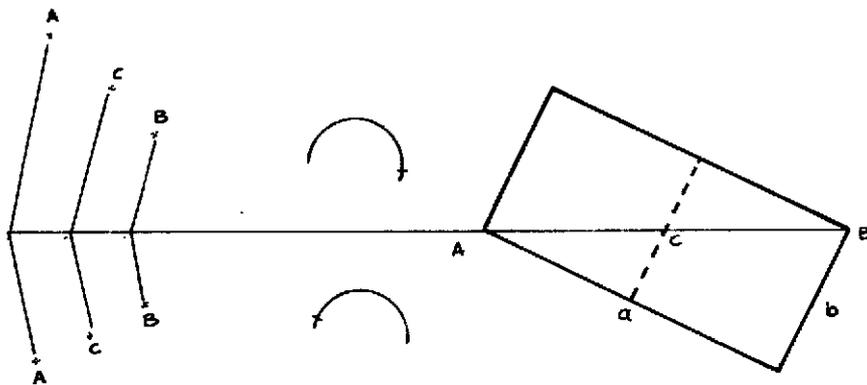


Figura 4.3

SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS	POLO "A"	POLO "C"	POLO "B"	
	1	101.2 m.m.	69.1 m.m.	47.0 m.m.	
	2	100.6 "	69.0 "	47.0 "	
	3	101.2 "	69.0 "	46.5 "	
	4	101.2 "	69.0 "	47.0 "	
	$\bar{X}$		100.90 m.m.	69.00 m.m.	46.90 m.m.
	1	96.2	69.00 "	46.9	
	2	96.6	69.50 "	46.9	
	3	96.8	69.0 "	46.9	
	4	97.0	69.0 "	46.90 m.m.	
	$\bar{X}$		96.62 m.m.	69.20 m.m.	46.90 m.m.
	$\bar{X}$		98.76 m.m.	69.00 m.m.	46.80 m.m.

Cuadro 4.3

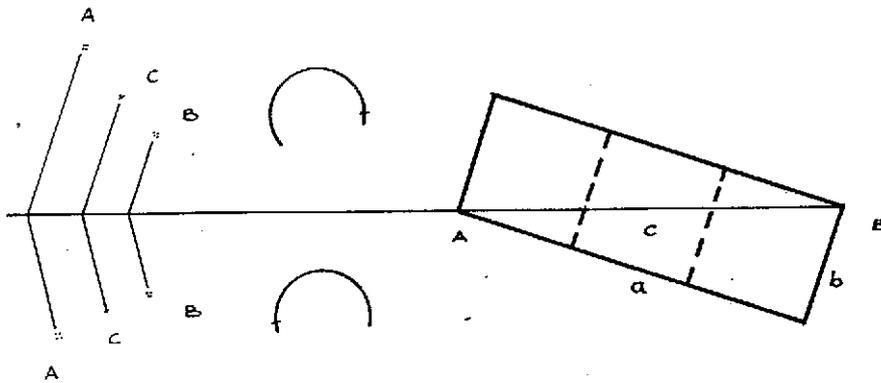


Figura 4.4

SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS.	POLO "A"	POLO "C"	POLO "B"
	1	175.0 m.m.	107.2 m.m.	62.0 m.m.
	2	175.0 "	107.0 "	62.0
	3	175.0 "	107.2 "	62.0
	4	175.0 "	108.0 "	62.0
	$\bar{X}$		175.0 m.m.	107.50 m.m.
	1	168.7	100.05 m.m.	60.3
	2	168.5	100.0	60.3
	3	168.3	100.0	60.3
	4	168.5	100.0	60.3
	$\bar{X}$		168.5 m.m.	100.00 m.m.
	$\bar{X}$	171.75 m.m.	108.75 m.m.	61.15 m.m.

Cuadro 4.4

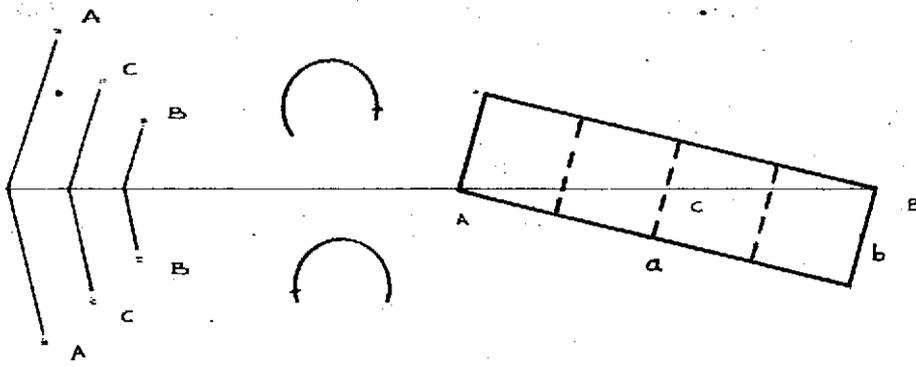


Figura 4.5

SENTIDO DE RECORRIDO	N° obs.	POLO "A"	POLO "C"	POLO "B"
↻	1	269.0 m.m.	149.0 m.m.	78.5 m.m.
	2	269.0	149.0 "	78.5 "
	3	269.5	149.0	78.5 "
	4	268.0	148.0	78.5 "
	$\bar{X}$		268.80 m.m.	148.5 m.m.
↻	1	257.0	140.5	76.5 "
	2	257.5	141.0	76.5 "
	3	258.0	141.0	77.0 "
	4	258.0	140.5	77.0 "
	$\bar{X}$		257.62 m.m.	140.75 m.m.
	$\bar{X}$	263.21 m.m.	144.62 m.m.	77.12 m.m.

#### 4-5. Investigación de la precisión del planímetro usado:

En esta tesis con el fin de determinar la precisión de un planímetro de varilla, se hicieron 208 observaciones — que corresponden a 26 mediciones de 8 observaciones cada medición, las cuales están separadas por una línea más fuerte en la tabulación presentada en páginas siguientes, que corresponden a fig. 4.2.

Los resultados obtenidos para este caso investigado, se analizan en el capítulo V que corresponde al cálculo de los errores.

Nº	OBSERVACIONES	$v = \bar{X} - V$	v.v.
1	35.00 mm	- 1.52	2.3104
2	34.30	- 0.82	0.6724
3	35.00	- 1.52	2.3104
4	34.30	- 0.82	0.6724
5	31.50	+ 1.98	3.9204
6	31.70	+ 1.78	3.1684
7	33.50	- 0.02	0.0004
8	31.70	+ 1.78	3.1684
9	34.40	- 0.92	0.8464
10	35.00	- 1.52	2.3104
11	35.10	- 1.62	2.6244
12	35.10	- 1.62	2.6244
13	33.50	- 0.02	0.0004
14	33.50	- 0.02	0.0004
15	31.50	+ 1.98	3.9204
16	33.50	- 0.02	0.0004
17	34.10	- 0.62	0.3844
18	34.10	- 0.62	0.3844
19	34.10	- 0.62	0.3844
20	34.90	- 1.42	2.0164
21	32.30	+ 1.18	1.3924
22	33.50	- 0.02	0.0004
23	32.30	+ 1.18	1.3924
24	32.50	+ 0.98	0.9604
25	35.00	- 1.52	2.3104
26	35.00	- 1.52	2.3104
27	35.00	- 1.52	2.3104
28	34.80	- 1.32	1.7424
29	32.50	+ 0.98	0.9604
30	32.30	+ 1.18	1.3924
31	32.50	+ 0.98	0.9604
32	33.10	+ 0.38	0.1444

33	34.50	- 1.02	1.0404
34	34.30	- 0.82	0.6724
35	34.30	- 0.82	0.6724
36	34.30	- 0.82	0.6724
37	31.90	+ 1.58	2.4964
38	31.90	+ 1.58	2.4964
39	31.90	+ 1.58	2.4964
40	31.90	+ 1.58	2.4964
41	34.30	- 0.82	0.6724
42	34.30	- 0.82	0.6724
43	34.30	- 0.82	0.6724
44	35.60	- 1.62	2.6244
45	32.00	+ 1.48	2.1904
46	31.90	+ 1.58	2.4964
47	32.00	+ 1.48	2.1904
48	31.90	+ 1.58	2.4964
49	34.30	- 0.82	0.6724
50	34.30	- 0.82	0.6724
51	34.30	- 0.82	0.6724
52	34.30	- 0.82	0.6724
53	32.60	+ 0.88	0.7744
54	33.10	+ 0.38	0.1444
55	33.20	+ 0.28	0.0784
56	33.20	+ 0.28	0.0784
57	34.80	- 1.32	1.7424
58	34.80	- 1.32	1.7424
59	34.20	- 0.72	0.5184
60	34.20	- 0.72	0.5184
61	32.90	+ 0.58	0.3364
62	33.50	- 0.02	0.0004
63	33.50	- 0.02	0.0004
64	34.00	- 0.52	0.2704
65	34.20	- 0.72	0.5184
66	34.20	- 0.72	0.5184
67	33.50	- 0.02	0.0004
68	34.20	- 0.72	0.5184

69	33.50	- 0.02	0.0004
70	33.50	- 0.02	0.0004
71	33.50	- 0.02	0.0004
72	33.50	- 0.02	0.0004
73	34.50	- 1.02	1.0404
74	34.50	- 1.02	1.0404
75	34.50	- 1.02	1.0404
76	34.50	- 1.02	1.0404
77	32.30	+ 1.18	1.3924
78	32.30	+ 1.18	1.3924
79	32.30	+ 1.18	1.3924
80	32.30	+ 1.18	1.3924
81	34.50	- 1.02	1.0404
82	34.50	- 1.02	1.0404
83	34.50	- 1.02	1.0404
84	34.50	- 1.02	1.0404
85	32.30	+ 1.18	1.3924
86	32.30	+ 1.18	1.3924
87	32.30	+ 1.18	1.3924
88	32.30	+ 1.18	1.3924
89	35.00	- 1.52	2.3104
90	35.00	- 1.52	2.3104
91	35.00	- 1.52	2.3104
92	35.00	- 1.52	2.3104
93	32.00	+ 1.48	2.1904
94	32.00	+ 1.48	2.1904
95	32.70	+ 0.78	0.6084
96	32.70	+ 0.78	0.6084
97	34.90	- 1.42	2.0164
98	34.90	- 1.42	2.0164
99	34.90	- 1.42	2.0164
100	34.90	- 1.42	2.0164
101	32.50	+ 0.98	0.9604
102	32.50	+ 0.98	0.9604
103	31.50	+ 1.98	3.9204
104	32.10	+ 1.98	1.9044

105	35.20	- 1.72	2.9584
106	35.20	- 1.72	2.9584
107	35.00	- 1.72	2.9584
108	35.00	- 1.72	2.9584
109	32.00	+ 1.48	2.1904
110	32.00	+ 1.48	2.1904
111	32.00	+ 1.48	2.1904
112	32.00	+ 1.48	2.1904
113	34.90	- 1.42	2.0164
114	34.90	- 1.42	2.0164
115	34.90	- 1.42	2.0164
116	33.10	+ 0.38	0.1444
117	32.00	+ 1.48	2.1904
118	34.00	- 0.52	0.2704
119	32.00	+ 1.48	2.1904
120	32.00	+ 1.48	2.1904
121	34.10	- 0.62	0.3844
122	34.10	- 0.62	0.3844
123	34.00	- 0.52	0.2704
124	34.10	- 0.62	0.3844
125	32.50	+ 0.98	0.9604
126	32.50	+ 0.98	0.9604
127	32.50	+ 0.98	0.9604
128	32.50	+ 0.98	0.9604
129	34.50	- 1.02	1.0404
130	35.00	- 1.52	2.3104
131	34.50	- 1.02	1.0404
132	34.50	- 1.02	1.0404
133	32.10	+ 1.38	1.9044
134	32.10	+ 1.38	1.9044
135	32.10	+ 1.38	1.9044
136	32.10	+ 1.38	1.9044
137	34.80	- 1.32	1.7424
138	34.80	- 1.32	1.7424
139	34.80	- 1.32	1.7424
140	34.80	- 1.32	1.7424

141	32.20	+ 1.28	1.6384
142	32.20	+ 1.28	1.6384
143	32.20	+ 1.28	1.6384
144	32.20	+ 1.28	1.6384
145	33.60	- 0.12	0.0144
146	33.60	- 0.12	0.0144
147	33.80	- 0.32	0.1024
148	33.60	- 0.12	0.0144
149	31.50	+ 1.98	3.9204
150	31.50	+ 1.98	3.9204
151	31.50	+ 1.98	3.9204
152	31.50	+ 1.98	3.9204
153	34.50	- 1.02	1.0404
154	35.00	- 1.52	2.3104
155	35.00	- 1.52	2.3104
156	35.00	- 1.52	2.3104
157	32.40	+ 1.08	1.1664
158	32.40	+ 1.08	1.1664
159	32.40	+ 1.08	1.1664
160	32.40	+ 1.08	1.1664
161	34.00	- 0.52	0.2704
162	34.00	- 0.52	0.2704
163	34.10	- 0.62	0.3844
164	34.00	- 0.52	0.2704
165	33.00	+ 0.48	0.2304
166	33.00	+ 0.48	0.2304
167	33.00	+ 0.48	0.2304
168	33.00	+ 0.48	0.2304
169	33.50	- 0.02	0.0004
170	34.20	- 0.72	0.5184
171	34.20	- 0.72	0.5184
172	34.20	- 0.72	0.5184
173	23.00	+ 0.48	0.2304
174	33.00	+ 0.48	0.2304
175	33.00	+ 0.48	0.2304
176	33.50	- 0.02	0.0004

177	34.00	- 0.52	0.2704
178	34.00	- 0.52	0.2704
179	34.00	- 0.52	0.2704
180	34.00	- 0.52	0.2704
181	33.00	+ 0.48	0.2304
182	33.00	+ 0.48	0.2304
183	33.00	+ 0.48	0.2304
184	33.00	+ 0.48	0.2304
185	34.90	- 1.42	2.0164
186	34.90	- 1.42	2.0164
187	34.90	- 1.42	2.0164
188	34.90	- 1.42	2.0164
189	33.50	- 0.02	0.0004
190	33.40	+ 0.08	0.0064
191	33.50	- 0.02	0.0004
192	33.40	+ 0.08	0.0064
193	33.80	- 0.32	0.1024
194	33.80	- 0.32	0.1024
195	33.80	- 0.32	0.1024
196	33.80	- 0.32	0.1024
197	33.00	- 0.32	0.1024
198	33.00	+ 0.48	0.2304
199	33.00	+ 0.48	0.2304
200	33.00	+ 0.48	0.2304
201	34.30	- 0.82	0.6724
202	33.80	- 0.32	0.1024
203	33.80	- 0.32	0.1024
204	33.80	- 0.32	0.1024
205	32.00	+ 1.48	2.1904
206	33.40	+ 0.08	0.0064
207	33.40	+ 0.08	0.0064
208	33.40	+ 0.08	0.0064
	33.48 mm		247.9912 mm <sup>2</sup>

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
 BIBLIOTECA  
 DEPARTAMENTO DE TESIS-REFERENCIA

#### 4-6. Investigación de la ley de los errores de un planímetro:

Para poder comprobar el error propio de un planímetro hechizo, es necesario evitar los errores personales que siempre pueden cometerse al recorrer el contorno de una superficie desconocida. Para esta operación, puede utilizarse una plancha metálica que tiene gravado el radio de un círculo de área conocida y operarse como se indica en fig. 4.6.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

4-6-1. Colocar la punta trazadora del planímetro, sobre la plancha en el perímetro del círculo y la punta medidora, en la prolongación del diámetro que pasa por la colocación de la punta trazadora.

4-6-2. Efectuar el procedimiento descrito al principio de este capítulo; es decir, un promedio de 8 observaciones; 4, en el sentido de las agujas del reloj y 4, en el sentido contrario. Hacerlo para polo A y para polo B.

4-6-3. Determinar la constante del planímetro, el cual es el desplazamiento promedio de la punta medidora, encontrado al efectuar las observaciones anteriores.

4-6-4. Comparar el resultado anterior con la relación - que existe entre el área barrida por la plancha metálica en su recorrido, que es un área conocida, por estar la longitud de la plancha previamente calibrada, la cual es el radio del círculo recorrido. Dividida por la longitud del planímetro también calibrada.

4-6-5. Error propio del planímetro es la diferencia que existe entre los dos resultados anteriores. Esta diferencia multiplicada por la longitud del planímetro, nos determina el error superficial por fallas en la fabricación del instrumento.



rectángulo que se ajusta al área irregular. En esta posición se traslada el punzón sobre la diagonal hasta llegar al perímetro de la superficie irregular y este punto se toma como de partida o arranque para recorrer el contorno, llegando a él, se vuelve de nuevo sobre la diagonal hasta llegar al punto inicial de colocación del punzón. A continuación, se da como ejemplo uno de los casos analizados para su mayor comprensión.

Para analizar la fórmula que se presenta en este capítulo se utilizó un rectángulo de lados 1.5 a 1, con área = 150 cm<sup>2</sup>, el cual se ajustó a una figura irregular de la misma área.

Con los valores obtenidos en tabla 4.7, se calculó el área con el procedimiento siguiente.

4-7-1. Calcular la constante "C", que consiste en determinar la relación que existe entre el área del rectángulo y el desplazamiento promedio producido en la punta medidora al recorrer el contorno de este.

$$C = \frac{S}{\int p}$$

$$C = \frac{150}{5.07} = 29.6 \text{ cm}$$

$$C = 29.6 \text{ cm}$$

4-7-2. Desplazamiento promedio en figura irregular

$$\int F = 5.04 \text{ (de tabla 4.7)}$$

4-7-3. Calcular el área de perímetro irregular

$$SF = C \times \int F$$

$$SF = 29.6 \times 5.04$$

$$\underline{SF = 149.2 \text{ cm}^2}$$

Error 0.5%

SF = superficie de perímetro irregular

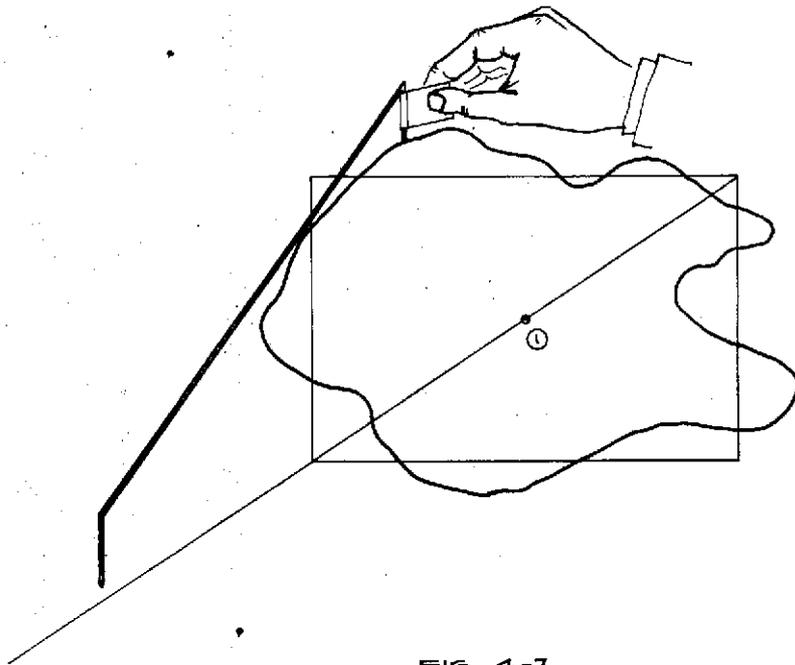


FIG. 4-7

SF = 150 cm<sup>2</sup> AREA IRREGULAR  
 S = 150 cm<sup>2</sup> AREA RECTANGULAR  
 ① PUNTO DE SALIDA DE PUNTA TRAZADORA

SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS.	POLO "C"	SENTIDO DE RECORRIDO	Nº OBS.	POLO "C"
 	1	4.92 Cm.	 	1	4.89 Cm
	2	4.91 "		2	4.85 "
	3	4.91 "		3	4.89 "
	4	4.91 "		4	4.89 "
	X	4.91 Cm		X	4.87 Cm
 	1	5.24	 	1	5.20 "
	2	5.24		2	5.25
	3	5.24		3	5.22
	4	5.24		4	5.22
	X	5.24 Cm		X	5.22 Cm
	X	5.07 Cm		X	5.04 Cm

Cuadro 4.7

## CAPITULO V

### CALCULO DE ERRORES Y DETERMINACION DE CONSTANTES

#### 5-1. Consideraciones generales:

Cuando se hace una medición de cualquier clase que esta sea, puede asegurarse que siempre se comete un error de más o menos consideración, si la medición se hace para determinar un área por medio de un planímetro de varilla, (fig 3.2) que es nuestro caso, las fuentes principales de error se pueden clasificar en 3 grupos: personales, instrumentales y naturales.

#### 5-1-1. Errores personales:

Son los que más se presentan en las mediciones con planímetro y provienen de las limitaciones de los sentidos de la vista y tacto por parte del observador, ó de la poca atención que mantenga el operador para seguir con la visual, la punta trazadora sobre el perímetro de la figura medida. Como ejemplo de estos errores mencionaré los siguientes:

5-1-1-1. Falta de exactitud al medir la longitud del planímetro. Este es un error sistemático que depende del número de observaciones que se hagan.

5-1-1-2. Falta de destreza en la manipulación del planímetro. El instrumento debe siempre mantenerse en un plano perpendicular respecto al plano del dibujo y poner la mayor atención para seguir con la visual la punta trazado

ra sobre el perímetro de la figura medida. Si se tiene por ejemplo, un rectángulo de lados  $a$  y  $b$ ,

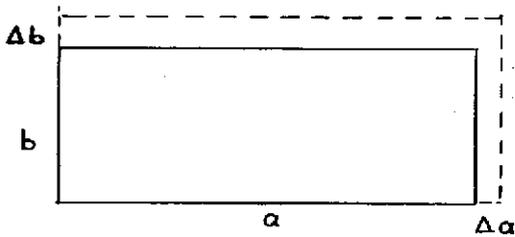


Figura 5.1

y al recorrer el perímetro con la punta trazadora del planímetro nos desplazamos sobre la línea punteada, tal como puede verse en fig. 5.1, tendremos un error  $+ \Delta a$  y  $+ \Delta b$ , el área "S" resultará también afectada de un error  $+ \Delta s$ , es decir:

$$S + \Delta s = (a + \Delta a) \times (b + \Delta b)$$

Si  $a$ , es igual a  $b$ , y en cambio,  $a$  es bastante más grande que  $b$ , el error parcial  $(a \times \Delta b)$  resultará también mucho mayor que  $(b \times \Delta a)$ . Esto justifica que al planimetrar una parcela larga y estrecha, los lados cortos deberán recorrerse relativamente con más precisión que los lados largos.

De los errores descritos puede resumirse que la magnitud de los errores resultantes dependen estrechamente de la coordinación de los sentidos de la vista y tacto y de la habilidad natural del observador.

#### 5-1.2. Errores instrumentales:

Son aquellos debidos a la imperfección del instrumen

to usado por fallas en su fabricación, como ejemplo podemos citar los siguientes:

5-1-2-1. Que la punta trazadora, punta medidora y parte horizontal del planímetro no estén en un mismo plano.

5-1-2-2. Excesivo rozamiento entre pequeña aleta y punta trazadora.

Se comprende que los instrumentos no pueden ser nunca perfectos por lo tanto, las correcciones apropiadas, se deberán aplicar para obtener las medidas dentro del límite deseado de precisión.

5-1-3. Errores naturales:

Tienen su origen en los fenómenos de la naturaleza y por lo tanto están desde luego fuera del control del observador, pero, él puede tomar precauciones apropiadas y hacer sus correcciones al final de una medición. Una fuente de este tipo de error es la variación de temperatura que nos induce a un aumento ó disminución en la longitud del planímetro, pero conociendo el tipo de material de la varilla y el cambio de temperatura, se puede hacer la corrección respectiva.

De las definiciones anteriores se desprende que los errores pueden ser sistemáticos y accidentales.

5-1-4. Errores sistemáticos:

Son aquellos constantes en signo y magnitud. Si por ejemplo, una medición se hace a una temperatura diferente a la de calibración de la longitud del planímetro, se tendrá un error sistemático para cada observación y el error total será la suma de estos.

### 5-1-5. Errores accidentales:

Se consideran aquellos que no siguen una ley matemática, sino que pueden presentarse tanto en un sentido como en otro. Por ejemplo, al planimetrar un área, la podemos medir con exceso o con defecto.

### 5-2. Estudio de errores accidentales:

Para iniciar el estudio de los errores accidentales que se pueden cometer en una medición con planímetro, empezaré por definir error normal, error probable y error temible; ya que nos servirán con fines de comparación para el conjunto de observaciones de una medición.

#### 5-2-1. Error normal:

Se conoce con el nombre de error normal, a la raíz cuadrada de las aproximaciones individuales elevadas al cuadrado, divididas por el número de observaciones sobranes (n-1)

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{(v)^2}{n-1}}$$

Fórmula 5.1

$$v = \bar{X} - V$$

$E_n$  = error normal

$\bar{X}$  = promedio aritmético

$V$  = observación individual

$n$  = número de observaciones

#### 5-2-2. Error probable:

Se llama error probable  $E_p$ , a un error cuyo valor es

tal, que hay el mismo número de probabilidades en pro y en contra para que el valor real caiga dentro de los límites marcados por dicho error probable al variar alrededor del más probable.

$$E_p = \pm 0.6745 E_n \quad \text{Fórmula 5.2}$$

$E_p$  = error probable

### 5-2-3. Error temible:

Se dá el nombre de error temible, al error accidental máximo que probablemente podemos cometer al efectuar una observación y el mayor valor del mismo, es igual según la teoría.

$$E_t = 2.5 E_n \quad \text{Fórmula 5.3}$$

$E_t$  = error temible

### 5-3. Cálculo de precisión:

En la fórmula No. 5.1, puede observarse que para el caso particular de ser  $N = 1$ . Para este caso,  $v^2 = 0$ , y también su denominador  $N - 1 = 0$ , resultando el error normal con valor de

$$E_n = \sqrt{\frac{0}{0}}$$

que como se sabe, es indeterminado y efectivamente así debe ser, pues si solo hay una observación, la precisión es completamente indeterminada.

En esta tesis, con el fin de determinar la precisión de un planímetro de varilla, se hicieron 208 observaciones, partiendo de polo C y recorriendo su perímetro 104 veces en el sentido de las agujas del reloj; 104, en el sentido

contrario. Como puede verse en páginas 36 a 41 correspondiente a fig. 4.2. De estas observaciones, obtuvimos los siguientes resultados en pag. 41 ; con los cuales procedí a calcular los errores de comparación.

### 5-3-1. Errores de comparación

#### 5-3-1-1. Error normal

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{v^2}{n-1}}$$

$$E_n = \sqrt{\frac{247.99}{208-1}}$$

$$\underline{E_n = \pm 1.09 \text{ mm}}$$

#### 5-3-2. Error probable

$$E_p = \pm 0.6745 E_n$$

$$E_p = \pm 0.6745 \times 1.09$$

$$\underline{E_p = \pm 0.73 \text{ mm}}$$

#### 5-3-3. Error temible

$$E_t = 2.5 \times E_n$$

$$E_t = 2.5 \times 1.09$$

$$\underline{E_t = 2.72 \text{ mm}}$$

### 5-4. Cálculo de constantes:

Para mediciones sobre un plano, el error de medición es directamente proporcional una constante por la raíz cuadrada del área medida, para un valor dado de  $n$  observaciones como se demostrará a continuación.

### 5-4-1. Cálculo de constantes teóricas:

Procedimiento:

5-4-1-1. Encontrar el error probable determinando previamente la constante "Q" para "n" observaciones. Tabla 5.1

$$E_p = Q E_n$$

Q = constante para n observaciones (tabla 5.1)

EP = error probable del promedio

### 5-4-1-2 Cálculo de constante teórica:

$$\frac{S}{p} = \frac{K_t}{E_p}$$

$$K_t = \frac{S \times E_p}{\int p} \quad \text{Fórmula 5.4}$$

S = superficie planimetrada

$\int p$  = desplazamiento promedio

$E_p$  = error probable del promedio

5-4-1-3. Substituir constante calculada en fórmula del error de medición:

$$E_m = K_t \sqrt{S}$$

$E_m$  = error de medición

$K_t$  = constante teórica

S = superficie planimetrada

$$K_t = \frac{E_m}{\sqrt{S}}$$

## 5-4-1. Ejemplo ilustrativo:

Encontrar la constante teórica "Kt" para 4 pases del planímetro de 208 observaciones presentadas. Ver tabla 5.1

Procedimiento:

## 5-4-2-1. Error probable para 4 observaciones

$$Ep_4 = Q \times E_n$$

$$Q = 0.1947 \text{ (tabla 5.1)}$$

$$E = 1.09 \text{ m.m. (pág. )}$$

$$Ep_4 = 0.1947 \times 1.09$$

$$Ep_4 = \pm 0.21 \text{ m.m.}$$

## 5-4-2-2. Cálculo de constante:

$$\frac{S}{\sqrt{p}} = \frac{Kt}{Ep \text{ (promedio)}}$$

$$Kt = \frac{S \times Ep}{\sqrt{p}}$$

$$S = 100 \text{ cm}^2$$

$$\sqrt{p} = 33.48 \text{ m.m. (pág. )}$$

$$Ep = \pm 0.21 \text{ m.m. (Error probable de 4 observaciones)}$$

$$Kt = \frac{100 \times 0.21}{33.48}$$

$$Kt = \pm 0.625$$

5-4-2-3. Substituir en fórmula del error de medición la constante obtenida:

$$E_m = K_t \sqrt{S}$$

$$E_m = 0.0625 \sqrt{S}$$

$$K_t = 0.0625$$

5-4-3. Tabulación del error de medición en función de las constantes teóricas para diferentes pases del planímetro de varilla.

N° de Obs	$E = K_t \sqrt{S}$
1	$E_1 = 0.325 \sqrt{S}$
4	$E_4 = 0.062 \sqrt{S}$
8	$E_8 = 0.032 \sqrt{S}$
10	$E_{10} = 0.024 \sqrt{S}$
12	$E_{12} = 0.018 \sqrt{S}$
14	$E_{14} = 0.015 \sqrt{S}$
16	$E_{16} = 0.015 \sqrt{S}$
32	$E_{32} = 0.006 \sqrt{S}$

## 5-4-2 Cálculo de constantes prácticas:

## 5-4-2-1 Deducción de fórmula para determinar la constante práctica

$$E_r = S_r - S \quad (1)$$

$S_r$  = área real

$E_r \rightarrow E_s$

$E_r = E_s = \text{límite}$

$$E_r = K_p \sqrt{S} = \text{cm.} \quad (2)$$

$$E_r = L \text{ cm} \quad (3)$$

Sustituyendo 1 y 2 en 3

$$E_r = L K_p \sqrt{S}$$

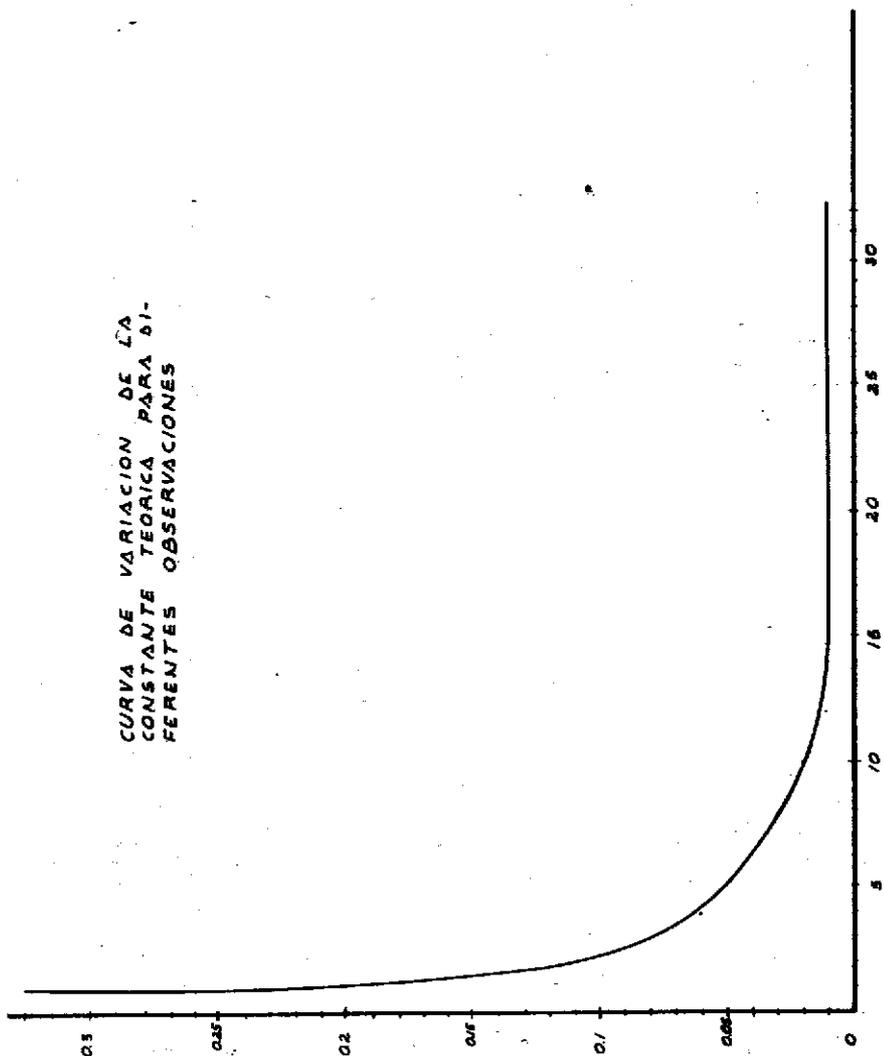
$$K_p = \frac{S_r - S}{L \sqrt{S}}$$

$K_p$  = constante práctica

5-4-2.2 Cálculo de constantes prácticas para 4 casos investigados en (pág. ) y con un promedio de 8 observaciones; 4 en el sentido de las agujas del reloj y 4, en el contrario y comparación con la constante teórica

$$K_p = \frac{E_r}{L \sqrt{S}}$$

CURVA DE VARIACION DE LA  
CONSTANTE TEORICA PARA DI-  
FERENTES OBSERVACIONES



Nº DE OBSERVACIONES

CONSTANTE TEORICA "Kp"

RELACION DE LARGO  
A ANCHO

CALCULO DE CONSTANTE COMPARACION DE CONSTANTE  
TEORICA Y PRACTICA

$$b = a \quad K_{p1} = \frac{104.10 - 100.00}{30} = 0.014 < 0.032$$

$$b = 2a \quad K_{p2} = \frac{207.00 - 200.00}{30} = 0.017 < 0.032$$

$$b = 3a \quad K_{p3} = \frac{311.40 - 300.00}{30} = 0.022 < 0.032$$

$$b = 3.5a \quad K_{p3.5} = \frac{381.90 - 350.00}{30} = 0.057 > 0.032$$

$$b = 4a \quad K_{p4} = \frac{433.80 - 400.00}{30} = 0.057 > 0.032$$

Los resultados anteriores nos indican que la fórmula sólo es aplicable cuando  $a \ll 3b$

**5-5. Cálculo del error de superficie debido a la escala usada en el dibujo:**

Para mayor ilustración se dá el ejemplo siguiente de cómo afecta la escala usada en el error de superficie.

Si por ejemplo, tenemos un área de  $100 \text{ cm}^2$  y al planimetrar dicha área obtenemos un error de superficie de  $0.3 \text{ cm}^2$ , el error debido a la escala, será el siguiente

Area Planimetrada	Escala Usada	Factor Escala	Error por Escala
100.3	1:100	1	0
100.3	1:200	4	1.2%
100.3	1:500	25	7.5%
100.3	1:1000	100	30 %

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PARA EL USO

Después de haber investigado y analizado en diferente forma la medición de áreas con planímetro de varilla, se llegó a las siguientes conclusiones y recomendaciones para el uso del instrumento.

#### 6-1. Conclusiones:

6-1-1. Debido a variaciones de observaciones, el error de medición permanece constante para más de 14 observaciones, por lo que no se justifica hacer un número de observaciones mayor que este.

6-1-2. Para evitar hacer más de 8 observaciones para una medición, partir siempre del centro de la diagonal del rectángulo que se ajusta al perímetro de toda área irregular.

6-1-3. Por diferencia del desplazamiento de la punta medidora debido a variación de observaciones, efectuar para toda medición, un promedio de 8 observaciones; 4 en el sentido de las agujas del reloj y 4, en el sentido contrario.

6-1-4. El área de toda figura irregular se puede medir con un planímetro de Prytz, dividiéndola en rectángulos que se ajusten convenientemente a su perímetro y cuyos lados no tengan una relación mayor de 3 a 1.

6-1-5. Por el error de superficie que se comete, el planímetro de varilla se restringe a la medición de los siguientes trabajos topográficos.

1- En fraccionamiento de terrenos como una primera aproximación.

2- En secciones transversales.

3- En lotes pequeños.

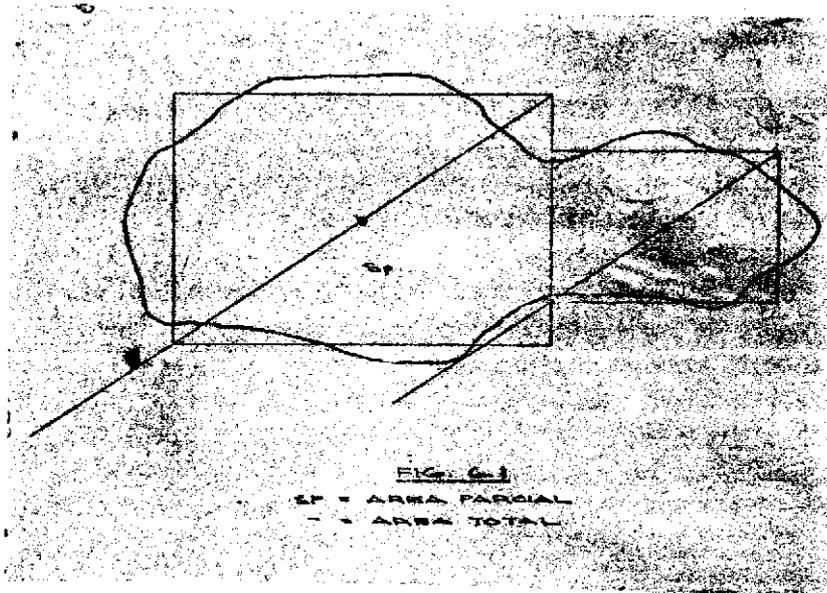
#### 6-2. Recomendaciones para el uso:

6-2-1. El planímetro debe mantenerse en un plano perpendicular respecto al plano del dibujo y seguir con la visual, la punta trazadora sobre el perímetro de la figura medida.

6-2-2. Sostener el planímetro de la aleta sin obstaculizar con los dedos el giro de la punta trazadora.

6-2-3. Cuando se planimetre una parcela larga y estrecha aproximadamente con lados 3 a 1, los lados cortos deberán recorrerse relativamente con más precisión que los lados largos.

6-2-4. Para determinar el área de toda figura irregular, se debe proceder de la siguiente manera



6-2-4-1. Ajustar rectángulos convenientemente al perímetro irregular y cuyos lados no tengan una relación mayor de 3 a 1.

6-2-4-2. Determinar la constante del planímetro  $\delta p$ , que consiste en calcular la relación que existe, entre el área del rectángulo y el desplazamiento promedio producido en la punta medidora al recorrer con la punta trazadora el perímetro del rectángulo, partiendo del centro de la diagonal.

6-2-4-3. En la figura irregular, determinar el desplazamiento promedio producido en la punta medidora al recorrer su contorno. Para efectuar estas observaciones, se parte del centro de la diagonal del rectángulo que se ajusta al área irregular. En esta posición, se traslada la punta trazadora sobre la diagonal hasta llegar al perímetro de la superficie irregular y este punto se toma como de partida o arranque para recorrer el contorno irregular y llegando a él, se vuelve de nuevo sobre la diagonal hasta llegar al punto inicial de colocación de la punta trazadora.

6-2-4-4. Calcular las áreas parciales de la figura irregular fraccionada con la fórmula No.

$$S_p = C \times \delta F$$

$$S_p = \text{Area parcial}$$

6-2-4-5. Calcular el área total propuesta

$$S = \sum S_p$$

## BIBLIOGRAFIA

- Jordan, W. Tratado General de Topografía.
- Guallart, D. Eugenio. Monografía del planímetro de contador.
- Taylor, Warren Crosby. Topografía elemental.
- Davis, Raymond E., Tratado de topografía.
- Argueta, Víctor Manuel. Ley reglamentaria de Ingenieros topógrafos.
- Billeb Vela, Francisco. Folletos, curso de topografía.
- Surveyin Rayner and Schmidt. Nociones sobre errores en relación con levantamientos topográficos.
- Arias, Jorge. Apuntes de probabilidades y estadísticas.

Miguel Angel Sagastume S.

Vo. Bo.:

Ing. Francisco Billeb Vela  
Asesor  
Jefe del Departamento de  
Transporte y Topografía

IMPRÍMASE:

Ing. Amando Vides Tobar  
Decano