



Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ciencias

**GENERACIÓN DE UN CAMPO GRAVITACIONAL REPULSIVO A
PARTIR DE UNA CONSTANTE COSMOLÓGICA POSITIVA**

René Alexander Ramos Díaz

Asesorado por el Dr. Enrique Pazos Ávalos

Guatemala, marzo de 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**GENERACIÓN DE UN CAMPO GRAVITACIONAL REPULSIVO A
PARTIR DE UNA CONSTANTE COSMOLÓGICA POSITIVA**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA

POR

RENÉ ALEXANDER RAMOS DÍAZ

ASESORADO POR EL DR. ENRIQUE PAZOS ÁVALOS

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, MARZO DE 2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Angel Roberto Sic García
VOCAL II	Ing. Pablo Christian de León Rodríguez
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Narda Lucía Pacay Barrientos
VOCAL V	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

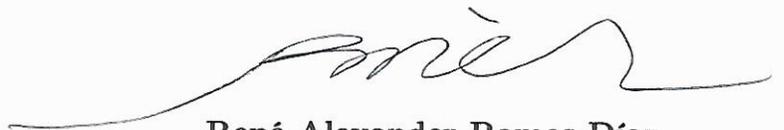
DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
EXAMINADOR	Dr. Enrique Pazos Ávalos
EXAMINADOR	Ing. Otto Miguel Hurtarte
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**GENERACIÓN DE UN CAMPO GRAVITACIONAL REPULSIVO A
PARTIR DE UNA CONSTANTE COSMOLÓGICA POSITIVA**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ciencias, con fecha 30 de abril de 2013.



René Alexander Ramos Díaz.



Facultad de Ingeniería
Departamento de Física

Guatemala, 01 de abril del 2014

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERIA
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación **“Generación de un campo gravitacional repulsivo a partir de una constante cosmológica positiva”**, presentada por el estudiante **René Alexander Ramos Díaz**; con carné No. 2008-15411; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación, como asesor de dicho trabajo.

Muy Atentamente,

Dr. Enrique Pazos Avalos
A S E S O R



Facultad de Ingeniería
Departamento de Física

Ref.Depto.fis.0026-2014
Guatemala, 01 de abril del 2014

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERIA
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Bracamonte:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación **“Generación de un campo gravitacional repulsivo a partir de una constante cosmológica positiva”**, presentada por el estudiante **René Alexander Ramos Díaz**; con carné No. 2008-15411; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
Coordinador, Lic. En Física Aplicada
Departamento de Física
Facultad de Ingeniería

c.c. Archivo



El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **RENÉ ALEXANDER RAMOS DÍAZ**, titulado “GENERACIÓN DE UN CAMPO GRAVITACIONAL REPULSIVO A PARTIR DE UNA CONSTANTE COSMOLOGÍCA POSITIVA”, procede a la autorización del mismo.

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco
Director Escuela de Ciencias



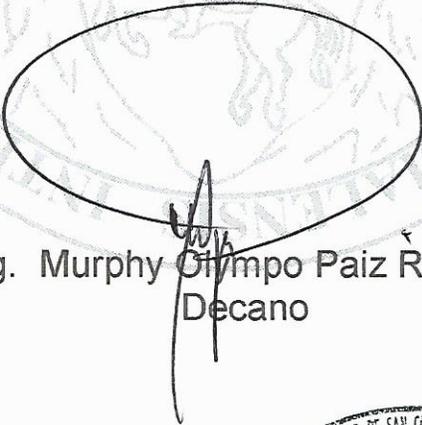
Guatemala, 10 de marzo de 2015

EABOP/scvs



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **GENERACIÓN DE UN CAMPO GRAVITACIONAL REPULSIVO A PARTIR DE UNA CONSTANTE COSMOLÓGICA POSITIVA**, presentado por el estudiante universitario: **René Alexander Ramos Díaz** y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, se autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.


Ing. Murphy Olimpo Paiz Recinos
Decano

Guatemala, marzo de 2015



ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
GLOSARIO	VII
RESUMEN	IX
OBJETIVOS	XI
INTRODUCCIÓN	XIII
1 RELATIVIDAD GENERAL	1
1.1 El principio de equivalencia de Einstein	1
1.2 Representación del espacio-tiempo	9
1.3 Tensor métrico y símbolos de Christoffel	14
1.4 Tensor de Riemann, Ricci y curvatura escalar	16
1.5 Tensor de momentum-energía	20
1.6 Ecuación de campo de Einstein	22
2 ECUACIÓN DE CAMPO PARA EL VACÍO	31
2.1 La constante cosmológica	31
2.2 Ecuación de campo para el vacío	32
2.3 Densidad de energía del vacío	34
2.4 Espacio-tiempo De Sitter	36
2.5 Espacio-tiempo Anti De Sitter	39
3 POTENCIAL DEL FLUIDO IDEAL	41
3.1 Ecuación de campo para un fluido ideal	41
3.2 Campo gravitacional del fluido ideal	42
4 LÍMITE NEWTONIANO DEL VACÍO	49
4.1 Potencial gravitacional repulsivo	49
4.2 Λ como forma de energía oscura	53
CONCLUSIONES	63
RECOMENDACIONES	65
BIBLIOGRAFÍA	67
APÉNDICE A	71
APÉNDICE B	75
APÉNDICE C	79

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1	Potenciales gravitacionales a gran escala	52
---	---	----

TABLAS

I	Valores de parámetros de componentes cosmológicos.	58
---	--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
a	Aceleración
$e_{i_r} \rightarrow e'_{i_r}$	Cambio de la base e_{i_r} a la e'_{i_r}
$\epsilon^{j_s} \rightarrow \epsilon'^{j_s}$	Cambio de la base ϵ^{j_s} a la ϵ'^{j_s}
g	Campo gravitacional
U_μ	Componentes de la cuatrovelocidad
p^α	Componentes del cuatromomentum
Λ	Constante cosmológica $\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$ (SI)
G	Constante de gravitación $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ (SI)
h	Constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$ (SI)
$\delta_{\mu\nu}$	Delta de Kronecker
ρ	Densidad
$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\mu}$	Derivada covariante respecto de μ
$g_{\mu\nu,\mu}$	Derivada parcial respecto de μ
$d\sigma$	Diferencial de área
dv	Diferencial de volumen
R	Escalar de Ricci
$a(t)$	Factor de escala
ω	Frecuencia del fotón
$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$	Índices de tensores con valores 0, 1, 2, 3
i, j	Índices de tensores con valores 1, 2, 3
ds^2	Métrica (o elemento de línea)

∇	Operador gradiente
∇^2	Operador Laplaciano
k	Parámetro de curvatura escalar
Ω	Parámetro de Densidad
φ	Potencial gravitacional
p	Presión
\otimes	Producto tensorial
$\ddot{\mathbf{r}}$	Segunda derivada de la posición respecto del tiempo
$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$	Símbolo de Christoffel
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	Tensor de momentum-energía
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R_{\alpha\beta\mu\nu}$	Tensor de Riemann
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$\eta_{\mu\nu}$	Tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski
t	Tiempo (Modelo FRW, ver Glosario)
τ	Tiempo propio
$\Upsilon_{i_r}^{i_r'}$	Transformación de índices asociada a un cambio de base
\mathbf{r}	Vector de posición
c	Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (SI)

GLOSARIO

Constante covariantemente	Propiedad de un tensor que indica que su derivada covariante es cero.
Contravariante	Pertenciente a un espacio vectorial ordinario.
Cosmología	Estudio del origen y evolución del universo.
Covariante	Pertenciente a un espacio vectorial de uno-formas.
Derivada covariante	Operador diferencial utilizado en geometría diferencial.
FRW	Modelo cosmológico Friedmann-Robertson-Walker.
Lagrangiano	Función escalar que sirve para averiguar el comportamiento de un sistema físico.

Lambda-CDM

O bien Λ CDM. Modelo estándar de la cosmología.

Newtoniano

Relativo a la mecánica clásica de Newton.

SI

Abreviatura para Sistema Internacional de unidades.

Unidades geometrizadas

Unidades para las cuáles $G = c = h = 1$ (Ver Listado de Símbolos).

RESUMEN

Al modificar las ecuaciones de campo de relatividad general agregando un término constante del tensor métrico a la parte geométrica de la ecuación, luego eliminando las fuentes materiales (haciendo cero el tensor de momentum-energía) es posible calcular un potencial clásico utilizando un método de aproximaciones que corresponden al límite newtoniano. Este potencial clásico se interpreta como el potencial clásico del vacío, se dice además que es estático porque no depende del tiempo sino que solamente de las coordenadas espaciales. Finalmente se muestra que la constante cosmológica es la forma más sencilla de energía oscura, la cuál se propuso primero en cosmología y ahora está siendo estudiada desde otras perspectivas de la física, que a pesar de su sencillez es la que mejor explica los datos experimentales que se tienen en la actualidad.

En el límite newtoniano de las ecuaciones de campo de Einstein un observador mide un aparente campo gravitacional repulsivo asociado a la constante cosmológica, pero puede mostrarse, si se trabaja a partir de las ecuaciones de Friedmann y se eliminan las fuentes asociadas a la materia ocurre una expansión permanente, es decir, el factor de escala está definido positivamente para cualquier tiempo mayor o igual a cero. Así puede interpretarse este campo gravitacional repulsivo como un efecto que solo se observa localmente en un escenario cosmológico en donde solo existe una constante cosmológica positiva.

OBJETIVOS

General

Utilizando la ecuación de campo de Einstein para el vacío, mostrar que en el límite newtoniano una constante cosmológica positiva (lo cuál implica una densidad de energía del vacío positiva) genera un campo gravitacional que es repulsivo a escalas cosmológicas.

Específicos

1. Estudiar las propiedades y la interpretación de la ecuación de campo para el vacío en presencia de una constante cosmológica positiva.
2. Deducir el límite newtoniano para la ecuación de campo con un tensor momentum-energía de un fluido ideal.
3. Aplicar el límite newtoniano de la ecuación de campo, con un fluido ideal como fuente, para el caso del vacío.
4. Analizar las propiedades físicas del campo gravitacional resultante luego de aplicar el límite newtoniano a la ecuación de campo para el vacío.

INTRODUCCIÓN

En relatividad general pueden llevarse las ecuaciones de campo a la forma de la ecuación de Poisson para la gravitación (gravitación de Newton), durante este procedimiento se eliminan los términos que tengan dependencia del tiempo, por eso se le conoce como límite newtoniano o límite estático de las ecuaciones de campo. Lo que se busca con este procedimiento es que, una vez conocido el tensor de momentum-energía, pueda calcularse una ecuación de Poisson para la fuente de campo gravitacional que se tenía originalmente en las ecuaciones de campo. De esta forma es posible obtener un potencial clásico y visualizar como se comportaría la fuente de campo gravitacional desde del punto de vista de la gravitación newtoniana.

Este procedimiento es perfectamente aplicable a fuentes materiales, pero al momento de aplicarlo a las ecuaciones de campo modificadas (con un término constante del tensor métrico) surge el problema de interpretar un nuevo término en la ecuación de Poisson. Este problema se resuelve eliminando las contribuciones materiales (tensor de momentum-energía nulo) y asociando el término restante con el vacío. Luego al resolver la ecuación de Poisson resultante, se obtiene el potencial clásico para el vacío. Dicho potencial origina un campo gravitacional que tiene la particularidad de ser repulsivo, algo que no se puede obtener utilizando la gravitación de Newton (la cuál tiene por fundamento que dos partículas eléctricamente neutras y con masa se atraen mutuamente).

1. RELATIVIDAD GENERAL

La Relatividad General es una teoría clásica de gravitación que introduce conceptos físicos distintos a la gravitación de Newton, por ejemplo toma el efecto de fuerza a distancia y lo trata simplemente como un límite local y estático de la ecuación de campo. No explica la gravedad a un nivel fundamental (cuántico), lo que si hace es interpretar la gravedad como una propiedad de la naturaleza capaz de transformar geoméricamente el espacio-tiempo en donde suceden los eventos físicos. Es decir distintas distribuciones de materia-energía producirán distintas formas del espacio-tiempo y esto influirá en las mediciones a realizar.

1.1. El principio de equivalencia de Einstein

Uno de los conceptos que se utilizaron para formular la teoría general de la relatividad es el principio de equivalencia. En relatividad especial los marcos de referencia son siempre inerciales, es decir que no están acelerados. Además según el principio de relatividad: las leyes de la física son las mismas para cualquier observador en un marco de referencia inercial. Uno de los pasos significativos hechos por Einstein fue darse cuenta de que para conseguir una teoría relativista de la gravedad no era necesario introducir el campo gravitatorio a la relatividad especial, en vez de eso, encontró que el proceso más adecuado era extender el principio de relatividad a marcos de referencia no inerciales.

El experimento mental realizado para tal fin fue imaginar a un observador en un marco de referencia en caída libre (acelerado uniformemente), ese observador es inercial dentro del recinto (una nave espacial por ejemplo, un elevador en otras

versiones), ya que todos los objetos dentro de la nave están acelerados uniformemente al igual que el observador, este no percibe cambios en el movimiento de los mismos, por lo cuál la nave con un observador adentro conforman un marco de referencia inercial. Luego se imagina a otro observador que está afuera de la nave, el cuál se dará cuenta que la nave y todos los objetos dentro de ella están acelerados, por lo cuál los resultados de sus mediciones se ven afectados por dicha aceleración.

Si por ejemplo, el observador dentro de la nave espacial acelerada uniformemente emite un rayo de luz desde un punto de su marco de referencia, en ese marco de referencia la luz deberá seguir una trayectoria recta. Mientras que si un observador fuera de la nave observa el mismo fenómeno medirá que el rayo de luz no sigue una trayectoria recta sino una levemente curvada. Esto condujo a enunciar el principio de equivalencia fuerte:

- Las mediciones físicas realizadas en un marco de referencia en caída libre dentro de un campo gravitacional son equivalentes a las mediciones realizadas por un observador en un marco de referencia inercial sin gravedad. O lo que es lo mismo:
- Las mediciones físicas realizadas en un marco no acelerado, en un campo gravitacional \mathbf{g} son equivalentes a las mediciones realizadas en un marco de referencia sin gravedad pero con aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$.

La primera y más importante de las deducciones inmediatas de este principio es que siempre pueden encontrarse marcos de referencia inerciales en cualquier punto del espacio-tiempo. Es decir que en regiones lo suficientemente pequeñas, un observador inercial local no detectará ningún efecto debido a la gravedad.

Ahora se utilizará la teoría de Newton para la gravitación con la intención de mostrar cómo se predice que el movimiento de una partícula sujeta a un campo

gravitacional es independiente de la masa. Luego se tratará lo concerniente al principio de equivalencia débil. Finalmente se discutirán brevemente las consecuencias más importantes del principio de equivalencia fuerte y algunas de las pruebas experimentales que las validan: *redshift* gravitacional, dilatación gravitacional del tiempo y trayectorias curvas de luz.

Si consideran dos partículas con masas M y m , situadas una el origen y otra en \mathbf{r} respectivamente, la fuerza gravitacional que M ejerce sobre m está dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

En donde G es la constante de gravitación universal de Newton. Ahora se define $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ de la siguiente forma

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.2)$$

En donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector radial unitario dirigido de m a M . De tal forma que la fuerza gravitacional ahora puede expresarse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Ahora se considera la ley de Gauss para la gravedad

$$\oint_s \mathbf{g} \cdot d\sigma = -4\pi GM. \quad (1.4)$$

Si se utiliza el teorema de la divergencia

$$\oint_s \mathbf{g} \cdot d\sigma = \int \nabla \cdot \mathbf{g} dv, \quad (1.5)$$

y describiendo la masa total M , como el resultado de una densidad dependiente de las coordenadas espaciales integrada sobre todo el volumen que ocupa dicha distribución, se tiene que

$$\int \nabla \cdot \mathbf{g} dv = -4\pi G \int \rho dv. \quad (1.6)$$

Dado que lo anterior se debe cumplir para cualquier volumen se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho. \quad (1.7)$$

Si definimos el campo gravitacional usando el potencial gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi$, se obtiene la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G \rho. \quad (1.8)$$

Para obtener la ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitacional hay dos caminos generales, el primero consiste en sustituir $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi$ en la ecuación (1.3) y luego igualar esta ecuación con la correspondiente ecuación de la segunda ley de Newton: $\mathbf{F} = m_\iota \ddot{\mathbf{r}}$ (en donde cada punto significa derivación respecto del tiempo), de tal forma que

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left(\frac{m}{m_\iota} \right) \nabla\varphi. \quad (1.9)$$

En donde se ha hecho la distinción entre masa gravitacional m y masa inercial m_i , lo que asegura el principio de equivalencia débil es que

$$\frac{m}{m_i} = 1. \quad (1.10)$$

Esta relación entre la masa gravitacional y la inercial la comprobaron primero Galileo (con su observación de que dos cuerpos de distinta masa caen al mismo tiempo si son lanzados desde la misma altura) y Newton (en experimentos con péndulos), posteriormente se mejoró la precisión en el experimento de Eötvös y experimentos posteriores [15]. De tal forma que la ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitacional es independiente de su masa

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\varphi. \quad (1.11)$$

Al igual que en la gravitación de Newton, en relatividad general una partícula en un campo gravitacional obedece a una ecuación de movimiento independiente de su masa. El principio de equivalencia débil se sigue cumpliendo en el caso relativista, pero no es necesariamente dependiente del principio de equivalencia fuerte. Además de la deducción anterior de la ecuación de movimiento para una partícula en un campo gravitacional se puede utilizar el *Lagrangiano* $L = \frac{1}{2}m_i\dot{r}^2 - m\varphi$, y utilizando las ecuaciones de *Euler-Lagrange* llegar al mismo resultado [12].

Existen tres implicaciones básicas del principio de equivalencia: (1) *redshift* gravitacional, (2) dilatación gravitacional del tiempo y (3) deflexión de un rayo de luz en un campo gravitacional.

Se discutirán brevemente las primeras dos implicaciones, mientras que de la tercera solo se esbozará el concepto utilizando las ecuaciones que describen el fenó-

meno (sin realizar todos los cálculos, ya que aquí no se pretende profundizar en las pruebas experimentales de la relatividad general).

Para describir el *redshift* gravitacional, hay que aclarar que este ocurre en un marco de referencia inercial en donde se detecta el efecto de la gravedad, es decir que si se sigue utilizando el ejemplo de la nave, el *redshift* ocurre únicamente en el marco de referencia de un observador fuera de la nave.

Si se supone que dentro de la nave hay un emisor de luz en un extremo y en el otro extremo un detector. Además se supondrá que tanto el emisor como el detector están dispuestos de tal forma que la dirección de emisión es opuesta a la dirección de la caída libre. Dado que dentro de la nave existe un marco de referencia inercial, en ese marco de referencia no hay ningún *redshift*, esto significa que la frecuencia del fotón al ser emitido es igual a la frecuencia que se le mide al ser detectado

$$\Delta\nu = \nu_{re} - \nu_{em} = 0. \quad (1.12)$$

Si se considera que la nave está en caída libre, para el observador fuera de la nave, el fotón tarda un tiempo $\Delta t = h/c$, en donde h es la distancia emisor/detector y c la velocidad de la luz en el vacío. Además de esto la caída libre implica que el detector se aproxima al observador con una velocidad $\Delta w = g \Delta t$, en donde g es la aceleración debida a la gravedad. Bajo las condiciones antes mencionadas se produce por medio de efecto Doppler un *blueshift* (para la aproximación $w \ll c$) dado por

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta w}{c}. \quad (1.13)$$

La condición de que la frecuencia emitida y la frecuencia recibida sea la misma debe cumplirse para ambos observadores, de tal forma que existe un efecto gravita-

cional que cancele el *blueshift* del efecto Doppler, el cuál puede expresarse como

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta w_{grav}}{c}. \quad (1.14)$$

Dado que se puede considerar al campo gravitacional como el negativo del gradiente del potencial gravitacional, y si además la caída libre se considera unidimensional

$$g = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{d\varphi}{dy} \approx -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}. \quad (1.15)$$

De tal forma que $g \Delta y = gh = -\Delta\varphi$, esto se puede usar para convertir la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación (1.14) de la siguiente forma

$$\Delta w_{grav} = g \Delta t = \frac{gh}{c} = -\frac{\Delta\varphi}{c}. \quad (1.16)$$

Así se obtiene un *redshift* gravitacional dado por

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2}. \quad (1.17)$$

Es importante aclarar cuáles son las condiciones en donde se produce el *redshift*, si se considera el término de potencial en la última ecuación

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.18)$$

Donde $\varphi_1 = \varphi(r_1)$ y $\varphi_2 = \varphi(r_2)$ son los potenciales en las posiciones de recepción y emisión respectivamente y $r_1 > r_2$. Entonces el *redshift* ocurre si

$$\varphi_1 > \varphi_2. \quad (1.19)$$

En otras palabras el *redshift* ocurre solamente si el potencial en donde se recibe el fotón es mayor que el potencial donde fue emitido (respecto a este observador del receptor), de lo contrario ($\varphi_2 > \varphi_1$) se produce un *blueshift* gravitacional. Se han realizado varios experimentos para verificar este tipo de *redshift*, entre ellos el de Pound-Rebka-Snider y por métodos astrofísicos [6], [26].

Ahora se considera el fenómeno de dilatación gravitacional del tiempo, si se considera a la frecuencia como el inverso del tiempo

$$\omega \approx \frac{1}{d\tau}. \quad (1.20)$$

Es posible determinar la siguiente relación a partir de las ecuaciones (1.17) y (1.18)

$$\frac{d\tau_1 - d\tau_2}{d\tau_2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \quad (1.21)$$

Arreglando e integrando esta última ecuación para τ_1 y τ_2 se tiene que

$$\tau_1 = \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right) \tau_2. \quad (1.22)$$

Este resultado se interpreta de la siguiente forma: dados dos relojes en distintas posiciones, el tiempo que mide uno respecto del otro cambia siempre y cuando ambos

se encuentren en regiones de distinto potencial gravitacional. El tipo de experimentos para verificar la dilatación gravitacional del tiempo van desde técnicas con aeronaves hasta el uso de señales de radar [6],[15].

Finalmente si se considera una distribución esférica de materia con masa M , que se interpone entre una fuente de fotones y un observador, la trayectoria de un fotón procedente de dicha fuente se curva, respecto a la trayectoria que se esperaría en ausencia de campo gravitacional alguno [6], mediante la siguiente ecuación

$$\chi = \frac{2GM}{c^2 r_{min}}. \quad (1.23)$$

En donde χ es el ángulo de deflexión, G la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío y r_{min} es un parámetro de distancia para medir la deflexión. De la anterior ecuación es evidente que entre más pequeño sea r_{min} , el ángulo χ que se puede detectar será mayor, así es recomendable buscar situaciones de este tipo para que sea más viable detectar este fenómeno, [6]. A este efecto de que la luz se curve respecto a una trayectoria esperada se le conoce como deflexión gravitacional de la luz y se utiliza como una de las pruebas para validar la teoría general de la relatividad [15].

1.2. Representación del espacio-tiempo

El espacio-tiempo representa al conjunto de todos los eventos (lugar y tiempo, representados por cuatro coordenadas locales, en que sucede un fenómeno físico) como una 4-variedad de Lorentz (a veces denominada también variedad pseudo-Riemanniana) que posee un tensor métrico y una conexión de Levi-Civita [26]. Como ejemplo universalmente utilizado, se partirá del espacio-tiempo de Minkowski para luego delimitar adecuadamente las diferencias entre este espacio-tiempo (que es el

espacio-tiempo de la relatividad especial) y el tipo de espacio-tiempo que se trata en relatividad general, el cuál por ejemplo, no necesariamente es plano y como consecuencia de esto cambia la forma en que se definen los escalares y los vectores en el mismo.

En relatividad especial, el espacio-tiempo en donde ocurren los eventos se conoce como espacio-tiempo de Minkowski. En este espacio-tiempo un vector (o cuadrivector) de posición representa a un evento en particular y se define como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Aunque la notación más conveniente para las componentes de este vector es x^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$. De tal forma que el cuadrivector de posición se puede representar como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Se define el intervalo entre dos eventos en el espacio-tiempo de Minkowski como

$$ds^2 = -c^2 (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.26)$$

En donde $\eta_{\mu\nu}$ es un tensor $(0, 2)$ con la representación matricial

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Este tensor se denomina tensor métrico y es la herramienta principal para dar una descripción geométrica del espacio-tiempo en relatividad especial, y además posee su equivalente en relatividad general. El tensor métrico se puede definir también de la siguiente forma [13]

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu. \quad (1.28)$$

En donde e_μ y e_ν son elementos de la base del espacio de Minkowski que satisfacen

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = -1, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.30)$$

Las ecuaciones anteriores indican claramente que la base del espacio de Minkowski es ortonormal, a diferencia de este, en relatividad general las bases no son ortonormales, es decir al multiplicar dos vectores de la base no se obtienen unos o ceros, sino funciones de las coordenadas locales, o lo que es lo mismo, el tensor mé-

trico de un espacio-tiempo distinto al de Minkowski depende de coordenadas locales y no tiene las mismas propiedades de simetría que tiene $\eta_{\mu\nu}$. Al decir que un espacio-tiempo distinto al de Minkowski (su grupo de simetrías es el de Poincaré) no tiene las mismas propiedades de simetría, se quiere enfatizar el hecho de que cada espacio-tiempo que sea una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, tendrá un grupo de simetría asociado que está determinado directamente por el tensor métrico [22].

Esto último se explica por el hecho de que el espacio-tiempo se puede representar como una variedad de Lorentz d -dimensional L^d , si $U \subset L^d$ es cualquier vecindad abierta en la variedad, por definición siempre es posible encontrar una transformación $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de tal forma que para todo $U_0 \in U$ existe un único $r_0 \in \mathbb{R}^d$, dicho de otra forma a cada punto de la variedad se le puede asociar un conjunto de coordenadas reales, únicamente hay que aclarar que generalmente los sistemas coordenados son locales, es decir abarcan una región restringida de la variedad. Además en el caso de las variedades de Lorentz en relatividad general se hace la distinción entre coordenadas espaciales ($n = 3$, con componentes x^i $i = 1, 2, 3$) y la coordenada temporal $x^0 = ct$, de tal forma que $d = n + 1$.

Así como una variedad de Riemann es localmente un espacio euclidiano, una variedad de Lorentz es localmente un espacio-tiempo de Minkowski. Y de esa forma el tensor métrico en la variedad de Lorentz depende de estas coordenadas locales y hay que enfatizar que la base ahora no es ortonormal

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \neq \delta_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

En donde $\delta_{\mu\nu} = -1$ si $\mu = \nu = 0$ y $\delta_{\mu\nu} = 1$ si $\mu = \nu = 1, 2, 3$, esto es porque el tensor métrico varía según el sistema coordenado local elegido. Por último la propiedad del espacio de Minkowski donde se puede hallar una base para todo el

espacio-tiempo no es válida en la variedad de Lorentz, porque en cada punto hay una base distinta, esto significa que hay un espacio vectorial tangente (T_L) de la misma dimensión que la variedad en cualquier punto, y con los elementos de la base asociada se define el tensor métrico.

De tal forma que cualquier tensor con interpretación física estará definido usualmente en términos las coordenadas locales. Específicamente si un tensor se define utilizando el tensor métrico, la afirmación anterior sigue siendo válida, y este tipo de representación utilizando el tensor métrico como generador de otros tensores es la que se utiliza en relatividad general para postular ecuaciones tensoriales que representen alguna ley física, [4].

Finalmente el tiempo propio se define como un tiempo local ($dx^i = 0$ en la ecuación de la métrica), en el caso del espacio-tiempo de Minkowski está dado por

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \quad (1.32)$$

Esta definición es de gran importancia, ya que define el instrumento con el cuál un observador local mide la duración de los sucesos, el tiempo propio tiene su equivalente en relatividad general aunque en ese caso no hace referencia a un observador que se mueve relativo a otro si no a diferencias de potencial gravitacional y está dado por [6]

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt. \quad (1.33)$$

Así un intervalo temporal dt medido fuera de la región de un observador inercial está relacionado con el tiempo propio $d\tau$ por un factor de la raíz cuadrada de g_{00} que es la componente temporal del tensor métrico, el cuál se tratará posteriormente.

1.3. Tensor métrico y símbolos de Christoffel

El tensor métrico es un tensor $(0, 2)$ (con dos subíndices), en relatividad general este tensor está en función de las coordenadas locales elegidas para el espacio-tiempo que se esté trabajando, además el tensor métrico puede verse como el producto escalar de dos elementos de la base de cualquier espacio tangencial de la variedad

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu. \quad (1.34)$$

En donde x es un elemento de la variedad de Lorentz y $\{e_\alpha\}$ es una base para el espacio tangente en x . Por definición el tensor métrico es simétrico

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (1.35)$$

Si se define el inverso del tensor métrico de la siguiente forma $g^{\alpha\mu}$, se tiene que

$$g_{\nu\mu}g^{\alpha\mu} = \delta_\nu^\alpha. \quad (1.36)$$

La métrica (o elemento de línea) se define de la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (1.37)$$

En donde dx^μ y dx^ν representan elementos infinitesimales de las coordenadas locales. La métrica también puede escribirse como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.38)$$

Esto último significa que en ausencia de gravedad siempre es posible encontrar un conjunto de coordenadas globales (representadas con ξ^σ) para el cuál la métrica sea la de Minkowski, y si la gravedad está presente esta aproximación funciona solamente en una vecindad infinitesimal alrededor de un punto de la variedad de Lorentz. O lo que es lo mismo, como antes se mencionó, todo espacio-tiempo debe reducirse al espacio-tiempo de Minkowski para una aproximación de región infinitesimal, esto formalmente es un teorema que se conoce como teorema de la planitud, en [6] se da uno de los métodos para demostrarlo.

Si se está usando una signatura $(-+++)$ se puede dividir el espacio-tiempo cercano a un punto de la variedad en las siguientes regiones: *time-like* $ds^2 < 0$, *light-like* (o región nula) $ds^2 = 0$, *space-like* $ds^2 > 0$. Esta división es muy importante para estudiar propiedades de espacios-tiempo [26], pero no se discutirá más al respecto.

En una variedad, una conexión es un objeto matemático que sirve para definir el transporte paralelo, y el transporte es usado para definir a su vez la derivación covariante [22]. La conexión puede o no ser definida en términos del tensor métrico, cuando ocurre lo primero la conexión se denomina conexión métrica (y la condición para que esto ocurra es que el tensor métrico sea constante covariantemente $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\mu} = 0$), en general las componentes de este tipo de conexión son [19]

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \{\kappa, \mu\nu\} + \frac{1}{2} (W_{\nu\mu}^\kappa + W_{\mu\nu}^\kappa + W_{\mu\nu}^\kappa). \quad (1.39)$$

En donde $\{\kappa, \mu\nu\}$ son los símbolos de Christoffel y $W_{\mu\nu}^\kappa$ es el tensor de torsión. Si $W_{\mu\nu}^\kappa = 0$, se denomina conexión de Levi-Civita. Las componentes de la conexión de Levi-Civita son iguales a las de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \{\kappa, \mu\nu\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (1.40)$$

Existen formalismos para determinar esta forma explícita de los símbolos de Christoffel [6], [13], aunque aquí no es necesario entrar en esos detalles. Lo que sí importa entender es que con los símbolos de Christoffel se definen los tensores necesarios para llegar a postular las ecuaciones de campo de Einstein. Es importante hacer notar que los símbolos de Christoffel no se comportan como un objeto tensorial, pero aún así pueden utilizarse para construir objetos tensoriales, además con los símbolos de Christoffel se construye la derivación covariante, un tipo de derivación que al aplicarse a un tensor produce otro tensor. Por último una propiedad que se puede mostrar, es la simetría respecto a los dos subíndices inferiores, la cual es consecuencia de la ecuación (1.40)

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa}. \quad (1.41)$$

1.4. Tensor de Riemann, Ricci y curvatura escalar

Una vez que se han definido los símbolos de Christoffel, el siguiente paso es definir e interpretar el tensor de curvatura de Riemann. Para toda la física cuyo fondo (en donde suceden los fenómenos) se puede representar como un espacio euclidiano, no existe ninguna noción de curvatura y no es necesaria. Pero en relatividad general la curvatura es un concepto esencial en el desarrollo de la teoría, con la distinción de que el concepto de un fondo donde suceden los fenómenos debe ser abandonado por el concepto, más general, de espacio-tiempo.

El tensor de Riemann puede escribirse con los símbolos de Christoffel [6]

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}. \quad (1.42)$$

Una de las formas más sencillas para entender como el tensor de Riemann es una medida para la curvatura es utilizar los resultados del método más común para obtenerlo [6], [21], el cuál consiste en tomar un vector \mathbf{V} y transportarlo paralelamente a lo largo de una curva cerrada representada por un paralelogramo infinitesimal definido con los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , se obtiene una variación en las componentes del vector una vez que ha sido transportado dada por:

$$\delta V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta a^\mu b^\nu. \quad (1.43)$$

Si se realiza el proceso descrito en una variedad plana, por ejemplo en \mathbb{R}^2 , evidentemente transportar paralelamente un vector alrededor del paralelogramo no tendrá efecto alguno, dado que las componentes no variarían en este caso, pero transportar un vector nulo no tendría sentido ni tampoco utilizar vectores nulos para definir el paralelogramo, así que se concluye que la condición para que una variedad sea plana es la siguiente:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0. \quad (1.44)$$

Así que si las componentes del tensor de Riemann son distintas de cero la variedad no puede ser plana. Esto es aplicable al caso de relatividad general, en el sentido de que el espacio-tiempo de Minkowski debe satisfacer la condición antes mencionada.

Además, la curvatura puede verse en términos de geodésicas (curvas de longitud máxima o mínima, se discutirán posteriormente), formalmente existe una ecuación de desviación geodésica, [22].

Sin embargo, puede abordarse este aspecto desde una forma intuitiva: la noción de líneas que siempre son paralelas solo existe en variedades planas, en cualquier otro tipo de variedad se pierde esta noción de paralelismo global. Por ejemplo si se usa una 2-esfera (superficie \mathbb{R}^2 contenida en un espacio \mathbb{R}^3) y se toman dos círculos máximos que originalmente parten de un mismo punto se observará que luego son paralelos localmente y finalmente se terminan uniendo inevitablemente; en este caso la curvatura escalar (de la cuál se hablará al final de esta sección) de esta variedad es positiva y constante. De forma similar al usar un hiperboloide (de una hoja) \mathbb{R}^2 en un espacio \mathbb{R}^3 y se traza dos geodésicas que parten de un mismo punto, se observará una tendencia creciente al paralelismo local pero finalmente divergerán por completo, en este caso la curvatura escalar es negativa y constante.

Ahora en cualquier variedad que no sea de curvatura escalar constante, las componentes del tensor de Riemann simplemente variarán de acuerdo a la forma explícita del mismo, en otras palabras dependerán de variaciones explícitas del tensor métrico que a su vez está dado en términos de las coordenadas locales. Si se contrae el tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R_{\beta\mu\nu}^{\sigma} \tag{1.45}$$

Este último tensor posee las siguientes propiedades de antisimetría [6]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \tag{1.46}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}. \tag{1.47}$$

Adicionalmente también tiene simetría respecto a pares de subíndices

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = + R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1.48)$$

Finalmente tiene otra simetría respecto a permutaciones cíclicas de subíndices

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (1.49)$$

La cantidad de componentes independientes N_d del tensor de Riemann para una variedad d-dimesional es la siguiente [6]

$$N_d = \frac{1}{12} d^2 (d^2 - 1). \quad (1.50)$$

En el caso de relatividad general $d = 4$ y por lo tanto existen $N_4 = 20$ componentes independientes del tensor de Riemann. Dada las simetrías anteriores solo existe un tipo válido de contracción del tensor de Riemann [13], y el tensor resultante se denomina tensor de Ricci y está dado por

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.51)$$

El tensor de Ricci es, siguiendo su definición, simétrico

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (1.52)$$

Contrayendo el tensor de Ricci se obtiene el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

1.5. Tensor de momentum-energía

De aquí en adelante se usarán unidades geometrizadas $G = c = 1$ para la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz en el vacío respectivamente, a menos que por conveniencia se necesite usar otras unidades. En relatividad especial el cuádrimomento de una partícula está definido por

$$p^\alpha = (E, \mathbf{p}). \quad (1.54)$$

En donde E es la energía total y \mathbf{p} el momentum lineal de la partícula. Ahora, de forma muy general, este concepto de cuádrimomento puede utilizarse para cualquier sistema físico una vez habiendo realizado las correcciones relativistas si se trata de un sistema clásico o bien si surge de una teoría que ya incorpora la relatividad especial. Se denota el tensor de momentum energía con $T_{\mu\nu}$ y se define como el flujo de μ -momentum a través de una de ν -superficie (una superficie con x^ν constante) [21].

Formalmente no existe una definición única de este tensor [2], [12], pero aquí solo será necesaria la definición dada. Además se tratará el caso de un fluido ideal, importante para entender las propiedades de este tipo de tensor y porque será una representación clave en lo que sigue. En relatividad un fluido ideal se define como un fluido carente de viscosidad y conducción de calor [21].

El tensor de momentum-energía para un fluido ideal es [6]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (1.55)$$

En donde U^μ es la cuadrivelocidad de un elemento del fluido, p y ρ son la presión y la densidad del fluido (ambas constantes), y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. Se puede mostrar que este tensor es simétrico [6].

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (1.56)$$

Además se tiene la condición siguiente en términos de la derivada covariante del tensor de momentum-energía [26]

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu;\mu} = 0. \quad (1.57)$$

Esta condición de que la derivada covariante sea nula se interpreta como la conservación local de la energía. Ambas propiedades, la simetría y la conservación local de la energía, se toman como postulados y deben cumplirse no solo para el caso de una fuente de fluido ideal sino para cualquier tensor de momentum energía en relatividad general [13], [26]. Hasta el momento no se ha dicho cómo teniendo una distribución de materia se puede calcular el tensor de momentum-energía correspondiente. Esto se hace a través de un principio de acción [2], [12], entonces conociendo el Lagrangiano de los campos materiales se puede determinar el tensor de momentum-energía y ese es, a grandes rasgos, el método general para calcularlo.

La interpretación usual del tensor de momentum-energía es que representa la distribución de todos los campos materiales, el problema es que como se verá posteriormente no hay tal cosa como distribución sin la idea de espacio-tiempo,

por lo tanto quizás lo más adecuado, aunque informal, sea afirmar que el tensor de momentum energía es un objeto tensorial que representa a los campos materiales en términos del flujo de momentum de los mismos.

1.6. Ecuación de campo de Einstein

A diferencia de la teoría de la gravitación universal de Newton, que es una teoría estática ¹, la teoría de la relatividad general es dinámica y geométrica en el sentido que los potenciales gravitacionales pueden depender del tiempo y por la idea de que el campo gravitacional es la curvatura del espacio-tiempo generado a través de la ecuación de campo. Lo que se hará primero es llegar a las identidades de Bianchi, luego mostrar que el tensor de Einstein es constante covariantemente y finalmente explicar cómo se postulan e interpretan las ecuaciones de campo de Einstein.

En un marco de referencia inercial los símbolos de Christoffel son nulos $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = 0$, no así su derivada $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\kappa} \neq 0$, esto se explica porque en una variedad de Lorentz que no sea Minkowski, los símbolos de Christoffel se vuelven nulos en un punto en un marco inercial de referencia pero no son nulos en toda la variedad, [21]. Así los últimos dos términos del tensor de Riemann dado por (1.42), son nulos en un marco inercial de referencia y por tanto el tensor de Riemann en este marco inercial es

$$R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\lambda}. \quad (1.58)$$

¹Aquí el término teoría estática se refiere al hecho que el potencial gravitacional dado por la ecuación de Poisson depende únicamente de las coordenadas espaciales, pero no del tiempo.

La derivada del símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa}$ está dada por

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu\sigma} + g_{\mu\lambda,\nu\sigma} - g_{\mu\nu,\lambda\sigma}). \quad (1.59)$$

Utilizando la propiedad de conmutatividad de las derivadas parciales es fácil mostrar que la ecuación (1.58) se convierte en

$$R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}). \quad (1.60)$$

Contrayendo este último tensor con $g_{\alpha\lambda}$ y usando $g_{\alpha\lambda}g^{\lambda\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$ se tiene

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}). \quad (1.61)$$

Derivar parcialmente este último tensor tiene el siguiente resultado

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}). \quad (1.62)$$

Ahora haciendo permutaciones del tipo $\mu\nu, \lambda \rightarrow \lambda\mu, \nu \rightarrow \nu\lambda, \mu$ en esta última expresión, sumando los tres casos respectivamente y utilizando nuevamente la conmutatividad de las derivadas parciales se obtiene la siguiente relación

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0. \quad (1.63)$$

Si se aplica la forma general para la derivada covariante [19], a (1.61) se tiene

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\sigma} R_{\sigma\beta\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\sigma} R_{\alpha\sigma\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} R_{\alpha\beta\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} R_{\alpha\beta\mu\sigma}. \quad (1.64)$$

Sin embargo, al estar en un marco inercial se tiene que $\Gamma_{\lambda\kappa}^{\sigma} = 0$ y por lo tanto la última ecuación se reescribe como

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda}. \quad (1.65)$$

Es decir, en un marco de referencia inercial la derivada covariante del tensor de Riemann escrito en esta forma es equivalente a su derivación parcial. De esto último se concluye que la ecuación (1.63) es equivalente a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (1.66)$$

Este resultado se conoce como identidades de Bianchi. Su importancia radica en que se utilizan para determinar un tensor que es constante covariantemente y poder llegar a las ecuaciones de campo de Einstein. Ahora se realiza una contracción de las identidades de Bianchi con $g^{\alpha\mu}$ (se contraen siempre el primer y tercer índices para que todo quede en términos del tensor de Ricci), además se utiliza la propiedad del tensor métrico de ser constante covariantemente y las simetrías del tensor de Riemann y se obtiene lo siguiente

$$R_{\beta\nu,\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\mu} = 0. \quad (1.67)$$

Ahora se contrae con $g^{\beta\nu}$ y se tiene que

$$R_{;\lambda} - R_{\lambda;\mu}^{\mu} + (-R_{\lambda;\mu}^{\mu}) = 0. \quad (1.68)$$

Esta última expresión puede reescribirse como

$$\left(R_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} R \right)_{;\mu} = 0. \quad (1.69)$$

Ahora se realiza la siguiente conversión, [7]

$$\begin{aligned} R_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} R &= g^{\lambda\nu} \left(R_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} R \right) \\ &= R_{\lambda}^{\mu} g^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda}^{\mu} g^{\lambda\nu} R \\ &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \end{aligned}$$

El resultado final se define como el tensor de Einstein

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \quad (1.70)$$

La transformación realizada es válida nuevamente gracias a que el tensor métrico es constante covariantemente. Además si se deriva covariantemente este tensor es posible llevarlo nuevamente a la forma de la expresión entre paréntesis en (1.69), por lo tanto se obtiene un tensor simétrico que además es constante covariantemente

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad (1.71)$$

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0. \quad (1.72)$$

Ahora bien, parte del trabajo de Einstein fue imaginar como generalizar la

ecuación para el potencial gravitacional newtoniano dado por la ecuación (1.8) en el caso relativista, y lo que propuso fue la siguiente ecuación

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}. \quad (1.73)$$

En donde k es una constante que se determina al exigir que la ecuación de campo se reduzca al caso newtoniano. Evidentemente ambos lados de la ecuación son constantes covariantemente, de tal forma que esta ecuación es válida para cualquier región de la variedad. La deducción completa incluye determinar la constante k , aunque aquí no se hará, puede hallarse este procedimiento en [4], [6], el valor de dicha constante es

$$k = 8\pi. \quad (1.74)$$

En unidades geometrizadas y $k = 8\pi G/c^4$ en unidades del SI. Así la ecuación de campo de Einstein puede escribirse de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.75)$$

La ecuación de campo puede obtenerse más formalmente a través de un principio de acción [2], [7], [12], aunque por el enfoque adoptado desde el principio no se ampliará más sobre este método para deducir las ecuaciones de campo de Einstein.

Una vez encontrada esta ecuación de campo y utilizando el principio de equivalencia de Einstein, se puede enunciar el principio general de la covariancia [6], [27], de la siguiente forma:

- La ecuación se mantiene covariante, esto es, su forma es invariante ante transformaciones generales de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$.
- En ausencia de gravedad la ecuación debe reducirse al caso de relatividad especial, y esto sucede precisamente cuando $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ y además $\Gamma_{\kappa\lambda}^\sigma = 0$.

Este principio debe cumplirse para cualquier ecuación tensorial que pretenda generalizar determinada ecuación válida en el espacio de Minkowski (en ausencia de gravedad) hacia su forma generalizada en un espacio-tiempo cualquiera (con gravedad), el caso más común para ejemplificar esto es el electromagnetismo, ver por ejemplo [6].

Nada se ha dicho aún respecto a la interpretación de la ecuación de campo de Einstein dada por la ecuación (1.75). En este sentido es mejor abordar el asunto de una forma intuitiva: el lado izquierdo de la ecuación puede verse como una medida de curvatura, es decir es un término puramente geométrico; mientras que el lado derecho representa las fuentes materiales por medio del tensor de momentum-energía. Podría decirse que la presencia de materia, o mejor dicho de campos materiales curva el espacio-tiempo, pero podría tenderse a la confusión ya que la ecuación de campo no está escrita en términos de un espacio-tiempo de Minkowski que se llena de campos materiales y se curva paulatinamente como si fuese un objeto elástico.

Lo más adecuado es afirmar que a una determinada fuente de campos materiales se le puede asociar un tensor de momentum-energía, y este genera una curvatura propia de una variedad de Lorentz (espacio-tiempo) que está en términos del tensor de Einstein. Dicho de otra manera, una fuente de campos materiales genera su propio espacio-tiempo, siempre y cuando estos campos materiales interactúen gravitacionalmente no podrán estar contenidos en el espacio-tiempo de Minkowski si no que generan un espacio-tiempo propio y todas las ecuaciones físicas deben formularse en este espacio-tiempo y deben cumplir con el principio general de la covariancia.

Además, al decir que la ecuación de campo de Einstein debe reducirse al caso newtoniano, se quiere decir que el tensor de Einstein debe reducirse al laplaciano del potencial y el tensor de momentum-energía a la densidad de materia en términos únicamente de coordenadas espaciales. Si se realiza este proceso [6], se determina lo siguiente

$$g_{00} = -(1 + 2\varphi). \quad (1.76)$$

En donde $\varphi = \varphi(x)$ es el potencial gravitacional en términos de las coordenadas espaciales x . De tal forma que el tensor métrico representa los potenciales gravitacionales generalizados y la curvatura está dada en términos de operadores diferenciales de hasta segundo orden de estos potenciales gravitacionales (por la forma de los tensores de Riemann y Ricci). Así que ahora se complementa un poco mejor la interpretación de las ecuaciones de campo de Einstein. Resolver la ecuación de campo de Einstein es encontrar las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, conociendo explícitamente el tensor de momentum energía ya sea en términos de soluciones exactas o numéricas, los cuáles son procesos bastante complejos dada la forma de los tensores.

Por las propiedades de simetría del tensor de Einstein y del de momentum-energía se determina que la cantidad de ecuaciones diferenciales (parciales acopladas de segundo orden) independientes a resolver es de 10, pero usando argumentos a partir de las identidades de Bianchi [21], se determina que la cantidad de ecuaciones diferenciales independientes se reduce únicamente a 6.

Finalmente si ahora se considera el caso en el cuál se han determinado las componentes del tensor métrico a través de la ecuación de campo Einstein, las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba están determinadas por la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (1.77)$$

Lo cuál significa que siempre que se conozcan las condiciones iniciales de una partícula de prueba las ecuaciones de movimiento se obtienen al resolver la ecuación diferencial dada. Nuevamente en ausencia de gravedad, $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = 0$ y las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = 0. \quad (1.78)$$

El parámetro λ generalmente se escribe en términos de otro parámetro según convenga (dependiendo si la partícula tiene masa o no) y se conoce como parámetro afín. Hay tres métodos usuales para determinar la ecuación de las geodésicas son: utilizar un principio variacional [19], en donde se extremiza

$$I = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} ds. \quad (1.79)$$

Transportando un vector paralelamente a su propio vector tangente [22]

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0. \quad (1.80)$$

O simplemente aplicando el principio general de la covariancia a la ecuación (1.77) [6]. Es decir que en ausencia de gravedad la ecuación (1.77) se reduce a la ecuación (1.78), que representa simplemente la ecuación de movimiento de una partícula libre.

2. ECUACIÓN DE CAMPO PARA EL VACÍO

Dado que se está usando una teoría clásica, es necesario aclarar como se define el vacío. Desde el punto de vista de la Relatividad General, existe vacío cuando se propone que toda contribución de materia-energía es nula, matemáticamente esto implica igualar a cero el tensor de momentum-energía a cero. Si se hace el procedimiento descrito con la ecuación de campo original la solución que se obtiene es el espacio-tiempo de Minkowski, pero si se introduce un múltiplo constante del tensor métrico a la ecuación de campo es conveniente interpretar adecuadamente el significado de dicha constante.

2.1. La constante cosmológica

Considérese la siguiente transformación al tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu}^* = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

En donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu\nu} R$ es el tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico y Λ una constante. Dado que el tensor métrico es por definición constante covariantemente, $g_{\mu\nu;\mu} = 0$, y la derivada covariante de una constante es cero, $\Lambda_{;\mu} = 0$, se sigue que esta transformación conserva la propiedad de ser constante covariantemente

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu}^* = G_{\mu\nu;\mu}^* = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right)_{;\mu} = 0. \quad (2.2)$$

Por razones históricas a Λ se le denomina constante cosmológica, para una breve explicación al respecto ver por ejemplo [4]. Dado que la transformación $G_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}^*$ sigue siendo constante covariantemente, es posible reescribir la ecuación de campo de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Un aspecto importante que proviene del hecho que este tensor con el término adicional $\Lambda g_{\mu\nu}$ siga siendo constante covariantemente es que no se ve afectada la conservación local de la energía. Pero al incluir este término se ve afectada la condición de que las ecuaciones de campo de Einstein deban reducirse al caso newtoniano, por lo que se concluye que el valor de Λ debe ser muy pequeño para que dicha condición siga siendo válida [5], [15]. Existen muchos aspectos interesantes asociados a la constante cosmológica como hacerla variable respecto al tiempo, ver por ejemplo [18] y aspectos mucho más complejos como calcular todas las posibles contribuciones cuánticas que podría poseer [14], pero eso no se abordará aquí dado que se necesitan formalismos y herramientas que están fuera del alcance de lo que se busca.

2.2. Ecuación de campo para el vacío

Ahora se procederá a determinar la ecuación de campo de Einstein, cuestión matemáticamente sencilla, pero con implicaciones físicas bastante importantes. Se puede empezar reescribiendo la ecuación (2.3) como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Es menester realizar la siguiente pregunta: ¿qué representa el el término $-\Lambda g_{\mu\nu}$?

El tensor de momentum-energía representa a los campos materiales, pero lo mejor en este caso es hacerlo cero $T_{\mu\nu} = 0$, esto es equivalente a decir que no hay ninguna contribución de campos materiales a la ecuación de campo. A pesar de eso sigue quedando un término que en apariencia también funciona como campo material (aunque no se puede decir que lo sea a priori) de la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

De la geometría diferencial se sabe que el término $-\Lambda g_{\mu\nu}$ no es necesariamente una medida de curvatura del espacio-tiempo sino solamente un múltiplo constante del tensor métrico, en este sentido puede decirse que está del lado correcto de la ecuación. Pero si no es parte de la medida de la curvatura, entonces ¿qué es? la interpretación que se le da a este término es que el vacío tiene un campo asociado y su tensor de momentum-energía está dado por $T_{\mu\nu}^{vac} = -\Lambda g_{\mu\nu}$, [5], [6]. Esta interpretación parece trivial, pero no lo es, en primer lugar otra forma de enunciar esto es: si el vacío posee un tensor de momentum energía asociado genera un espacio-tiempo a través de las ecuaciones de campo de Einstein (este espacio-tiempo al asociarse con el término de vacío, no tiene por qué ser únicamente el de Minkowski, como se verá después).

Así la ecuación de campo de Einstein para el vacío está dada por (2.5). Ahora se procede a contraer la ecuación (2.5), haciendo uso del inverso del tensor métrico $g^{\mu\nu}$ se obtiene

$$R = 4\Lambda. \quad (2.6)$$

Si se usa $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ y se multiplica por $g_{\mu\nu}$ a ambos lados de (2.6)

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

De la ecuación (2.6) es claro que todas las soluciones para el vacío tienen curvatura escalar constante si $\Lambda = 0$ se genera el espacio-tiempo de Minkowski (y exteriores de agujeros negros), si $\Lambda > 0$ el espacio tiempo De Sitter y para $\Lambda < 0$ el espacio-tiempo Anti De Sitter (estos últimos dos se tratarán brevemente al final del capítulo). La ecuación (2.5) puede obtenerse también extremizando la siguiente acción [2]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (2.8)$$

2.3. Densidad de energía del vacío

La ecuación de campo para un fluido ideal es la siguiente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi [p g_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu]. \quad (2.9)$$

En donde p es la presión, ρ la densidad y $U_\mu = U^\sigma g_{\sigma\mu}$ las componentes covariantes de la cuadrivelocidad del elemento del fluido. Suponiendo una ecuación de estado de la forma $p = -\rho$, se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi p g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = -8\pi \rho g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Contrayendo las últimas dos ecuaciones haciendo uso de $g^{\mu\nu}$, se tiene [11]

$$R = -32\pi p, \quad (2.12)$$

$$R = 32\pi \rho. \quad (2.13)$$

Comparando las últimas dos ecuaciones con (2.6) se establece que [6]

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi} \equiv -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (2.14)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi} \equiv \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.15)$$

El procedimiento anterior equivale a decir que el vacío admite una representación de fluido relativista ideal con una ecuación de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Esto último se explica por el hecho de que dado que tanto ρ_Λ como p_Λ son constantes, las ecuaciones (2.10) y (2.11) tienen la misma forma que (2.5) y además se sigue cumpliendo con la conservación local de la energía (o lo que es lo mismo, el tensor de momentum-energía es constante covariantemente)

$$(8\pi p_\Lambda g_{\mu\nu})_{;\mu} = (-8\pi \rho_\Lambda g_{\mu\nu})_{;\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Si se toma en este caso una ecuación de estado distinta a la elegida, no se puede llegar a una forma de tensor de momentum-energía equivalente a la que aparece en

(2.5), y por tanto no podría establecerse esta equivalencia [6]. De esta forma es como se concluye que el vacío admite una representación de fluido ideal relativista. En algunas investigaciones en donde realizan consideraciones de teoría cuántica de campos, han obtenido como resultado una redefinición de la constante cosmológica [14], en términos de una constante cosmológica efectiva Λ_{ef}

$$\Lambda_{ef} = \Lambda + \eta \rho_{vac}. \quad (2.17)$$

En donde Λ es la constante cosmológica y $\eta \rho_{vac}$ consta de varias contribuciones de distintos campos. Al comparar los resultados de teoría cuántica de campos para la densidad de energía del vacío $\rho_{\Lambda(QFT)}$, con el valor experimental ρ_{Λ} (que consideran usualmente solo los resultados de relatividad general) se obtiene una diferencia de 120 órdenes de magnitud entre las mismas [5]

$$\frac{\rho_{\Lambda(QFT)}}{\rho_{\Lambda}} = \frac{10^{72} GeV}{10^{-48} GeV} = 10^{120}. \quad (2.18)$$

Esta situación de discrepancia origina lo que se conoce como problema de la constante cosmológica y es aún un problema no resuelto en física teórica, si se desea ver un tratamiento mucho más avanzado del mismo ver por ejemplo [14], [23]. Para ver una discusión breve de los métodos observacionales y experimentales usados para medir la densidad de energía del vacío ver [5].

2.4. Espacio-tiempo De Sitter

El espacio tiempo De Sitter posee curvatura de Ricci positiva constante dado que se elige una $\Lambda > 0$ en la ecuación $R = 4\Lambda$. La forma de representarlo globalmente es utilizando un hiperboloide contenido en un espacio-tiempo de Minkowski de 5

dimensiones [10], [11], [16], la ecuación para dicho hiperboloide es

$$-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = q^2. \quad (2.19)$$

En donde $q = \sqrt{3/\Lambda}$. La métrica del espacio de Minkowski es en este caso

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2. \quad (2.20)$$

La mayoría de sistemas de coordenadas usuales para este espacio-tiempo se encuentran transformando las coordenadas $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$, para una descripción extensa de las transformaciones de coordenadas más comunes, así como diagramas conformes para este espacio-tiempo ver [10], [11]. Aunque este espacio-tiempo tiene propiedades cosmológicas bastante interesantes [16], aquí solo se mostrará que puede verse como una solución cosmológica en el modelo FRW (Friedmann-Robertson-Walker) y se discutirá la forma del factor de escala que origina, que no es único y solo se utiliza para ejemplificar el uso que tiene en cosmología. En el modelo FRW se supone que el contenido de materia-energía del universo se comporta de forma homogénea e isotrópica a gran escala (en el orden de los $10^3 Mpc$) [6], [8], de tal forma que el tensor de momentum energía asociado es el de un fluido ideal relativista, si además se agrega una constante cosmológica, la ecuación de campo resultante es

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi [p g_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu] - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Una forma de escribir la métrica resultante con coordenadas (t, r, θ, ϕ) , [10] es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.22)$$

En donde $a(t)$ se conoce como factor de escala y $k = 0, -1, +1$ para el caso de universo plano, abierto y cerrado respectivamente. Además se puede determinar que las ecuaciones de Friedmann en presencia de una constante cosmológica en las ecuaciones de campo son las siguientes (cada punto sobre el factor de escala significa derivación respecto del tiempo) [5]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.24)$$

Ahora si se toma ecuación (2.23), y se desprecian las contribuciones materiales $\rho \approx 0$, $p \approx 0$ (lo cuál es inapropiado pero sirve para ejemplificar lo que se quiere) , se obtiene la ecuación diferencial

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda}{3} a. \quad (2.25)$$

Cuya solución se puede escribir de la siguiente forma

$$a(t) \propto e^{\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (2.26)$$

Que es el caso para un universo plano ($k = 0$) y dominado por el vacío [10]. Además no solo esta solución es posible, de hecho el espacio-tiempo De Sitter admite representar en él los tres tipos posibles de universo del modelo FRW al utilizar las coordenadas adecuadas y aún más importante parece el hecho de que en ausencia de campos materiales pero con $\Lambda > 0$ se obtendría el espacio-tiempo De Sitter y no el de Minkowski, [16]. Finalmente el espacio-tiempo De Sitter sirve también como herramienta en modelos de inflación en cosmología [17].

2.5. Espacio-tiempo Anti De Sitter

Cuando en las ecuación de campo para el vacío se elige $\Lambda < 0$ se obtiene un espacio-tiempo con curvatura escalar $R < 0$ y que se conoce como espacio-tiempo Anti De Sitter. La representación usual es la de un hiperboloide contenido en un espacio de Minkowski de cinco dimensiones [10], [11], [16], cuya ecuación es

$$-z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = -b^2. \quad (2.27)$$

En donde $b = \sqrt{-3/\Lambda}$. La métrica del espacio de Minkowski es en este caso

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 - dz_4^2. \quad (2.28)$$

Nuevamente las representaciones más usuales se obtienen haciendo transformaciones en las coordenadas $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$. Tanto el espacio-tiempo De Sitter como el Anti De Sitter son máximamente simétricos [22], al igual que el de Minkowski [10], lo cuál les da muchas de las propiedades geométricas interesantes que poseen. Además el espacio-tiempo Anti De Sitter se utiliza actualmente en física de altas energías [16]. Existen estudios mucho más amplios sobre el espacio-tiempo Anti De Sitter [10], [16], pero dado que se está trabajando con una $\Lambda > 0$ y realizando los cálculos de acuerdo a dicha suposición no se discutirá más al respecto.

3. POTENCIAL DEL FLUIDO IDEAL

La ecuación de campo de Einstein debe reducirse a la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional newtoniano en límite estático. A partir de esta idea puede deducirse una ecuación de Poisson para el potencial gravitacional del vacío a partir de la ecuación de campo de Einstein modificada con una constante cosmológica positiva, dicha ecuación es relativamente fácil de resolver ya que es posible mostrar que se convierte en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

3.1. Ecuación de campo para un fluido ideal

En relatividad un fluido ideal es una distribución continua de materia que carece de viscosidad y de conducción de calor [21], [26]. El tensor de momentum-energía para este tipo de fluido está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

En donde $U_\mu = U^\sigma g_{\sigma\mu}$ es la componente covariante de la cuadrivelocidad del elemento del fluido en un marco inercial, ρ y p son la densidad y la presión del fluido (ambas constantes) respectivamente. La ecuación de campo para un fluido ideal es la siguiente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi [(\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}]. \quad (3.2)$$

En el capítulo anterior se discutió que este tipo de ecuación de campo puede tener soluciones exactas, principalmente cosmológicas y dependientes de la ecuación de estado que relaciona la presión y la densidad del fluido. El tensor de momentum-energía puede obtenerse utilizando termodinámica [21], construirse a partir de argumentos basados en una definición más formal [27], o bien podría calcularse directamente por el método Lagrangiano de relatividad general.

Cuando se hacen aproximaciones newtonianas regularmente se considera despreciable a la presión $p \approx 0$ para materia no relativista [6]. Pero lo que se busca aquí es observar los efectos de densidad y presión en el límite newtoniano con la ecuación de estado para el vacío, así que no puede despreciarse la presión.

3.2. Campo gravitacional del fluido ideal

Primero considérese la contracción a la ecuación de campo

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Al tratarse algebraicamente la última ecuación se obtiene lo siguiente

$$R = -8\pi T. \quad (3.4)$$

En donde $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Sustituyendo (3.4) en la ecuación de campo se tiene

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (3.5)$$

Ahora bien, para el caso estático, es decir el límite newtoniano, se tiene que solo términos independientes del tiempo deben ser los dominantes, es decir tanto la dependencia del tiempo así como las derivadas asociadas deberán desaparecer en el tensor de Ricci. Para lograr esto, se empieza contrayendo el tensor de Riemann (en un marco inercial) dado por la ecuación (1.61), para convertirlo en el tensor de Ricci, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\mu\lambda\nu} \\
&= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\kappa\nu,\mu\lambda} - g_{\kappa\lambda,\mu\nu} + g_{\mu\lambda,\kappa\nu} - g_{\mu\nu,\kappa\lambda}) \\
&= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu \partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\kappa\lambda} + \partial_\kappa \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

Luego se tiene que la componente del tensor de Ricci es solamente R_{00} , que se puede encontrar a partir de la última expresión, y está dada por [6]

$$R_{00} = g^{ij} R_{i0j0} = \frac{g^{ij}}{2} (\partial_i \partial_j g_{00} - \partial_0 \partial_j g_{i0} + \partial_i \partial_0 g_{0j} - \partial_0 \partial_0 g_{ij}). \quad (3.6)$$

Dado que la dependencia del tiempo desaparece, se tiene que

$$\partial_0 \partial_j g_{i0} = 0, \quad (3.7)$$

$$\partial_i \partial_0 g_{0j} = 0, \quad (3.8)$$

$$\partial_0 \partial_0 g_{ij} = 0. \quad (3.9)$$

De tal forma que la ecuación (3.6) se convierten en

$$R_{00} = \frac{g^{ij}}{2} \partial_i \partial_j g_{00}. \quad (3.10)$$

En coordenadas cartesianas $g^{ij} = \delta^{ij}$, lo cuál implica que

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}. \quad (3.11)$$

Así se demuestra [4], [6] que en el límite newtoniano se tiene la siguiente relación

$$R_{00} \rightarrow \nabla^2 g_{00}. \quad (3.12)$$

Sabiendo que $g_{00} = (1 + 2\varphi)$ [6], se tiene que

$$\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 (1 + 2\varphi) = \nabla^2 \varphi. \quad (3.13)$$

Entonces la ecuación (3.11) adopta la forma

$$R_{00} = \nabla^2 \varphi. \quad (3.14)$$

Y por ende el límite newtoniano puede hallarse a partir de

$$R_{00} = 8\pi \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right). \quad (3.15)$$

Para el caso del fluido ideal T está dada por

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = (\rho + p)g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu + pg^{\mu\nu}g_{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Al considerar la aproximación

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Se determina lo siguiente

$$\begin{aligned} T &\approx (\rho + p)\eta^{\mu\nu}U_\mu U_\nu + p\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = -(\rho + p) + 4p \\ &= -\rho + 3p. \end{aligned}$$

Utilizando esta última relación y $g_{00} \approx \eta_{00} = -1$

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T &= \rho + \frac{1}{2}T \\ &= \rho + \frac{1}{2}(-\rho + 3p) \\ &= \frac{1}{2}\rho + \frac{3}{2}p. \end{aligned}$$

Al usar este último resultado y la ecuación (3.14), (3.15) se convierte en

$$\nabla^2\varphi = 4\pi(\rho + 3p). \quad (3.18)$$

Qué es la ecuación de Poisson newtoniana para el potencial gravitacional φ , o mejor dicho pseudo-newtoniana porque posee un término de presión que no aparece

en la ecuación original y que está actuando como fuente de campo gravitacional al igual que la densidad. Ahora, sabiendo que ρ y p son constantes, se supondrá que φ solo tiene dependencia radial, utilizando coordenadas esféricas se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 4\pi (\rho + 3p). \quad (3.19)$$

La última ecuación puede reescribirse como

$$\frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 4\pi (\rho + 3p). \quad (3.20)$$

Proponiendo una solución de la forma

$$\varphi = b r^2. \quad (3.21)$$

Junto a la condición de frontera $\varphi(0) = 0$, se tiene que

$$b = \frac{2\pi}{3} (\rho + 3p). \quad (3.22)$$

Dando finalmente una solución de la forma

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} (\rho + 3p) r^2. \quad (3.23)$$

Recordando que $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$ se tiene que

$$\mathbf{g} = -\frac{2\pi}{3} (\rho + 3p) r \hat{r}. \quad (3.24)$$

Notése que para $(\rho+3p) > 0$ se tiene un campo gravitacional atractivo, mientras que para $(\rho + 3p) < 0$ se obtendría un campo gravitacional repulsivo. Esta solución es única y se llega a la misma independientemente de las coordenadas que se hayan elegido, por ejemplo si se utilizan coordenadas cartesianas se tiene que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi (\rho + 3p). \quad (3.25)$$

Con la condición de frontera $\varphi(0, 0, 0) = 0$ la solución es

$$\varphi = b (x^2 + y^2 + z^2). \quad (3.26)$$

La cuál es equivalente a la encontrada anteriormente. Como se ha visto, lo que determina el tipo de potencial que se obtiene es la ecuación de estado del fluido ideal, lo cuál será muy útil más adelante. Para encontrar potenciales más exóticos habría que llegar a otras ecuaciones de Poisson, ya que como se ha visto existe unicidad en la solución. Esto último se podría lograr planteando un escenario cosmológico en donde no puedan representarse las fuentes materiales utilizando un fluido ideal. Este ejercicio es ilustrativo, ya que en un escenario cosmológico realista todos los parámetros importantes son dinámicos (dependen del tiempo). Encontrar este tipo de potenciales sirve solo para mostrar que bajo ciertas condiciones la constante cosmológica puede tener un efecto repulsivo. Si además se considera el potencial gravitacional ordinario, se tendría un potencial gravitacional total \mathbf{g}_T de la siguiente forma

$$\mathbf{g}_T = -\frac{2\pi G}{3}(\rho + 3p) r \hat{r} - \frac{GM}{r} \hat{r}. \quad (3.27)$$

En donde M es la masa del objeto respecto del cuál se está definiendo el campo gravitacional y G (aquí se está asumiendo $c = 1$) es la constante de gravitación universal de Newton. Aunque este último resultado superpone dos componentes de distintos orígenes, será útil a la hora de observar el comportamiento newtoniano de los resultados del siguiente capítulo.

4. LÍMITE NEWTONIANO DEL VACÍO

En el capítulo anterior se mostró que es posible encontrar una ecuación de Poisson para el potencial gravitacional asociado al vacío sin encontrarlo explícitamente, en este capítulo se encuentra este potencial y se discute su interpretación. Además, se expone brevemente las ideas principales asociadas al concepto de energía oscura en cosmología y se explica como la constante cosmológica es la forma más simple para modelarla. Finalmente se da un listado de otros modelos de energía oscura que se han propuesto y se discute brevemente un escenario donde Λ es un parámetro que puede variar en el tiempo.

4.1. Potencial gravitacional repulsivo

Anteriormente se mostró que la ecuación para el potencial gravitacional (en el límite newtoniano) para un fluido ideal relativista está dada por (3.10), ahora considérese de nuevo una ecuación de la misma forma

$$\nabla^2\varphi = 4\pi(\rho_T + 3p_T). \quad (4.1)$$

Con las siguientes definiciones

$$\rho_T = \rho_M + \rho_\Lambda, \quad (4.2)$$

$$p_T = p_M + p_\Lambda. \quad (4.3)$$

En donde T significa que se están considerando tanto las contribuciones de la materia como del vacío al mismo tiempo, M representa la contribución de la materia y Λ del vacío, es decir, se considera el caso cosmológico en el cuál tanto la densidad como la presión pueden representarse como la suma de las contribuciones individuales de la materia y del vacío. Con las siguientes relaciones [6]

$$\rho_m \gg p_m, \tag{4.4}$$

$$\rho_\Lambda \gg \rho_m. \tag{4.5}$$

Estas condiciones son equivalentes a las siguientes

$$\rho_T \approx \rho_\Lambda, \tag{4.6}$$

$$p_T \approx p_\Lambda. \tag{4.7}$$

Lo cuál equivale a decir que se está considerando el caso cosmológico con un vacío dominante. Entonces en este límite $\varphi \approx \varphi_\Lambda$ y (4.1) se convierte en

$$\nabla^2 \varphi_\Lambda = 4\pi (\rho_\Lambda + 3p_\Lambda). \tag{4.8}$$

Utilizando la ecuación de estado para la representación (clásica) del vacío que se está utilizando $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ y recordando que $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi$, la última ecuación adopta la forma

$$\nabla^2 \varphi_\Lambda = -\Lambda. \quad (4.9)$$

Para este caso se tiene lo siguiente: $\varphi_\Lambda = \varphi_\Lambda(r)$, $\nabla^2 \equiv (1/r^2)\partial/\partial r(r^2\partial/\partial r)$, la condición de frontera $\varphi_\Lambda(0) = 0$ y proponiendo una solución de la forma $\varphi = ar^2$ (a constante) , a partir de (4.9) se obtiene

$$\varphi_\Lambda = -\frac{1}{6}\Lambda r^2. \quad (4.10)$$

Usando la ecuación (1.7) se tiene que

$$\mathbf{g}_\Lambda = -\nabla\varphi_\Lambda. \quad (4.11)$$

De donde se obtiene el campo gravitacional para el vacío de la forma

$$\mathbf{g}_\Lambda = +\frac{1}{3}\Lambda r\hat{r} \equiv +\frac{1}{3}\Lambda c^2 r\hat{r}. \quad (4.12)$$

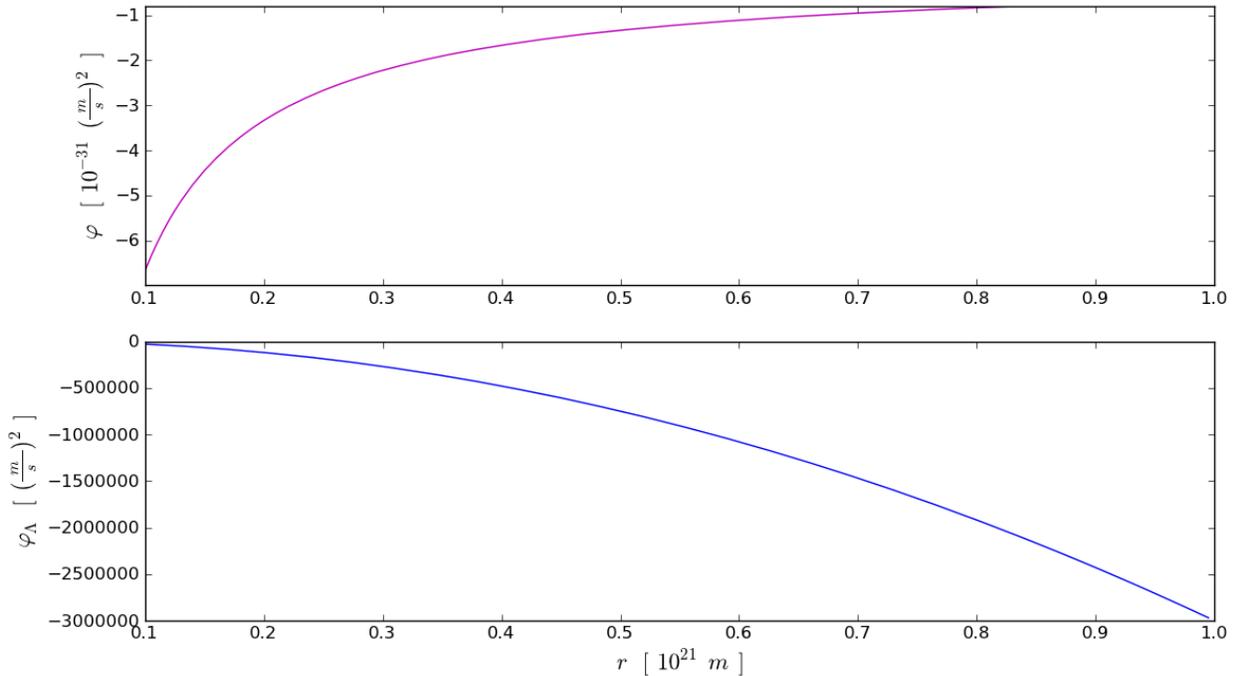
Así una masa de prueba, respecto a una fuente de masa M percibiría el siguiente campo gravitacional efectivo \mathbf{g}_T de la siguiente forma, ver la ecuación (3.27),

$$\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_\Lambda + \mathbf{g} = +\frac{1}{3}\Lambda c^2 r\hat{r} - \frac{GM}{r}\hat{r}. \quad (4.13)$$

Aquí es necesario realizar las siguientes observaciones: (a) tanto el potencial como el campo gravitacional del vacío son independientes de cualquier masa, a dife-

rencia del potencial gravitacional newtoniano usual; (b) aunque $\Lambda \ll 1$ el potencial $\varphi_\Lambda \neq 0$ para grandes distancias $r \gg 0$; (c) el efecto de una constante cosmológica con la representación que se utiliza (fluido ideal relativista), es generar un campo gravitacional repulsivo que debería de observarse para cualquier objeto (dada su independencia de la masa) a escalas cosmológicas.

Figura 1. **Potenciales gravitacionales a gran escala**



Fuente: elaboración propia. Potenciales gravitacionales atractivo ($\varphi = -Gm/r$) y repulsivo ($\varphi_\Lambda = -\Lambda c^2 r^2/6$), ambos a las mismas escalas en el orden de $10^{21} m$.
 $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$, $c = 3 \times 10^8 m/s$, $m = 1 kg$, $\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$.

En la figura 1 se ve claramente que a distancias lo suficientemente grandes el potencial que domina es el repulsivo. Por lo tanto, la mayoría de pruebas orientadas a detectar los efectos de una constante cosmológica positiva (con la representación usual) deben de estar basadas en observaciones astrofísicas a gran escala [5]. El cálculo realizado es útil para mostrar que el efecto de una constante cosmológica

mayor que cero con la representación dada produce un campo gravitacional repulsivo en el límite newtoniano.

A pesar de dicha importancia, al utilizar esta aproximación se presentan los siguientes inconvenientes conceptuales: (a) en la ley universal de la gravitación (Newton) la distribución espacial de la masa es la fuente de campo gravitacional, pero aquí es la densidad de energía del vacío, independiente de cualquier masa, y debería actuar igual para todo tipo de materia debido a esta independencia; (b) en el método utilizado se está suponiendo una métrica de Minkowski, pero esta aproximación es válida solo a una escala infinitesimal, y con una constante cosmológica positiva y vacío dominante el espacio-tiempo asociado es el de De Sitter no el de Minkowski, por lo cuál un efecto repulsivo más realista debería de estudiarse en este espacio-tiempo o bien explicarse de otra manera en ese contexto cosmológico.

La única pregunta que se responde fácilmente con el método utilizado es ¿por qué es que no se separan todas las estructuras que se observan si existe un campo gravitacional repulsivo que actúa independientemente de la masa? por el simple hecho de que la constante cosmológica tiene un valor demasiado pequeño y la forma de la ecuación que la representa (4.12) expresa claramente que el efecto se hace evidente únicamente a escalas lo suficientemente grandes $r \gg 0$.

4.2. Λ como forma de energía oscura

La energía oscura es un componente cosmológico (además de la materia bariónica y oscura) que: (a) crea una expansión acelerada del universo, (b) solamente interactúa con él mismo y con la gravedad y (c) posee la siguiente ecuación de estado [20]

$$p_X = w_X \rho_X. \tag{4.14}$$

En donde p_X representa la presión, ρ_X la densidad de energía y w_X es un parámetro que puede ser constante o dinámico y determina el comportamiento de las distintas formas de energía oscura que se han postulado [1]. Es necesario aclarar el origen del concepto de energía oscura, para esto primero se tratara la parametrización usual en el modelo FRW (Freedman-Robertson-Walker) de la cosmología y luego se discutirá el surgimiento del concepto.

Considerése la primera ecuación de Friedmann modificada con una constante cosmológica y escrita de la siguiente forma [5]

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho_T - \frac{k}{a^2}. \quad (4.15)$$

Nuevamente se han utilizado las definiciones $\rho_T = \rho_M + \rho_\Lambda$ (descomposición de la densidad como la suma de una componente de materia y otra asociada a la constante cosmológica) y $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi$. Para obtener la parametrización que se necesita se procede a despejar para k en la ecuación (4.14), de la siguiente forma

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \rho_T - H^2, \quad (4.16)$$

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \left(\rho_T - \frac{3H^2}{8\pi} \right). \quad (4.17)$$

Se define la densidad crítica como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.16) puede entonces reescribirse como

$$k = \frac{8\pi}{3} a^2 \rho_c (\Omega - 1). \quad (4.19)$$

En donde Ω se conoce como parámetro de densidad y se define como

$$\Omega = \frac{\rho_T}{\rho_c}. \quad (4.20)$$

Utilizando nuevamente la definición de ρ_c

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (4.21)$$

La ecuación (4.18) se convierte en

$$k = \dot{a}^2 (\Omega - 1). \quad (4.22)$$

Es necesario hacer las siguientes observaciones: (a) k es el parámetro de curvatura en esta parametrización [5], (b) $\dot{a} = \dot{a}(t)$ y $\Omega = \Omega(t)$ implican que k es también un parámetro dinámico, (c) por lo tanto, al hablar de los posibles valores de k , \dot{a} o Ω se entienden por los valores experimentales actuales.

De tal forma que la geometría del universo, en el modelo FRW, queda determinada por el valor de Ω de la siguiente forma

$$\Omega = 1 \Rightarrow k = 0, \quad (4.23)$$

$$\Omega > 1 \Rightarrow k > 0, \quad (4.24)$$

$$\Omega < 1 \Rightarrow k < 0. \quad (4.25)$$

Para un universo plano, cerrado y abierto respectivamente. De (4.19) se sigue que el parámetro de densidad admite naturalmente la descomposición

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda. \quad (4.26)$$

Generalmente se admite la descomposición para $\Omega_M = \Omega_{LM} + \Omega_{CDM}$ en donde *LM* significa *Luminous Matter* (materia visible, a veces también se denota con *B* de *Baryonic matter* o materia bariónica) y *CDM* *Cold Dark Matter* (materia oscura fría). Al agregar materia oscura fría y una constante cosmológica al modelo FRW de la cosmología, con todas sus implicaciones teóricas, surge el modelo estándar de la cosmología (o modelo Λ CDM), [6].

Para determinar el origen y la necesidad del concepto de energía oscura se seguirá un método bastante esquemático (aunque al final se muestra un conjunto de parámetros cosmológicos y una breve discusión al respecto). El surgimiento del concepto de energía oscura como concepto cosmológico se puede dividir en cuatro fases:

- Evidencia obtenida a partir de las anisotropias del fondo cósmico de microondas mostraba que $\Omega = 1,03 \pm 0,03$, [9]. Lo cuál implica de acuerdo a (4.21) y (4.22) que actualmente el universo es plano.
- Observaciones astrofísicas que consideraban solamente materia, es decir que no asumen que la constante cosmológica tenga algún efecto, daban como resultado valores de aproximadamente un tercio del valor esperado (en relación al valor obtenido a partir de las anisotropias del fondo cósmico de microondas) $\Omega = \Omega_M = \Omega_{LM} + \Omega_{CDM} \approx 0,3$, [6].
- El asumir un universo plano (pero con un valor despreciable para la constante cosmológica) en el modelo FRW lleva a concluir que la edad del universo es $t_0 = (2/3)t_H \approx 9 \times 10^9$ años (t_H es el tiempo de Hubble), pero hay estructuras en astrofísica con edades mayores que esta [6].
- Finalmente el método que resuelve de mejor forma las incongruencias relacionadas con los tres aspectos antes mencionados es considerar una constante cosmológica distinta de cero y por lo tanto $\Omega = \Omega_{LM} + \Omega_{CDM} + \Omega_\Lambda$ [5], [6].

Asumir que la constante cosmológica es mayor que cero (además de considerar la representación de fluido ideal para el vacío da origen a la forma más sencilla de energía oscura [1] que es el que asume el modelo estándar de la cosmología), con

$$w_X = w_\Lambda = -1. \tag{4.27}$$

Como se vio anteriormente la ecuación de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ origina un potencial newtoniano repulsivo, en un modelo cosmológico el efecto es el mismo, pero no solo este efecto repulsivo influye en el comportamiento del espacio-tiempo si no también los demás parámetros como la densidad de materia por ejemplo [5]. El efecto global

de este modelo sencillo de energía oscura es acelerar la expansión del universo, es decir, en el modelo FRW ya existe expansión (dado que se puede alcanzar un régimen en el cuál $a(t) > 0$) y el efecto simplemente es aumentar el ritmo de la misma [1], [9]. Se han propuesto otros modelos en donde w_X ya no es constante si no dinámica [5], [20].

El método más común para medir los parámetros de densidad se basa en utilizar la luminosidad de supernovas tipo Ia, aunque aquí no se trata ninguna técnica experimental ni de análisis de datos, se pueden consultar estos aspectos en [1], [5], [9]. Un tratamiento más avanzado de la energía oscura en su relación con cosmología inflacionaria se encuentra en [20] y sobre la física de la cosmología inflacionaria en [17].

Tabla I. **Valores de parámetros de componentes cosmológicos.**

Parámetro	Descripción	Valor (WMAP)
Ω_{LM}	Materia visible (bariónica)	$0,044 \pm 0,004$
Ω_{CDM}	Materia oscura fría	$0,23 \pm 0,04$
Ω_{Λ}	Energía oscura	$0,73 \pm 0,04$
Ω	Parámetro de densidad	$1,02 \pm 0,02$

Fuente: elaboración propia. Parámetros de cada componente y parámetro de densidad total (Ω). Valores calculados a partir de los datos de WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), [9].

Como se ve en la tabla I, las dos componentes dominantes del universo de acuerdo al modelo cosmológico estándar y a las mediciones realizadas, son la materia oscura y la energía oscura, de la primera aún no se conoce su estructura [6], y de la segunda no se sabe exactamente cuál es el mecanismo que la origina además de que se sabe da origen al problema de la constante cosmológica [5], [14]. De esta forma la cosmología, solamente desde el modelo Λ CDM , provee de grandes retos teóricos y

experimentales tanto en física fundamental como en astrofísica.

También es posible suponer que la constante cosmológica es dependiente del tiempo $\Lambda = \Lambda(t)$ [18], en este caso la ecuación de campo está dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda(t)g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

De las propiedades de la ecuación de campo se tiene que los primeros dos términos del lado izquierdo de la ecuación (tensor de Einstein) deben ser constantes covariantemente, lo que hace que en este caso se deba cumplir lo siguiente

$$8\pi \left[T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda(t)}{8\pi} g_{\mu\nu} \right]_{;\mu} = 0. \quad (4.29)$$

En primer lugar hay que hacer notar que el término $\Lambda(t)g_{\mu\nu}$ no puede ser constante covariantemente, lo cuál se demuestra fácilmente utilizando las propiedades de la derivada covariante, se tiene que

$$[\Lambda(t)g_{\mu\nu}]_{;\mu} = \Lambda_{;\mu}(t)g_{\mu\nu} + \Lambda(t)g_{\mu\nu;\mu}. \quad (4.30)$$

Debido a que el tensor métrico es constante covariantemente y dado que la derivada covariante de una función escalar es simplemente la derivada parcial de la misma se deduce que la última expresión es reducible a

$$\Lambda_{;\mu}(t)g_{\mu\nu} = \Lambda(t)_{,\mu}g_{\mu\nu} \neq 0. \quad (4.31)$$

Si bien en la ecuación de campo original se cumple que $T_{\mu\nu;\mu} = 0$, en este caso en el que se ha supuesto que $\Lambda = \Lambda(t)$ esto no es válido porque hace que la ecuación

de campo sea inconsistente con el principio general de la covariancia, de tal forma que la nueva condición para que se mantenga este principio es

$$T_{\mu\nu;\mu} - \frac{\Lambda_{,\mu}(t)}{8\pi} g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.32)$$

Este resultado es interesante porque implica que una constante cosmológica dependiente del tiempo es un modelo viable solo en la presencia de campos materiales, ya que si estos fueran nulos ($T_{\mu\nu} = 0$) no solo habría inconsistencia con las ecuaciones si no que también con el principio general de la covariancia.

Entonces las ecuaciones de Friedmann adoptan la siguiente forma [18]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda(t)}{3}, \quad (4.33)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda(t)}{3}. \quad (4.34)$$

Ahora, la pregunta es ¿qué tipo función es $\Lambda(t)$? actualmente esto se hace simplemente exigiendo que esta función adquiriera asintóticamente el valor actual de la constante cosmológica [18], [25]. Si bien esto es conveniente, no existe una justificación clara de porqué la función debe de adoptar una u otra forma durante épocas anteriores del universo. Es decir, el hecho de exigir este comportamiento asintótico garantiza un buen comportamiento en relación a los datos que se conocen pero no explica el posible origen de la evolución temporal de $\Lambda(t)$, ni cómo influyó en la formación de estructuras. Una constante cosmológica que crezca indefinidamente en el tiempo al igual que una que decrezca hasta tender a cero asintóticamente son incompatibles con las observaciones. En base a esto se proponen distintas formas

para $\Lambda(t)$, como por ejemplo [18], [25]

$$\Lambda = \alpha H^2, \quad (4.35)$$

$$\Lambda = n\Omega H^2 = \frac{8\pi G n}{3} \rho. \quad (4.36)$$

En donde $0 < \alpha < 3$ [18], n es un parámetro que se determina de las observaciones [25], y Ω es el parámetro de densidad. Lo primero que hay que notar en este tipo de soluciones es que implican una densidad de materia (tanto bariónica como oscura) que también depende del tiempo, esto se obtiene despejando ρ en (4.32)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right]. \quad (4.37)$$

Usando (4.35), (4.32) se convierte en

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{2}{3} \frac{4\pi n G}{3} \rho. \quad (4.38)$$

Ahora se asume la ecuación de estado $p = w\rho$ y se tiene que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3w\rho) + \frac{2}{3} \frac{4\pi n G}{3} \rho. \quad (4.39)$$

La última ecuación se transforma en

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(1 + 3w - \frac{2}{3}n \right) \rho. \quad (4.40)$$

En donde $-1 < w < 1$. Esta última ecuación es más fácil de resolver que la que se tenía originalmente. Para una solución en la cuál la densidad (ρ) decrece en términos del factor de escala a , basada en esta forma para $\Lambda(t)$, ver [25], en donde también se compara este modelo con algunos datos observacionales. Para ver cómo es posible explicar cómo la relación de este tipo de modelos (particularmente los que suponen una forma para $\Lambda = \alpha H^2$) con la expansión acelerada del universo ver [18]. Este tipo de modelos fenomenológicos solamente ayudan a entender cómo sería el comportamiento de un universo con Λ variable, pero en ningún caso explican su origen ni tampoco que pasaría si siguiera evolucionando en vez de tener un comportamiento asintótico (es decir asintóticamente respecto del tiempo).

De todas formas el modelo de energía oscura que mejor se adapta a las observaciones actuales sigue siendo la constante cosmológica [5], se necesita de mejores datos como para poder reafirmar la necesidad de otro modelo más complejo que explique los posibles cambios en las observaciones actuales, así que la mayoría de estos modelos pueden convertirse en ejercicios matemáticos y computacionales innecesarios hasta que no existan datos de calidad que los respalden.

CONCLUSIONES

1. El efecto que tiene el agregar una constante cosmológica positiva a las ecuaciones de campo de la relatividad general es generar gravedad repulsiva (en términos de un campo gravitacional repulsivo en el límite newtoniano).
2. Se puede interpretar el potencial newtoniano calculado φ_Λ como el potencial clásico de interacción del vacío consigo mismo, esto se debe sencillamente a que durante el proceso se eliminaron las contribuciones materiales.
3. La interpretación hallada para el potencial calculado no excluye la posibilidad de que se noten los efectos del mismo entre dos objetos distantes, por el simple hecho que al haber vacío entre ambos tenderán a separarse de acuerdo al comportamiento repulsivo encontrado, aunque tal situación es demasiado ideal.
4. Es posible explicar por qué los efectos de una constante cosmológica positiva ($\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$) se detectan únicamente a grandes escalas. Lo que se hace es considerar la forma del potencial clásico del vacío: es proporcional a dicha constante y cuadrático respecto de la distancia. De tal forma que la mayoría de experimentos para medir Λ o Ω_Λ son realizados con métodos astrofísicos.
5. Del problema de la constante cosmológica es claro que de existir la energía oscura aún no es posible explicar su origen cuántico (en términos de interacciones fundamentales) a diferencia de otros campos (como por ejemplo el electromagnético).

RECOMENDACIONES

1. Si se desea calcular el efecto repulsivo de $\Lambda > 0$ en un medio cosmológico de una forma más realista, es necesario resolver las ecuaciones de Friedmann para densidad y presión de materia distintas de cero.
2. Un estudio interesante sería obtener los mismos resultados pero con la metodología de la relatividad general como una teoría clásica de campo, desde utilizar los principios de acción adecuados hasta estudiar el tipo de Lagrangiano clásico que debería tener el vacío.
3. Otro enfoque que se le podría dar a trabajos similares es tomar una forma de energía oscura y estudiar sus aspectos termodinámicos, su correspondencia con datos experimentales o determinar si tiene un comportamiento asintótico similar al de una constante cosmológica.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALBRECHT, A y cols. *Report of the dark energy task force*. USA, 2006, 145 p. arXiv:astro-ph/0609591v1.
2. ANDERSON, J.L. *Principles of Relativity Physics*. Academic Press. USA, 1967, 502 p. ISBN: 9780120584505.
3. BAK, D. Cangemi, D. Jackiw, R. *Energy-momentum conservation in general relativity*. USA, 1993, 18 p. arXiv:hep-th/9310025v1.
4. CARROLL, S.M. *Lecture notes on general relativity*. USA, 1997, 320 p. arXiv:gr-qc/9712019.
5. ————. *The Cosmological Constant*. USA, 2000, 50 p. arXiv:0004075v2.
6. CHENG, T.P. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Oxford University Press. UK, 2005, 356 p. ISBN: 9780199573646.
7. DIRAC, P.A.M. *General theory of relativity*. Princenton University Press. USA, 1996, 100 p. ISBN: 9780691011462.
8. DODELSON, S. *Modern Cosmology*. Academic Press. USA, 2003, 459 p. ISBN: 9780122191411

9. FREEDMAN, W.L. ; TURNER, M.S. *Measuring and Understanding the Universe*. USA, 2003, 39 p. arXiv: astro-ph/0308418v1.
10. GRIFFITHS, J.B.; PODOLSKÝ, J. *Exact Space-Times in Einsteins's General Relativity*. Cambridge University Press. UK, 2009, 525 p. ISBN: 9781107406186
11. HAWKING, S.W. ; ELLIS, G.F.R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press. UK, 1973, 399 p. ISBN: 9780521099066.
12. LANDAU, L.D. *The classical theory of fields*. Butterworth Heinemann. USA, 1987, 428 p. ISBN: 9780750627689.
13. LICHNEROWICZ, A. *Elements of Tensor Calculus*. John Wiley and Sons. USA, 1962, 173 p. ISBN: 9780416431308.
14. MARTIN, J. *Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but you were afraid to ask)*. Francia, 2012, 89 p. arxiv: 1205.3365v1.
15. MISNER, C.W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. *Gravitation*. Freeman and company. USA, 1973, 1305 p. ISBN: 9780716703440.
16. MOSCHELLA, U. *The De Sitter and Anti-De Sitter Sightseeing Tour*. Séminaire Poincaré, Francia, 2005, 12 p. <http://www.bourbaphy.fr/moschella.pdf>.
17. MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press. UK, 2005, 421 p. ISBN: 9780521563987.

18. MUKHOPADHYAY, U.; RAY, S.; USMANI, A.A.; GHOSH, P.P. *Time variable Λ and the accelerating universe*. India, 2010, 10 p. arXiv: 0811.0782v3.
19. NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. IOP. USA, 2003, 596 p. ISBN: 9780750306065.
20. PEEBLES, P.J.E.; RATRA, B. *The cosmological constant and dark energy*. USA, 2002, 55 p. arXiv: astro-ph/0207347v2.
21. SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. UK, 2009, 412 p. ISBN: 9780521887052.
22. ————. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press. UK, 1980, 264 p. ISBN: 9780521298872.
23. SOLÀ, J. *Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas*. arXiv: 1306.1527v3. España, 2013, 86 p.
24. SZEKERES, P. *A course in modern mathematical physics*. Cambridge University Press. UK, 2004, 613 p. ISBN: 9780521829601.
25. VISHWAKARMA, R.G. *A study of the angular size-redshift relation for models in which Λ decays as the energy density*. India, 2001, 15 p. arXiv: gr-qc/9912105v2.
26. WALD, R.M. *General Relativity*. The University of Chicago Press. USA, 1984, 495 p. ISBN: 9780226870335.

27. WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons. USA, 1972, 685 p. ISBN: 9780471925675.

APÉNDICE A

Álgebra tensorial

Un tensor puede definirse como una función multilinear de M vectores y N uno-formas dentro de los números reales [22]. De una forma un tanto más formal, a partir de $r \geq 0$ espacios vectoriales y $s \geq 0$ espacios duales (o de uno-formas) se puede formar un espacio vectorial a partir de su producto tensorial, de la siguiente forma [13], [24]

$$V^{(r,s)} = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_1^* \otimes V_2^* \cdots \otimes V_s^*. \quad (\text{A.1})$$

A $V^{(r,s)}$ se le denomina espacio tensorial de tipo (r, s) , generalmente se considera que $V^{(0,0)} = \mathbb{R}$ (escalares), $V^{(1,0)} = V$ (espacio vectorial ordinario) y $V^{(0,1)} = V^*$ (espacio de uno-formas) [22]. Si los espacios vectoriales tienen bases $\{e_{i_r}\}$ y a su vez los espacios de uno-formas $\{\epsilon^{j_s}\}$, la base de $V^{(r,s)}$ está dada por [13], [24]

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \epsilon^{j_2} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_s}. \quad (\text{A.2})$$

De aquí en adelante se usará una notación que consiste en lo siguiente: si un índice aparece simultáneamente arriba y abajo en una operación tensorial significa que hay una suma implícita sobre todos los valores que adopta dicho índice, a esto se le denomina convenio de suma de Einstein, y es bastante útil para facilitar cálculos.

Un tensor $T \in V^{(r,s)}$ admite una expansión única de la siguiente forma [24]

$$T = T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \epsilon^{j_2} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_s}. \quad (\text{A.3})$$

En donde $T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ se conocen como las componentes del tensor T . En relatividad general son importantes las componentes de los tensores dado que la ecuación de campo está escrita en términos de componentes y no de bases (aunque las transformaciones de componentes respecto de cambios de base son de gran utilidad), de tal forma que de aquí en adelante se tratarán varias de las propiedades de dichas componentes. Un aspecto importante y que se hace evidente es que al ser $V^{(r,s)}$ un nuevo espacio vectorial que se genera a partir de otros (de tipo vectorial y dual), está implícito que si $T, Y \in V^{(r,s)}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$aT + bY \in V^{(r,s)}. \quad (\text{A.4})$$

Dicho de otra manera solo es posible sumar tensores que sean del mismo tipo, o lo que es lo mismo: solamente se pueden sumar tensores que pertenezcan al mismo espacio tensorial representados con la misma base. Respecto de las componentes son particularmente importantes las transformaciones respecto a los cambios de base, en general se considera que las componentes de un vector se transforman a través de la siguiente relación [24]

$$T_{j'_1 j'_2 \dots j'_s}^{i'_1 i'_2 \dots i'_r} = \Upsilon_{i'_1}^{i_1} \Upsilon_{i'_2}^{i_2} \dots \Upsilon_{i'_r}^{i_r} \Upsilon_{j'_1}^{j_1} \Upsilon_{j'_2}^{j_2} \dots \Upsilon_{j'_s}^{j_s} T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}. \quad (\text{A.5})$$

Para cambios de base $e_{i_r} \rightarrow e'_{i_r}$ y $\epsilon^{j_s} \rightarrow \epsilon'^{j_s}$. Los símbolos Υ son los elementos que transforman cada índice. Por ejemplo para un escalar, componente vectorial y

componente de uno-forma respectivamente las transformaciones están dadas por

$$s = s', \quad (\text{A.6})$$

$$x^{k'} = \Upsilon_k^{k'} x^k, \quad (\text{A.7})$$

$$w_{i'} = \Upsilon_{i'}^i w_i. \quad (\text{A.8})$$

Además de estas reglas de transformación existen otros dos procedimientos particularmente importantes para los cálculos que se realizan en relatividad general: subir y bajar índices. Dichos procedimientos pueden asociarse a un tipo bastante general de tensores [24], pero la idea principal es convertir un índice contravariante en uno covariante (bajar un índice), o bien convertir un índice covariante en uno contravariante (subir índices). El método usado para este tipo de conversiones consiste en utilizar el tensor métrico ($g_{\mu\nu}$) o el inverso del mismo ($g^{\mu\nu}$), por ejemplo si se consideran las componentes tensoriales $H_{\kappa\lambda\mu}$ y $M^{\kappa\lambda\mu}$, si se sube y baja el índice μ respectivamente se tiene las siguientes operaciones

$$H_{\kappa\lambda}^\nu = g^{\mu\nu} H_{\kappa\lambda\mu}, \quad (\text{A.9})$$

$$M_\nu^{\kappa\lambda} = g_{\mu\nu} M^{\kappa\lambda\mu}. \quad (\text{A.10})$$

En donde se está asumiendo el convenio de suma de Einstein: en un tensor un índice repetido arriba y abajo representa una suma sobre todos los posibles valores que pueda adoptar el mismo, además en este caso se han utilizado letras griegas para

los índices tal y como se hace en relatividad. Existen tensores en relatividad general que se forman (y adquieren gran importancia) a partir este tipo de procedimientos por ejemplo el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ está dado en términos del tensor de Riemann ($R_{\alpha\mu\beta\nu}$) por la relación $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$, en este caso se han bajado los índices α y β porque así se obtienen ciertas propiedades de simetría [6], necesarias en el desarrollo matemático.

APÉNDICE B

Conservación del momentum-energía en RG

En relatividad general se considera que la distribución de momentum-energía puede representarse con un tensor simétrico generalmente denotado por $T_{\mu\nu}$ [12], [21], el cuál se calcula a partir del Lagrangiano (específicamente es necesario conocer la densidad de Lagrangiano). La forma usual de representar la conservación del momentum energía en relatividad general es a través de la derivada covariante del tensor de momentum-energía,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu;\mu} = 0. \quad (\text{B.1})$$

En esta formulación se interpreta la conservación en términos locales, se conserva la energía para un evento particular de la variedad (coordenadas espaciales y temporal con valores fijos) [21], lo cuál puede ser ampliamente discutido, [26]. Esto no significa que el tensor de momentum-energía no evolucione en el tiempo, al contrario este tensor debe evolucionar temporalmente por definición [6], [21]. En realidad la última ecuación simplemente indica que el tensor de momentum-energía es constante covariantemente debido a las propiedades de la ecuación de campo, [15]. Aunque en relatividad general no existe una noción generalizada de conservación de la energía ni mucho menos definiciones concretas para hallar formas integrales de conservación como en otras teorías [3].

Dado que es un tema bastante amplio, solamente se discutirá un aspecto particular de la solución FRW (Friedmann-Robertson-Walker) para mostrar de una forma sencilla que al introducir la idea de espacio-tiempo dinámico (a través de un tensor

métrico que evoluciona), las nociones comunes de conservación de la energía no se adaptan fácilmente en este tipo de escenarios. Para empezar consideré la radiación cósmica de fondo (CMBR: *Cosmic Microwave Background Radiation*), un fotón individual tiene una energía E dada por

$$E = h\nu = hc \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{B.2})$$

Donde h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y λ la longitud de onda. En un escenario cosmológico las distancias evolucionan proporcionalmente al factor de escala $a(t)$ [8]. Durante una época de expansión se tiene que $a(t) > 0$ (además $a(t_2) > a(t_1)$ para $t_2 > t_1$), $\lambda \propto a(t)$ y además

$$E \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (\text{B.3})$$

De tal forma que al entrar en una fase expansiva dentro del modelo FRW, la energía de un fotón decae en el tiempo, si se consideran todos los fotones del CMB, la energía total tampoco se mantiene. Entonces si se tiene una métrica que evoluciona, a partir de $a(t)$:

- Varían observables dependientes de dicha métrica, λ en este caso.
- Si además estos observables están relacionados con la energía, esto implica que se pierde la noción de conservación de energía dado que la energía del fotón depende del tiempo. Esto puede ocurrir debido a las propiedades del modelo cosmológico en cuestión y es solamente ilustrativo al ser un escenario demasiado idealizado.

Entonces, ejemplificado de esta forma, es claro que si el espacio-tiempo no es estático sino que evoluciona (a través de un tensor métrico que evoluciona), las

nociones comunes que se tienen de conservación de la energía desde otras teorías clásicas carecen de significado, ya que algunos de los observables asociados a la energía del sistema evolucionan respecto de la métrica. Para una discusión sobre el problema de la conservación de la energía en relatividad general y la utilización del método de Noether para encontrar una regla de conservación adecuada, véase por ejemplo [3].

APÉNDICE C

Agregando la constante cosmológica a las ecuaciones de campo

La ecuación de campo para el vacío en límite newtoniano origina un potencial gravitacional (ver ecuación 4.10): $\varphi_\Lambda = -(1/6)\Lambda r^2$, lo cual implica que el potencial gravitacional asociado es repulsivo (ecuación 4.12): $\mathbf{g}_\Lambda = (+1/3)\Lambda r \hat{r}$. Al realizar el cálculo del límite newtoniano se está asumiendo que las contribuciones temporales se pueden eliminar (límite estático) al momento de calcular el potencial. Esto último es inconveniente en un escenario cosmológico porque lo que se busca entender en ese caso es comprender la evolución o el comportamiento en el tiempo de ciertos parámetros cuyos efectos sean observables. En este sentido, el cálculo realizado es únicamente ilustrativo y su utilidad radica únicamente en que muestra la viabilidad de una forma de gravedad repulsiva (newtoniana).

Aquí lo que se buscará es mostrar que considerando el modelo cosmológico FRW (Friedmann-Robertson-Walker) y suponiendo el caso del vacío (el cuál es ideal) puede concluirse que el vacío provoca una expansión permanente. De la ecuación 2.26 puede proponerse un factor de escala de la siguiente forma

$$a(t) = A \left(e^{+\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \right). \quad (\text{C.1})$$

Si se hace una expansión de Taylor para $a(t)$ en la última ecuación se tiene que

$$a(t) = A \left(2 + \frac{1}{3}\Lambda t^2 + \frac{1}{108}\Lambda^2 t^4 + \dots \right). \quad (\text{C.2})$$

La última ecuación puede reescribirse como

$$a(t) = B \left(1 + \frac{1}{6} \Lambda t^2 + \frac{1}{216} \Lambda^2 t^4 + \dots \right). \quad (\text{C.3})$$

En donde $B = 2A$. Del último resultado se concluye que $a(t) > 0$ para $t \geq 0$ siempre y cuando $A > 0$. Aunque no se tenga una interpretación precisa de A ni método para calcularla, es evidente que no puede ser negativa porque esto implicaría obtener distancias negativas en los cálculos. Entonces al usar el método del límite newtoniano y luego al basarse en el modelo FRW, asociándole en ambos casos densidad de energía al vacío, se determina que la repulsión gravitacional aparente (entre observadores) es el efecto de la expansión permanente de este espacio-tiempo.