



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Civil

**DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE  
CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS**

**Mauricio Vargas Estrada**

Asesorado por el Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila

Guatemala, mayo de 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE  
CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**MAURICIO VARGAS ESTRADA**

ASESORADO POR EL ING MARIO RODOLFO CORZO ÁVILA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

**INGENIERO CIVIL**

GUATEMALA, MAYO DE 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL I	Ing. Angel Roberto Sic García
VOCAL II	Ing. Pablo Christian de León Rodríguez
VOCAL III	Ing. José Milton de León Bran
VOCAL IV	Br. Oscar Humberto Galicia Nuñez
VOCAL V	Br. Carlos Enrique Gómez Donis
SECRETARIA	Inga. Lesbia Magalí Herrera López

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

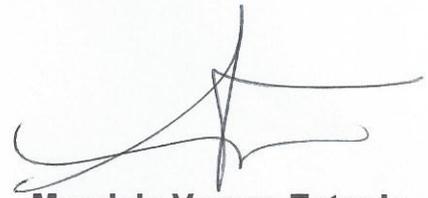
DECANO	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
EXAMINADOR	Ing. Crecencio Benjamín Cifuentes Velásquez
EXAMINADORA	Inga. Karla Giovanna Pérez Loarca
EXAMINADOR	Ing. Luis Estuardo Saravia Ramírez
SECRETARIA	Inga. Lesbia Magalí Herrera López

## HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS**

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, con fecha 9 de marzo de 2016.



**Mauricio Vargas Estrada**

Guatemala 2 de abril del 2018

Ingeniero  
José Gabriel Ordoñez Morales  
Coordinador Área de Materiales de Construcción  
Escuela de Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
Presente

Estimado Ingeniero:

Cumpliendo con lo resuelto con la Dirección de la Escuela de Ingeniería Civil, se precedió a la asesoría y revisión del trabajo de graduación: **DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS**, presentado por el estudiante Mauricio Vargas Estrada, quién se identifica con carné 2012 13213 y CUI 2267 92935 0101.

Considero que el trabajo de graduación se ha desarrollado satisfactoriamente y cumple con los objetivos que motivaron la selección de dicho tema, por lo que hago de su conocimiento que apruebo el trabajo realizado. Sin otro particular, atentamente

  
Mario Rodolfo Corzo A.  
INGENIERO CIVIL  
Colegiado No. 2089

---

Mario Rodolfo Corzo Ávila  
Ingeniero Civil Colegiado No. 2089



**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
FACULTAD DE INGENIERÍA

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

**ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**



Guatemala,  
23 de abril de 2018

Ingeniero  
Hugo Leonel Montenegro Franco  
Director Escuela Ingeniería Civil  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de San Carlos

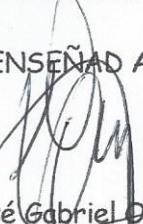
Estimado Ingeniero Montenegro.

Le informo que he revisado el trabajo de graduación **DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS** desarrollado por el estudiante de Ingeniería Civil Mauricio Vargas Estrada quien contó con la asesoría del Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila.

Considero este trabajo bien desarrollado y representa un aporte para la comunidad del área y habiendo cumplido con los objetivos del referido trabajo doy mi aprobación al mismo solicitando darle el trámite respectivo.

Atentamente,

ID Y ENSEÑAD A TODOS

  
Ing. Civil José Gabriel Ordóñez Morales  
Coordinador del Área de Materiales y  
Construcciones Civiles



FACULTAD DE INGENIERIA  
AREA DE MATERIALES Y  
CONSTRUCCIONES CIVILES  
**USAC**

/mrrm.



*Mas de 137 años de Trabajo y Mejora Continua*



**USAC**  
TRICENTENARIA  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
FACULTAD DE INGENIERÍA

<http://civil.ingenieria.usac.edu.gt>

**ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**



El director de la Escuela de Ingeniería Civil, después de conocer el dictamen del Asesor Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila y Coordinador del Departamento de Materiales y Construcciones Civiles Ing. José Gabriel Ordóñez Morales, al trabajo de graduación del estudiante Mauricio Vargas Estrada DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS da por este medio su aprobación a dicho trabajo.

  
Ing. Hugo Leonel Montenegro Franco



Guatemala, mayo 2018

/mmm.

*Mas de 137 años de Trabajo y Mejora Continua*



Universidad de San Carlos  
de Guatemala

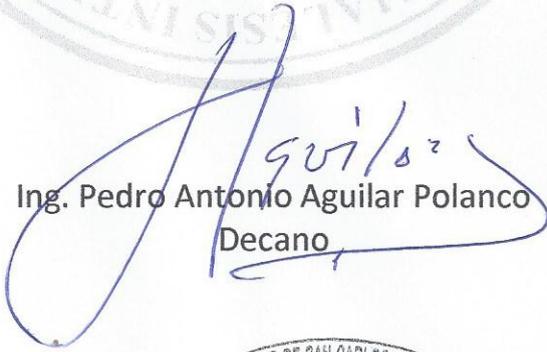


Facultad de Ingeniería  
Decanato

DTG. 189.2018

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ingeniería Civil, al Trabajo de Graduación titulado: **DETERMINACIÓN DE LA ZONA ELÁSTICA Y ELASTOPLÁSTICA DE POSTES DE CONCRETO PRESFORZADO CENTRIFUGADO, MEDIANTE LA CURVA DE HISTÉRESIS**, presentado por el estudiante universitario: **Mauricio Vargas Estrada**, y después de haber culminado las revisiones previas bajo la responsabilidad de las instancias correspondientes, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE:

  
Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco  
Decano

Guatemala, mayo de 2018

/gdech



## **ACTO QUE DEDICO A:**

**Mi madre**

María Ernestina Estrada Martínez.

**Mis tíos**

Rina Verónica Estrada Martínez y Alejandro  
Estrada Martínez.

## **AGRADECIMIENTOS A:**

**Universidad de San Carlos de Guatemala** Por proveerme la oportunidad de profesionalizarme.

**Facultad de Ingeniería** Por formarme técnicamente como ingeniero.

**Mis amigos** Ana Lucía Martínez Arriola, Francisco Javier Estrada, Elfego Bernabé de León y Silvio Urizar.

**Mi asesor** Ing. Mario Rodolfo Corzo Ávila.



	1.5.5.1.	Ley de Hooke y módulo de elasticidad .....	24
	1.5.5.2.	Módulo volumétrico y de rigidez .....	25
	1.5.5.3.	Módulo de cizalladura .....	26
	1.5.5.4.	Potencial armónico .....	27
	1.5.5.5.	Energía de deformación .....	29
1.5.6.		Resistencia de materiales .....	30
	1.5.6.1.	Tipos de esfuerzos .....	30
	1.5.6.2.	Esfuerzos de compresión y tensión producidos por carga axial y flexión .....	33
	1.5.6.3.	Esfuerzos de corte producidos por flexión y torsión .....	38
1.5.7.		Deformación unitaria .....	45
1.5.8.		Diagrama de esfuerzo - deformación unitaria.....	47
	1.5.8.1.	Zona elástica .....	50
		1.5.8.1.1. Módulo de Young .....	50
		1.5.8.1.2. Resiliencia.....	51
	1.5.8.2.	Zona elastoplástica .....	52
	1.5.8.3.	Zona plástica .....	53
		1.5.8.3.1. Tenacidad .....	53
	1.5.8.4.	Endurecimiento plástico .....	54
1.6.		Histéresis .....	55
	1.6.1.	Materiales y elementos estructurales elásticos e inelásticos.....	58
	1.6.2.	Concreto estructural .....	59
	1.6.3.	Modelos matemáticos de histéresis .....	61
		1.6.3.1. Modelo elastoplástico .....	62
	1.6.4.	Modelo de Ramberg-Osgood .....	64
		1.6.4.1. Modelo de degradación de rigidez .....	66

1.6.5.	Ductilidad .....	68
1.6.6.	Aplicación a la dinámica de estructuras.....	69
2.	MARCO METODOLÓGICO .....	71
2.1.	Ensayos de postes a flexión .....	71
2.1.1.	Normas relacionadas.....	71
2.1.1.1.	Ensayo de los postes.....	73
2.1.2.	Método de Cantiléver.....	74
3.	PROCESAMIENTO DE DATOS.....	77
3.1.	Matemáticas para el modelo de Ramberg-Osgood .....	77
3.1.1.	Procedimiento para la construcción de un modelo probabilístico.....	78
3.1.1.1.	Variables aleatorias .....	78
3.1.1.2.	Distribuciones de probabilidad importantes.....	82
3.1.1.3.	Estimación puntual .....	84
3.1.2.	Regresión lineal.....	86
3.1.2.1.	Especificación del modelo general de regresión lineal .....	88
3.1.2.2.	Supuestos del modelo de regresión lineal .....	90
3.1.2.2.1.	Supuestos en la componente determinística .....	90
3.1.2.2.2.	Supuestos Gauss Markov.....	91
3.1.2.3.	Propiedades de la variable dependiente.....	93

3.1.2.3.1.	Esperanza condicionada de la variable dependiente.....	93
3.1.2.3.2.	Varianza y covarianza de la variable dependiente .....	95
3.1.2.4.	Estimación del modelo general de regresión lineal (MGRL) .....	96
3.1.2.4.1.	Propiedades algebraicas de las pendientes $\beta^{\wedge}$ .....	98
3.1.2.4.2.	Momentos poblacionales de las pendientes $\beta^{\wedge}$ .....	99
3.1.2.4.3.	Teorema de Gauss Markov y eficiencia de los estimadores $\beta^{\wedge}$ .....	102
3.1.2.5.	Estimación de la varianza de los errores $\sigma^2$ .....	103
3.1.2.6.	Bondad de ajuste o coeficiente de determinación.....	104
3.1.3.	Transformación a modelo lineal .....	107
3.1.4.	Determinación de la zona elástica y elastoplástica.....	108
3.1.4.1.	Procedimiento de cálculo .....	109
3.1.5.	Determinación de energía almacenada.....	112
3.1.5.1.	Determinación de resiliencia .....	113
3.1.5.2.	Determinación de tenacidad.....	113
3.1.6.	Determinación de la energía total disipada .....	114

4.	MUESTRA DE RESULTADOS.....	117
4.1.	Poste de concreto pretensado centrifugado .....	118
4.1.1.	Datos del ensayo .....	121
4.1.2.	Estimación del modelo para el conjunto de datos. ....	122
4.1.2.1.	Forma explícita del modelo.....	124
4.1.3.	Determinación del límite elástico .....	125
4.1.4.	Cálculo de resiliencia y tenacidad.....	127
4.1.5.	Cálculo de la energía total disipada.....	128
4.2.	Poste metálico de misma longitud .....	131
4.2.1.	Características del poste .....	131
4.2.2.	Resumen de estimación del modelo.....	133
4.2.2.1.	Forma explícita del modelo.....	134
4.2.1.	Resumen de magnitudes calculadas .....	135
5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	137
5.1.	Poste de concreto pretensado centrifugado .....	137
5.2.	Poste metálico de misma longitud .....	140
5.3.	Comparación entre poste de concreto presforzado y poste metálico .....	143
	CONCLUSIONES .....	145
	RECOMENDACIONES.....	149
	BIBLIOGRAFÍA.....	151
	APÉNDICES .....	155



## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

### FIGURAS

1.	Sistema, alrededor y frontera .....	3
2.	Definición gráfica de trabajo .....	15
3.	Diagrama de esfuerzo a corte .....	27
4.	Tensor de esfuerzos.....	32
5.	Carga axial sobre elemento .....	34
6.	Esfuerzo axial.....	35
7.	Deflexión en sección de viga.....	36
8.	Esfuerzos de corte en un elemento infinitesimal .....	39
9.	Esfuerzo cortante a lo largo de un plano.....	40
10.	Efecto de torsión sobre cilindro empotrado .....	43
11.	Sección de cilindro empotrado sometido a torsión.....	44
12.	Diagrama de esfuerzo – deformación unitaria.....	48
13.	Diagrama esfuerzo deformación para postes.....	49
14.	Resiliencia.....	52
15.	Tenacidad .....	54
16.	Curvas de histéresis para proceso de carga y descarga de un poste ..	56
17.	Hoja de histéresis.....	57
18.	Comportamiento de materiales elásticos y elastoplásticos .....	58
19.	Comportamiento del concreto bajo cargas cíclicas .....	60
20.	Modelo elastoplástico.....	63
21.	Energía acumulada, disipada y transformada en el modelo elastoplástico .....	64
22.	Modelo de Ramberg-Osgood.....	65

23.	Modelo de degradación de rigidez .....	67
24.	Planta: ensayo de postes por el método de Cantiléver.....	75
25.	Estimadores insesgados .....	85
26.	Modelo probabilístico lineal.....	87
27.	Método de mínimos cuadrados.....	96
28.	Zona elástica y plástica en diagrama de esfuerzo deformación unitaria	109
29.	Método de estimación de límite elástico .....	111
30.	Curva de histéresis, energía disipada y transformada.....	115
31.	Perfil de poste de concreto presforzado en posición de ensayo .....	118
32.	Elevación de poste de concreto presforzado en posición de ensayo .	119
33.	Planta de poste de concreto presforzado en posición de ensayo .....	119
34.	Isométrico de poste de concreto presforzado en posición de ensayo.	120
35.	Armado de poste de concreto presforzado .....	120
36.	Modelo estimado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste metálico.....	135
37.	Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste de concreto presforzado .....	139
38.	Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste metálico.....	141
39.	Sistema de aplicación de carga para ensayo de poste de concreto presforzado .....	155
40.	Empotramiento para ensayo de poste de concreto presforzado.....	156
41.	Deflexión producida por ensayo en poste de concreto presforzado ...	157
42.	Sistema de ensayo para poste metálico .....	158
43.	Empotramiento en poste metálico.....	158
44.	Deflexión producida por ensayo en poste metálico .....	159

## TABLAS

I.	Medidas de poste de concreto presforzado .....	118
II.	Datos de ensayo de poste de concreto presforzado .....	121
III.	Residuos del modelo estimado para poste de concreto presforzado .	124
IV.	Coeficientes del modelo estimado para poste de concreto presforzado .....	124
V.	Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste de concreto presforzado .....	130
VI.	Resumen de cálculos para poste de concreto presforzado.....	131
VII.	Medidas poste metálico.....	131
VIII.	Datos de ensayo de poste metálico .....	132
IX.	Residuos del modelo estimado para poste metálico .....	133
X.	Coeficientes del modelo estimado para poste metálico .....	133
XI.	Resumen de cálculos para poste metálico.....	135
XII.	Resumen de cálculos para poste de concreto presforzado.....	140
XIII.	Resumen de cálculos para poste metálico.....	142



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\phi$	Ángulo de fase
$A$	Área de la sección transversal
$Q$	Calor
$d_i S$	Cambio de entropía dentro del sistema
$d_e S$	Cambio de entropía en el medio
$dS$	Cambio de entropía
$ \epsilon_g $	Cardinal de conjunto $\epsilon_g$
$P$	Carga puntual sobre una superficie
$k$	Constante elástica o rigidez
$\epsilon$	Deformación unitaria
$\rho$	Densidad
$\Delta$	Diferencia entre el estado final e inicial
$E_{def}$	Energía de deformación
$E_{dis}$	Energía disipada
$\mathcal{E}$	Energía interna por unidad de masa
$E_{irrev}$	Energía irreversible
$E_{rev}$	Energía reversible
$H$	Entalpía
$\mathcal{P}$	Entropía por unidad de masa
$\tau_{xy}$	Esfuerzo de corte
$\sigma$	Esfuerzo o desviación estándar (depende del contexto)

$\overset{v}{T}$	Esfuerzo respecto a un plano
$\Omega$	Espacio muestral
$\omega$	Frecuencia angular
$\vec{f}$	Fuerzas internas
$J$	Jules, medida de energía en el sistema internacional
$\epsilon$	Límite elástico
$m$	Masa
$I$	Matriz identidad
$\mu$	Media poblacional
$G$	Módulo de corte o cizalla
$\nu$	Módulo de Poisson
$E$	Módulo de Young
$M$	Momento o torque
$\times$	Producto vectorial
$E_{res}$	Resiliencia
'	Símbolo que denota la transposición de una matriz
$\sim$	Símbolo que denota que una variable se distribuye con cierta función de probabilidad
$\forall$	Símbolo que significa para todo
	Símbolo que significa tal que
$T$	Temperatura
$E_{ten}$	Tenacidad
$D^{ijkl}$	Tensor de elasticidad
$VE$	Variación explicada
$VnoE$	Variación no explicada
$\vec{P}$	Vector de impulso
$\beta$	Vector de parámetros
$\nabla$	Vector gradiente

$\vec{v}$

Velocidad



## GLOSARIO

<b>Calor</b>	Energía en tránsito que se reconoce solo cuando se cruza la frontera de un sistema termodinámico.
<b>Concreto presforzado</b>	Tecnología de construcción de elementos estructurales de hormigón sometidos intencionalmente a esfuerzos de compresión previos a su puesta en servicio.
<b>Concreto centrifugado</b>	Métodos de colado del concreto en el que se utiliza la acción de la fuerza centrífuga sobre una fundición líquida para que esta se deposite de una forma uniforme y adecuada al estudio previo del molde.
<b>Covarianza</b>	Valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias.
<b>Cuerpo elástico</b>	Es aquel cuerpo que luego de aplicarle una fuerza, no presenta deformaciones permanentes.
<b>Deflexión</b>	Deformación que sufre un elemento por el efecto de las flexiones internas.
<b>Deformación unitaria</b>	Cambio de dimensión por unidad de longitud.

<b>Eficiencia térmica</b>	Relación entre la energía que se desea obtener, el trabajo realizado y la energía consumida en su funcionamiento.
<b>Elemento (estadístico)</b>	Objeto del que se puede obtener cierta información, ya sea por sus características o por su comportamiento.
<b>Energía</b>	Capacidad que tiene la materia de producir trabajo en forma de movimiento, luz, calor, entre otros.
<b>Energía cinética</b>	Energía asociada a los cuerpos que se encuentran en movimiento, depende de la masa y la velocidad del cuerpo.
<b>Energía elástica</b>	Energía almacenada que resulta de aplicar una fuerza para deformar un objeto elástico.
<b>Energía gravitatoria</b>	También llamada energía potencial, que depende de la altura asociada con la fuerza gravitatoria. Esta dependerá de la altura relativa de un objeto a algún punto de referencia, la masa y la fuerza de gravedad.
<b>Entalpía</b>	Es una magnitud termodinámica cuya variación expresa una medida de la cantidad de energía absorbida o cedida por un sistema termodinámico, es decir, la cantidad de energía que un sistema intercambia con su entorno.

<b>Entropía</b>	Magnitud termodinámica que indica el grado de desorden molecular de un sistema.
<b>Equilibrio térmico</b>	Estado en el cual se igualan las temperaturas de dos cuerpos, que en sus condiciones iniciales presentan diferentes temperaturas.
<b>Esfuerzo</b>	Fuerza que actúa sobre el área unitaria en la que se aplica; existen esfuerzos de tensión, flexión, compresión y cortantes.
<b>Esfuerzo axial</b>	Resultante de las tensiones perpendiculares (normales) a la sección transversal de un prisma mecánico.
<b>Esfuerzo cortante</b>	Resultante de las tensiones paralelas a la sección transversal de un prisma mecánico.
<b>Espuria</b>	Relación matemática en la cual dos acontecimientos no tienen conexión lógica, aunque se puede implicar que la tienen debido a un tercer factor no considerado aún (llamado factor de confusión).
<b>Estimador</b>	Es una función de variables aleatoria de datos observables para inferir sobre los parámetros de acuerdo a una muestra.

<b>Función de estado</b>	Magnitud física macroscópica que caracteriza el estado de un sistema en equilibrio y que no depende de la forma en que el sistema llegó a dicho estado.
<b>Hessiano</b>	También conocido como matriz hessiana. Es la matriz formada por todas las derivadas parciales de segundo orden de una función.
<b>Histéresis</b>	Tendencia de un material a conservar una de sus propiedades, en ausencia del estímulo que la ha generado.
<b>Módulo de Young</b>	También llamado módulo de elasticidad. Es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza. Indica la relación entre la tensión y la deformación en un cuerpo sólido.
<b>Módulo volumétrico</b>	También llamado módulo de compresibilidad de un material. Mide su resistencia a la compresión uniforme, indica el aumento de presión requerido para causar una disminución unitaria de volumen dado.
<b>Muestra</b>	Conjunto de elementos tomados bajo cierto criterio de una población.
<b>Parámetro</b>	Valor que describe en términos estadísticos las características de una población.

<b>Población</b>	Conjunto bien definido de elementos de los cuales se desea hacer alguna inferencia.
<b>Proceso adiabático</b>	Es aquel sistema termodinámico que no intercambia calor con su entorno.
<b>Proceso estocástico</b>	Proceso cuyo comportamiento es no determinístico, cuya evolución es aleatoria y que basa su resultado en probabilidades.
<b>Proceso isentrópico</b>	Es un proceso adiabático reversible sin transferencia de calor.
<b>Rigidez</b>	Medida cualitativa de resistencia a las deformaciones elásticas producidas por un material, que contempla la capacidad de un elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones.
<b>Rotor</b>	Es un operador vectorial sobre campos vectoriales definidos en un abierto de $R^3$ que muestra la tendencia de un campo vectorial a introducir rotación alrededor de un punto.
<b>Sesgo</b>	Diferencia entre su esperanza matemática y el valor numérico del parámetro que estima.
<b>Temperatura</b>	Es una magnitud escalar relacionada con la energía interna de un sistema termodinámico.

**Trabajo**

Es una magnitud física escalar que se expresa en unidades de energía. Una fuerza realiza trabajo cuando altera el estado de movimiento de un cuerpo. En termodinámica, el trabajo está asociado a cambios de volumen que experimenta un sistema.

**Variable de estado**

Son aquellas magnitudes que se emplean para describir el estado de un sistema termodinámico como volumen, temperatura, cantidad de materia, etc.

**Varianza**

La varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media.

## RESUMEN

En el presente trabajo de graduación se propone un modelo probabilístico para estimar la curva de histéresis de un poste de concreto presforzado. Dicho modelo se empleará para la estimación del límite elástico, la resiliencia, la tenacidad, la energía disipada y deformación permanente luego de un ciclo de cargas.

Posterior a la estimación del modelo, se comparan los resultados contra la estimación del mismo modelo para un poste metálico.

La utilización de un modelo probabilístico se fundamenta en el hecho de que el comportamiento de los postes no depende únicamente de sus diseños, sino también de otros factores (transporte o métodos constructivos) no medidos que obedecen a un orden, es decir, tienen una distribución de probabilidad. La variabilidad de los factores no medidos otorga variabilidad al comportamiento de los postes, haciendo que exista una relación no determinista entre las variables de diseño y el comportamiento de los postes.

Finalmente, se concluye que el modelo propuesto es capaz de explicar aproximadamente un 70 % de la variabilidad total las muestras, lo que implica, bajo el cumplimiento de los supuestos que constituye un modelo probabilístico, que es un buen ajuste para el comportamiento que se desea explicar.



## **OBJETIVOS**

### **General**

Determinar la zona elástica y elastoplástica en postes de concreto presforzado centrifugado, mediante la curva de histéresis.

### **Específicos**

1. Proponer el método de estudio de la curva de histéresis como un estándar para el análisis del comportamiento de los materiales y sistemas estructurales.
2. Formular un modelo matemático que se ajuste a los datos de esfuerzo-deformación en los ciclos de carga y descarga.
3. Por medio de la curva de histéresis, inferir la capacidad de los postes para disipar la energía y determinar si los postes se comportan como un sistema elastoplástico o como un sistema de disminución de elasticidad.
4. Calcular la resiliencia por medio del modelo matemático.
5. Calcular la cantidad de energía almacenada tanto en el rango elástico como en el rango elastoplástico.

6. Determinar la cantidad de energía disipada por los postes en el proceso de carga y descarga, cuando la carga ha sobrepasado el límite elástico y se procede a descargar en el rango inelástico.
  
7. Por medio de la curva de histéresis y el modelo matemático, relacionar la deformación en la zona elastoplástica y la deformación remanente al descargar.

## INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de graduación se define un modelo matemático para la curva de histéresis, que se ajuste a los datos de esfuerzo-deformación obtenidos al ensayar un poste de concreto reforzado centrifugado por el método de Cantiléver, para inferir: la zona elastoplástica y resiliencia; la capacidad de los postes para disipar energía; determinar si los postes se comportan como un sistema elastoplástico o de elasticidad decreciente; cuantificar la cantidad de energía almacenada en el proceso de carga, aun si sobrepasa el límite elástico; cuantificar la cantidad de energía disipada en el ciclo de carga-descarga; comparar la deformación remanente al concluir el ciclo de carga-descarga con la deformación adquirida en el rango elastoplástico. Del mismo modo, se ajusta un modelo a los datos de ensayo de un poste metálico para comparar su comportamiento contra el comportamiento obtenido del poste de concreto presforzado.

El trabajo de graduación se fundamentará en: el teorema de la conservación de la energía, debido a que a lo largo del ensayo los postes almacenan energía potencial para luego disipar un porcentaje de la misma por procesos no conservativos y el resto transformarlo en energía cinética.

La teoría de elasticidad y las leyes de la termodinámica, debido a que los procesos no conservativos de disipación de energía tienen su origen en la entalpía generada al inducir trabajo en el poste, consecuencia de la elasticidad del mismo.

La teoría de las vibraciones mecánicas, fundamentos de la matemática y estadísticos para la estimación de un modelo probabilístico que provea el mejor ajuste a los datos.

# 1. MARCO TEÓRICO

## 1.1. Antecedentes

La histéresis como concepto nace dentro de la física en el campo del electromagnetismo. En física se encuentra, por ejemplo, histéresis magnética si al magnetizar un ferromagneto este mantiene la señal magnética tras retirar el campo magnético que la ha inducido.

Posteriormente, se extrapoló el concepto, definiéndolo como la permanencia de un efecto en ausencia de la causa. En ingeniería mecánica y civil, el concepto cobró relevancia dado que los elementos estructurales o materiales tienden a permanecer deformados luego de un ciclo de carga. Esto se asocia a la capacidad de absorción de energía.

El primer modelo que trata de replicar este comportamiento en los materiales es el elastoplástico. Este modelo presupone comportamiento lineal sin definir zonas elastoplásticas o de transición.

En 1943, W. Ramberg y R. Osgood, propusieron un modelo no lineal que ajustaba el comportamiento de los materiales ponderando tanto su deformación elástica como plástica. La parte elástica presupone un comportamiento lineal, mientras que el comportamiento plástico crece exponencialmente a partir del punto de fluencia.

En 1963, una tesis doctoral, publicada por el científico P. Jennings, modela la respuesta de estructuras a cargas de sismos, tomando en cuenta sus

ciclos. Este modelo generaliza el de Ramberg-Osgood en el sentido que ciertos parámetros determinan el grado de ductilidad del sistema estructural, casos especiales representan el modelo elastoplástico y del Ramberg-Osgood.

En la actualidad, la respuesta de materiales se modela computacionalmente, basándose en el principio de ponderar la respuesta elástica como plástica y utilizando una forma funcional no lineal.

## **1.2. Leyes de la termodinámica**

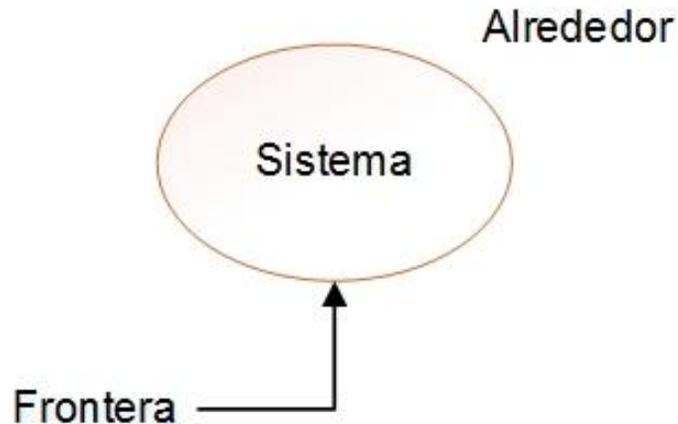
Para el propósito del presente trabajo de graduación, a continuación, se presenta un breve resumen de la teoría clásica de la termodinámica. Vamos a llamar a una colección de materia en estudio como sistema.

“Los sistemas cerrados son aquellos donde la materia (energía masiva) no es intercambiada con su alrededor, no obstante, la energía en forma de calor y trabajo, sí. Esta clase de sistemas son los únicos considerados en esta sección. Ocasionalmente, una restricción adicional es hecha donde las interacciones entre el sistema y su alrededor ocurren; se dice entonces que el sistema es aislado”<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> CENGEL, Yunus; BOLES, Michael. *Termodinámica*. p. 85.

Figura 1. **Sistema, alrededor y frontera**



Fuente: elaboración propia, empleando Visio 2013.

Cuando se posee toda la información requerida para una completa caracterización de un sistema, se dice que el estado del sistema es conocido.

Para condiciones de estudio se fijan fronteras y parámetros que pueden determinar y considerar el sistema como conocido; como analogía a la física newtoniana que ha tenido aplicaciones prácticas y confiables.

Por ejemplo, para un cierto cuerpo elástico homogéneo en reposo, la completa descripción de su estado termodinámico requiere una especificación completa de su cantidad de materia (masa); la cantidad de cada sustancia química contenida; su geometría en estado natural y no esforzado; su desviación del estado natural o campo de tensión; y de algunas propiedades físicas que dicen si el cuerpo está caliente o frío, una cantidad independiente extra que fije el grado de calor o frío. Estas cantidades son llamadas variables de estado. Si una cierta variable de estado puede ser expresada como una

función de otra variable únicamente, se dice que dicha relación es una ecuación de estado y la variable descrita es llamada función de estado. La selección de un particular grupo de variables de estado independientes es importante en cada problema, pero la selección se considera arbitraria.

“Si, para un sistema dado, los valores de las variables de estado son independientes del tiempo, se dice que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico. Si el estado de las variables varía con el tiempo, se dice que el sistema se encuentra en proceso. El número de variables de estado requeridas para describir un proceso puede ser más largo que el requerido para describir el sistema en equilibrio termodinámico. Por ejemplo, en la descripción del flujo de un fluido se necesita saber la viscosidad”<sup>2</sup>.

El límite o frontera entre dos sistemas se dice que es aislado si tiene las siguientes propiedades: si algún sistema en un completo equilibrio interno es completamente rodeado por un aislante, entonces ningún cambio se puede producir en el sistema por un agente externo que produzca movimiento en el aislante o por fuerzas de largo alcance como la gravedad. Un sistema rodeado por un aislante se dice que está térmicamente aislado, y todo proceso que tenga lugar en el sistema es llamado adiabático. Esto quiere decir que no hay transferencia de calor. Este proceso puede darse también si el sistema y el alrededor se encuentran a la misma temperatura.

Se dice que un sistema es homogéneo si las variables de estado no dependen del espacio de coordenadas. La termodinámica clásica se preocupa de las condiciones de equilibrio en un sistema homogéneo o un sistema heterogéneo que se compone de partes homogéneas (fases).

El primer paso para la formulación de la termodinámica es introducir el concepto de temperatura. Se postula que, si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercer sistema, los mismos están en equilibrio térmico entre sí.

---

<sup>2</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

De aquí se puede mostrar que la condición de equilibrio térmico entre varios sistemas es la igualdad de cierta función simple del estado termodinámico del sistema, que puede ser nombrado la temperatura  $\mathcal{T}$ : cualquiera de los sistemas usa un termómetro que lee la temperatura  $\mathcal{T}$ , o temperatura empírica, en cierta escala. La escala de la temperatura antes mencionada, es elegida de forma arbitraria.

### 1.2.1. Primera ley de la termodinámica

Un sistema térmicamente aislado puede ser tomado de un estado I a un estado II por caminos alternativos; el trabajo realizado en el sistema tiene el mismo valor para cada camino adiabático; existe una función de una variable del estado del sistema, llamada energía, tal que para un proceso adiabático el incremento de energía es igual al trabajo realizado en el sistema del estado I al II y viceversa. Entonces:

$$\Delta \text{energía} = \text{trabajo realizado}$$

Se define el calor  $Q$  absorbido por un sistema como el incremento en la energía del sistema, menos el trabajo realizado en el sistema. Entonces:

$$Q = \Delta \text{energía} - \text{trabajo realizado}$$

La expresión como una declaración de la conservación de la energía se observa que la energía de un sistema se puede aumentar, ya sea por el trabajo realizado sobre el mismo o por absorción de calor.

“El calor y el trabajo son mecanismos de transferencia de energía, entre un sistema y su alrededor. Debido a estas características, es posible enunciar las similitudes entre las mismas”<sup>3</sup>.

- Tanto el calor como el trabajo pueden ser reconocidos en las fronteras de un sistema cuando lo cruzan, esto quiere decir que ambos son fenómenos de frontera.
- El trabajo y el calor no poseen energía, a diferencia de los sistemas.
- Ambos son identificados como procesos y no como estados. Esta característica los diferencia de las propiedades de un sistema.
- Ambos se encuentran en función de la trayectoria, por lo que sus magnitudes dependen de la misma durante el proceso, así como los estados finales.

Se acostumbra identificar varios tipos de energía que completan el total: la energía cinética  $K$ , la energía gravitacional  $G$ , y la energía elástica  $E$ . Entonces, la ecuación:

$$\text{Energía} = K + G + E$$

Puede ser considerada como la definición de energía interna.

---

<sup>3</sup> HOWELL, John R.; BUCKIS, Richard. *Principios de termodinámica para ingenieros*. p. 168.

### 1.2.1.1. Mecanismos de transferencia de energía

La energía puede transferirse desde o hacia un sistema en tres formas, pero para el caso de este trabajo solo se considera los sistemas cerrados:

- Calor y trabajo. Las interacciones de energía se dan en la frontera del sistema cuando lo cruzan, lo cual representa la ganancia o pérdida de la misma. Otro medio para la transferencia de energía es el flujo de masa que se considera para sistemas abiertos.
- Transferencia de calor,  $Q$ . La transferencia de calor hacia un sistema incrementa la energía de las moléculas y, por lo tanto, la del sistema. La transferencia de calor del sistema alrededor u otro sistema la disminuye, esto debido a que la energía transferida proviene de la energía de las moléculas.
- Transferencia de trabajo,  $W$ . Es una interacción de energía que no es provocada por una diferencia de temperatura entre el sistema y los alrededores. La transferencia de trabajo en un sistema incrementa la energía de este, mientras que la transferencia de trabajo desde el sistema la disminuye. Las colisiones inelásticas son un claro ejemplo tanto de la pérdida como de la ganancia de energía a través del trabajo.

### 1.2.2. Segunda ley de la termodinámica para sistemas homogéneos

De la primera ley de la termodinámica se sabe que la energía es constante y se encuentra en constante cambio. Debido a que la misma solo trata de un

proceso en donde la energía es constante, no toma en cuenta si el proceso es posible, debido a que la misma no posee un criterio para definirlo.

La segunda ley de la termodinámica provee un criterio para saber si un proceso se puede llevar a cabo, así como la calidad de la energía en un proceso. Esta ley postula que, en un proceso cíclico, la eficiencia térmica o calor en el ciclo, nunca puede ser el 100 %.

“Se utiliza como ejemplo una máquina que transfiere energía mecánica al agua para transformarla en movimiento y por último en calor. Si se deseara realizar el proceso inverso, se observa que no es posible. Si luego se analiza la máquina de vapor, se observa que el motor genera calor para transformar agua en gas y producir energía mecánica; el gas tiende a transferir calor al ambiente, el cual posee una temperatura menor a la de la caldera y, por lo tanto, no puede ser reutilizado. Tomando en cuenta ambos ejemplos, se postula lo siguiente”<sup>4</sup>.

Existen dos funciones de estado de una variable,  $T$ , llamada temperatura absoluta, y  $S$ , llamada entropía, con las siguientes propiedades:

- $T$  es un número positivo que es función de la temperatura empírica  $\mathcal{T}$  únicamente.
- La entropía de un sistema es igual a la suma de las entropías de sus partes.
- La entropía de un sistema puede cambiar de dos formas distintas, es decir, por la interacción con el medio y por cambios dentro del sistema. Simbólicamente, se puede escribir:

$$dS = d_e S + d_i S$$

---

<sup>4</sup> CENGEL, Yunus; BOLES, Michael. *Termodinámica*. p. 85.

Donde  $dS$  denota el incremento de entropía del sistema,  $d_e S$  denota la parte del incremento que tiene lugar en la interacción con el medio, y  $d_i S$  denota la parte del incremento que tiene lugar en el interior del sistema. Entonces, si  $dQ$  denota el calor absorbido por el sistema del medio, se tiene

$$d_e S = \frac{dQ}{T}$$

El cambio  $d_i S$  nunca es negativo. Si  $d_i S$  es cero, se dice que el proceso es reversible. Si  $d_i S$  es positivo, se dice que el proceso es irreversible:

$$d_i S > 0 \quad (\text{proceso irreversible})$$

$$d_i S = 0 \quad (\text{proceso reversible})$$

El caso restante,  $d_i S < 0$ , nunca ocurre en la naturaleza.

“La temperatura absoluta  $T$  y la entropía  $S$  son dos cantidades fundamentales. No se detendrá en definir dichas cantidades en función de otras para mantener la simplicidad del concepto. Lord Kelvin ha mostrado como es posible calibrar cualquier termómetro a una temperatura absoluta. La escala de temperatura absoluta es definida por medio del equilibrio entre el agua líquida y el hielo a una presión de 1 atm a 273,16 K, 273,16 grados en la escala de Kelvin”<sup>5</sup>.

La entropía es una propiedad de los materiales, justo como la masa y la carga eléctrica lo son. Una libra de oxígeno tiene una entropía definida, que puede ser cambiada por medio de la temperatura y un volumen específico de gas. Una libra de acero a una temperatura dada y estado dado de esfuerzos tiene una entropía definida.

---

<sup>5</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

### 1.3. Entalpía

“La entalpía  $H$  es una magnitud termodinámica cuya variación expresa una medida de la cantidad de energía absorbida o cedida por un sistema termodinámico, es la energía que se intercambia con el entorno. La misma también puede definir la cantidad de calor absorbido o cedido por el sistema”<sup>6</sup>.

La entalpía es una conclusión directa de la primera ley de la termodinámica que puede expresarse como:

$$H = U + W$$

El calor que ha sido transferido queda expresado como:

$$Q = H_2 - H_1 = \Delta H$$

En el caso de los sólidos el trabajo inicial, este es al inicio del proceso de carga del mismo, es igual a cero.

$$Q = H_2 - H_1$$

$$Q = W_2 + U_1 + \Delta U - W_1 - U_1$$

Como el trabajo inicial es cero, se obtiene:

$$Q = W_2 + \Delta U$$

---

<sup>6</sup> CENGEL, Yunus; BOLES, Michael. *Termodinámica*. p. 85.

Lo cual corresponde directamente a la primera ley de la termodinámica. Se hace notar que, en sólidos, el calor que gana o pierde un material luego del proceso de carga y descarga está íntimamente relacionado con el trabajo.

Este concepto de entalpía será aplicado a un sólido que se somete a un único ciclo de carga-descarga que mostrará una deformación remanente, la cual corresponde a una pérdida que se relaciona con el calor ganado en el proceso.

#### 1.4. Entropía

Para describir el fenómeno de entropía, es necesario hacer uso de la definición integral:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

La integral cerrada de un recorrido de calor que representa el caso en donde (en un sistema) se introduce calor y expulsa calor. Cualquier transferencia de calor desde o hacia el sistema se puede separar en cantidades infinitesimales de calor. La integral cerrada o de ciclo se puede considerar como la suma de todas las transferencias de calor (energía y trabajo) infinitesimales en el mismo.

“Cuando la integral cerrada es igual a cero, el trabajo no depende del recorrido y, por lo tanto, se trata de una propiedad que describe el sistema. El científico alemán R. Clausius notó que, para un cambio infinitesimal, la integral

podría considerarse igual a cero y, en consecuencia, se estaría tratando con una propiedad. Esta propiedad fue nombrada por el mismo como entropía”<sup>7</sup>.

La entropía es una magnitud que permite determinar si el proceso es reversible o irreversible, lo cual corresponde a la diferencia de entropía en dos estados de un sistema. Si el sistema es reversible, no se efectúa trabajo en el sistema; si es irreversible quiere decir que se efectuó un trabajo y que el calor expulsado como remanente no podrá ser recuperado e integrado de nuevo al sistema.

En la ciencia e ingeniería se suele utilizar la diferencia de entropía como una medida para determinar el caos o desorden en el sistema, tal como se suele utilizar la entalpía para determinar la ganancia de calor. Para determinar el caos en un sistema, se analiza la entropía en dos estados:

$$\Delta S = S_2 - S_1 \int_1^2 \left( \frac{dQ}{T} \right)$$

Como se sabe que la integral cerrada no puede ser cero, se hace notar que la diferencia antes dicha no puede ser negativa en un sistema aislado y cerrado. Esto lleva a concluir que, en el sistema antes dicho, la entropía aumenta hasta llegar a un punto máximo, llamado también de equilibrio. Este concepto general indica:

- Los procesos solamente pueden ocurrir en una dirección, definida por el principio de incremento de entropía  $S \geq 0$ . Un proceso que no respete este principio no es posible en la naturaleza.

---

<sup>7</sup> CENGEL, Yunus; BOLES, Michael. *Termodinámica*. p. 85.

- La entropía no es conservativa. La entropía puede conservarse en proceso completamente reversible, en todos los demás casos, aumenta.
- El desempeño en un sistema es degradado por la presencia de irreversibilidad. Esto quiere decir que la generación de entropía es una medida de las magnitudes de irreversibilidad presentes durante un proceso. A mayor irreversibilidad mayor entropía.

## 1.5. Teorema de conservación

Los teoremas de conservación son consecuencia directa de las leyes de Newton, las cuales pueden ser verificadas y escritas de forma compacta.

### 1.5.1. Leyes de Newton

El impulso lineal se define como un vector que tiene de magnitud el producto de la masa por la velocidad y tiene la misma dirección que la velocidad. El impulso lineal es constante en una dirección en donde la fuerza aplicada es nula.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La verificación se puede hacer a partir de la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2(t)}{dt^2} = F_i(\vec{r}, t)$$

$$P_i = m \frac{dx_i(t)}{dt} = \text{constante}$$

$$\text{Si } F_i(\vec{r}, t) = 0$$

Por medio del impulso lineal, se dice que las primeras dos leyes de Newton pueden ser reescritas diciendo que un sistema de  $N$  partículas no sometido a acciones externas se conserva:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(t) = \text{constante}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0$$

La variación del impulso de cada una de las partículas se debe a las fuerzas internas que son provocadas por sus características. Estas pueden ser de origen gravitacional o electromagnético. Si se consideran dos masas, el vector que representa esta acción se nombrará como la fuerza ejercida por una masa sobre otra:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_1(t) = \vec{f}_{21}$$

Como los efectos de las masas de un sistema se anulan, se puede decir que:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_1(t) + \frac{d}{dt} \vec{P}_2(t) = 0$$

$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$$

Esta es la expresión de la tercera ley de Newton.

### 1.5.2. Definición de trabajo y teorema de conservación

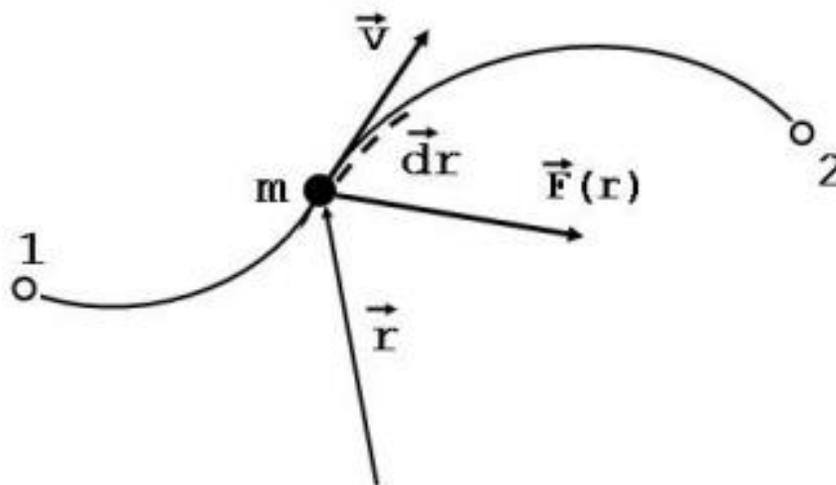
El trabajo realizado sobre una partícula o sobre un cuerpo que concentra su masa en un punto depende de la trayectoria de dicha partícula a lo largo del espacio y de las fuerzas que generan el movimiento.

El trabajo realizado se define como:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

De la definición anterior se puede observar que el producto de ambos vectores es un escalar. También, se puede observar que dicha integral es sobre el recorrido o trayectoria de la masa.

Figura 2. Definición gráfica de trabajo



Fuente: PONCE, Víctor. *Mecánica clásica*. p. 35.

Utilizando los teoremas expuestos anteriormente, se puede expresar el trabajo entre dos puntos como:

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Entonces:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1^2 = K_2 - K_1$$

Donde  $K = \frac{1}{2} m v^2$  es la energía cinética de la partícula.

El trabajo realizado por las fuerzas actuantes es igual a la variación de la energía cinética.

Tanto en los sistemas de muchas partículas como en los cuerpos rígidos, la energía cinética se calcula con la velocidad del centro de masa. Como se trata de cuerpos rígidos, todas las partículas se mueven a la misma velocidad.

Cuando la fuerza que actúa es tal que el trabajo entre el punto 1 y 2 es independiente del recorrido, se dice que es una fuerza conservativa. Esto quiere decir que, si se conoce el recorrido que describe una trayectoria cerrada, el trabajo realizado es nulo.

$$W_C = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$$

“Ya que se trata de una curva cerrada, es posible definir el teorema por medio de su forma diferencial”<sup>8</sup>. Si es posible definir una superficie que tiene como frontera la curva C, entonces puede aplicarse en teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{s}$$

Para que se cumpla el teorema de conservación, se dice que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Cuando el rotor de un campo vectorial es nulo, se puede representar como el gradiente de una función escalar, entonces una fuerza conservativa se expresa por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_r V(\vec{r})$$

Donde se deja de forma explícita el signo negativo por la importancia que tiene la función  $V$ , llamada energía potencial.

De lo anterior se dice que la fuerza conservativa actuante en una dirección cualquiera es la derivada de la energía potencial en esa dirección (gradiente) con signo cambiado.

Ya que se sabe que el trabajo es igual al cambio de la energía cinética, y que el trabajo de una fuerza conservativa también se conserva, la energía total de un sistema se expresa como:

---

<sup>8</sup> PONCE, Víctor. *Mecánica clásica*. p. 35.

$$T(\vec{r}) + V(\vec{r}) = \text{constante} = E$$

Si las fuerzas actuantes son conservativas, la energía total es constante en la partícula a lo largo del tiempo.

### 1.5.2.1. Fuerzas no conservativas

Las fuerzas no conservativas son todas aquellas que dependen del tiempo o de la velocidad (como la fricción). La mayoría de sistemas físicos que se encuentran en desequilibrio termodinámico son no conservativos; en ellos la energía se disipa de una forma análoga a la fricción.

En el caso de los materiales, la energía disipada se da principalmente por calor y deformación permanente.

Por las características de las fuerzas no conservativas, el trabajo realizado por las mismas es distinto de cero a lo largo de una trayectoria cerrada. El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es dependiente de la trayectoria; es decir, a mayor trayectoria, mayor es el trabajo realizado.

### 1.5.3. Función de energía de deformación

En la teoría de elasticidad, se define una  $\mathcal{W}$  en función de la deformación unitaria  $e$  tal que posea la propiedad:

$$\frac{d\mathcal{W}}{de} = \sigma$$

“La función  $\mathcal{W}$  es llamada función de energía de deformación. Se va a identificar a  $\mathcal{W}$  como la energía interna en un proceso isentrópico y la energía libre de todo proceso isotérmico”<sup>9</sup>.

Por definición, en un estado de esfuerzo de un cuerpo elástico,  $\mathcal{W}$  está en función únicamente de la deformación y viceversa. Por lo tanto, es suficiente con escoger uno de los dos vectores como una variable independiente de estado.

En un cuerpo, es posible definir el cambio de la energía interna como:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{\rho} \sigma de + Td\mathcal{P}$$

En la función,  $\mathcal{E}$  es la energía interna por unidad de masa,  $T$  es la temperatura y  $\mathcal{P}$  es la entropía por unidad de masa.

Se muestra que la energía interna está en función de la deformación unitaria y de la entropía por unidad de masa  $\mathcal{E}(e, \mathcal{P})$ . Utilizando las reglas de derivación parcial se dice que:

$$d\mathcal{E} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{P}}\right)_e d\mathcal{P} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e}\right)_\mathcal{P} de$$

Comparando ambas expresiones, se puede concluir que:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e}\right)_\mathcal{P} = \sigma \quad , \quad \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{P}}\right)_e = T$$

---

<sup>9</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

Para dicha definición, se hace la observación que la densidad en un elemento infinitesimal, permanece constante.

La ecuación define que existe una función escalar  $\rho\mathcal{E}$  que sus derivadas parciales con respecto a las componentes de la deformación dan como resultado las respectivas componentes de esfuerzo.

Por otro lado, cuando el proceso es isotérmico ( $T = cte.$ ), se introduce el concepto de la función de energía por unidad de masa de Helmholtz:

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{E} - T\mathcal{P}$$

Si se deriva dicha función para determinar la razón de cambio de dicha energía, se obtiene que:

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{P}dT + \frac{1}{\rho}\sigma de$$

De donde

$$\rho \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e} \right)_T = \sigma , \quad \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_e = -\mathcal{P}$$

Por lo tanto, en un proceso isotérmico también existe una función escalar,  $\rho\mathcal{F}$ , cuya derivada parcial respecto a la deformación, da las componentes correspondientes al esfuerzo.

“Si se compara la función de Helmholtz con la de energía interna, se hace notar que ambas identifican a  $\mathcal{W}$ , dependiendo si se trata de un proceso isotrópico o isotérmico”<sup>10</sup>.

#### 1.5.4. Energía de deformación reversible e irreversible

Como se mencionó en la sección de termodinámica, se sabe que la entropía está en función del estado en procesos, siendo este irreversible o reversible.

El valor de la entropía de un sistema se puede calcular si son conocidas todas las variables de estado. Se sabe que las variables de estado son conocidas cuando el sistema se encuentra en equilibrio.

Ahora que se adentrará a definir los procesos reversibles e irreversibles, se asume que la entropía puede ser igualmente calculada, aunque el sistema no se encuentre en equilibrio. “Eso se fundamenta en el principio de la distribución de masa de todo sistema mecánico: una vez que la masa de un sistema continuo es determinada, se asume que no cambia sin importar que tan rápido se muevan sus partículas”<sup>11</sup>.

Para proseguir con las definiciones, se hará una extensión a la segunda ley de la termodinámica para cualquier porción de un sistema continuo, sin importar si este es uniforme o no uniforme.

Primero es necesario notar que la entropía es una propiedad extensiva. Además, es necesario definir que la entropía en un sistema se divide en dos

---

<sup>10</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

<sup>11</sup> *Ibíd.*

partes: una es toda la entropía que es compartida con el alrededor a través de la frontera y la otra es la entropía interna. Estas dos se relacionan de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathcal{P} dV = - \int_B \varphi dA + \frac{D_i}{Dt} \int_V \rho \mathcal{P} dV$$

La primera parte del sumando representa la entropía transferida a través de la frontera y la segunda es la entropía generada en el sistema.

Ahora si se procede a diferenciar dicha ecuación, se puede definir de forma más precisa la extensión de la segunda ley de la termodinámica.

$$\rho \frac{D\mathcal{P}}{Dt} = -div\varphi + \frac{D_i\mathcal{P}}{Dt}$$

A partir de esta simple ecuación se define formalmente la segunda ley de la termodinámica para sólidos:

$\varphi$  Flujo de entropía a través de la frontera

$$\frac{D_i\mathcal{P}}{Dt} = 0 \text{ proceso reversible}$$

$$\frac{D_i\mathcal{P}}{Dt} > 0 \text{ proceso Irreversible}$$

$$\frac{D_i\mathcal{P}}{Dt} < 0 \text{ no ocurre en la naturaleza}$$

Como se ha definido anteriormente, se sabe que la entropía es una medida de la calidad de la energía, la dirección en la cual se pueden dar los procesos y la irreversibilidad de un sistema. Si se analiza esta sección con la sección dedicada a los conceptos generales de la termodinámica, se notará que

la única diferencia es que en esta sección se definen los conceptos para un sistema de masa continuo, no a un sistema generalizado.

De una forma más simple, se puede definir, a manera de conclusión, que:

$$E_{def} = E_{rev} + E_{irrev}$$

Donde la primera parte es la energía invertida en provocar solo procesos reversibles, llamada energía potencial elástica. La segunda parte corresponde a la irreversibilidad de la energía invertida en el proceso. Algunos procesos que pueden provocar la irreversibilidad del sistema son: plastificación, fisuración o ruptura.

### 1.5.5. Energía potencial elástica

Se sabe que la energía potencial elástica viene definida como aquella que puede ser recuperada completamente luego de un proceso en el sistema.

La energía de deformación se define como el producto de las componentes de los esfuerzos y deformaciones. Estos productos deben darse durante el rango elástico para que se respeten las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{def} = \frac{1}{2} \int_V \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \\ E_{def} = \int_V \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx})}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}{2G} dV \end{array} \right\}$$

Donde:

$\sigma_{ij} = \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  son las componentes del tensor de esfuerzo.

También se define como las componentes de esfuerzos en un elemento infinitesimal.

### 1.5.5.1. Ley de Hooke y módulo de elasticidad

La ley de Hooke plantea que, para deformaciones longitudinales, la deformación es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional al área y una constante del material. Dicha constante es conocida como módulo de Young.

$$\epsilon = \frac{F}{AE}$$

Donde E representa el módulo de Young.

“La ley de Hooke responde de forma simple y acertada, problemas en donde las dimensiones transversales de un elemento no se ven comprometidas. Tal es el caso de sistema masa resorte con un solo grado de libertad”<sup>12</sup>.

Utilizando el fundamento propuesto por Hooke, se puede formular una ecuación que relacione todas las componentes de la deformación como de los esfuerzos. Para esta formulación, el principio de proporcionalidad lineal entre esfuerzos y deformaciones, se mantiene.

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} e_{kl}$$

Donde  $D^{ijkl}$  es el tensor de elasticidad. Este módulo de elasticidad tensorial implica que, en cualquier dirección de deformación, el esfuerzo es proporcional.

---

<sup>12</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

Recordando la función de energía planteada anteriormente:

$$W = \frac{1}{2} D^{ijkl} e_{ij} e_{kl}$$

Por medio de la propiedad:

$$\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma^{ij}$$

#### **1.5.5.2. Módulo volumétrico y de rigidez**

En los materiales isotrópicos que no presentan cambios de temperatura, las leyes de Hooke se basan en tres diferentes módulos de elasticidad. El primero es el ya descrito como módulo de elasticidad longitudinal.

El cambio volumétrico de un material responde a la teoría que, en un elemento infinitesimal, la deformación es igual al mismo. El cambio de volumen de un material es proporcional al esfuerzo medio.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{-p}{K}$$

La anterior ecuación es frecuentemente utilizada en estática de fluidos, donde un elemento infinitesimal de líquido es sometido a un esfuerzo medio producido por la presión.

El coeficiente  $K$  es llamado módulo volumétrico del material.

Cuando la deformación se presenta sin un cambio volumétrico, la misma es proporcional a un esfuerzo desviador. La constante  $G$  es llamada módulo de elasticidad en corte, módulo de corte o módulo de rigidez. Un caso espacial es donde la deformación en el plano  $xy$  (plano transversal) no es igual a cero, pero las otras componentes son despreciables, se tiene que:

$$\sigma_{xy} = 2Ge_{xy}$$

El coeficiente de dos en la ecuación se debe a que, antes del planteamiento tensorial de esfuerzos, se solía definir como  $\gamma_{xy} = 2e_{xy}$ .

### **1.5.5.3. Módulo de cizalladura**

El módulo de elasticidad transversal, también llamado módulo de cizalla, es una constante elástica que caracteriza el cambio de forma que experimenta un material elástico (lineal e isótropo) cuando se aplican esfuerzos cortantes. Este módulo recibe una gran variedad de nombres, entre los que cabe destacar los siguientes: “módulo de rigidez transversal, módulo de corte, módulo de cortadura, módulo elástico tangencial, módulo de elasticidad transversal y segunda constante de Lamé”<sup>13</sup>.

Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de elasticidad transversal es una constante con el mismo valor para todas las direcciones del espacio. En materiales anisótropos se pueden definir varios módulos de elasticidad transversal y en los materiales elásticos no lineales dicho módulo no es una constante, sino que es una función dependiente del grado de deformación.

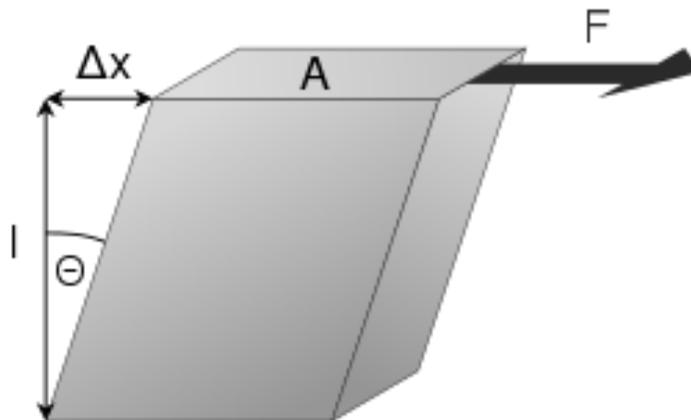
---

<sup>13</sup> SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 110.

Experimentalmente el módulo elástico transversal (o módulo cortante) puede medirse de varios modos, conceptualmente la forma más sencilla es considerar un cubo como el de la figura 1 y someterlo a una fuerza cortante, para pequeñas deformaciones se puede calcular la razón entre la tensión y la deformación angular:

$$G = \frac{Fl}{\Delta x A}$$

Figura 3. **Diagrama de esfuerzo a corte**



Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 110.

#### 1.5.5.4. **Potencial armónico**

“Se dice que un sistema cualquiera, mecánico, eléctrico, neumático, etc., es un oscilador armónico si, cuando se deja en libertad fuera de su posición de

equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales, o sinusoidales amortiguadas en torno a dicha posición estable”<sup>14</sup>.

En mecánica de materiales, este comportamiento se percibe en el modelo idealizado de una estructura; en esencia es un sistema de masa resorte.

Se denominará  $y$  a la distancia entre la posición de equilibrio y la masa, al a que se le denominará  $m$ . Se supondrá que la fuerza del resorte es estrictamente proporcional al desequilibrio:

$$F = -ky$$

Es decir, cumpla la ley de Hooke.

Se denota la constante elástica del resorte como  $k$ . El signo negativo indica que cuando  $y$  es positiva, la fuerza está dirigida hacia las  $y$  negativas.

La segunda ley de Newton indica que:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo la fuerza se obtiene:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

---

<sup>14</sup> YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; FORD, A. Lewis. *Sears and Zemansky's university physics: with modern physics*. p. 198.

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria es inmediata: las únicas funciones reales (no complejas) cuya segunda derivada es la misma función con el signo invertido son seno y coseno.

$$y = A \cos(\omega t + \phi)$$

Donde:

- $y$  es la elongación.
- $A$  es la amplitud o máxima diferencia con respecto a la posición de equilibrio (deriva).
- $\omega$  es la frecuencia angular.
- $\phi$  es el ángulo de fase.

Es importante notar que, de acuerdo con la conservación de la energía, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética, es decir:

$$E_0 = E_f$$
$$\frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

En lo anterior se supone que en el momento final se encuentra en la posición de equilibrio y dado que no hay amortiguamiento, la energía potencial se transfiere completamente como energía cinética.

#### **1.5.5.5. Energía de deformación**

La deformación es un proceso termodinámico en el que la energía interna del cuerpo acumula energía potencial elástica. A partir de unos ciertos valores

de la deformación se pueden producir transformaciones del material y parte de la energía se disipa en forma de plastificado, endurecimiento, fractura o fatiga del material.

Cuando un sólido se deforma, en parte aumenta su energía interna, este aumento de energía puede ocasionar cambios termodinámicos reversibles y/o cambios termodinámicos irreversibles. Por tanto, la energía de deformación admite la siguiente descomposición:

$$E_{def} = E_{rev} + E_{irrev}$$

### **1.5.6. Resistencia de materiales**

La resistencia de materiales es una rama del estudio de la ingeniería donde se busca simplificar las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones en un material o sistema estructural. La simplificación se logra restringiendo la forma como la carga es aplicada y definiendo secciones prismáticas continuas en todo el elemento. Cuando el sistema estructural o material posee geometrías no prismáticas, se deben utilizar métodos numéricos basados en la teoría de elasticidad en la mecánica de sólidos, como el método de elementos finitos.

#### **1.5.6.1. Tipos de esfuerzos**

Para caracterizar los tipos de esfuerzo que existen, es necesario entender de dónde viene dicho concepto.

“Si se imagina una pequeña superficie en el interior de un cuerpo, la primera incógnita que se genera es la interacción de superficie con el cuerpo. Si la superficie es suficientemente pequeña  $\Delta S$ , donde un vector unitario  $\nu$  ortogonal al plano y dirigido hacia el exterior del cuerpo indica la dirección positiva de la superficie, se sabe que en la parte positiva de dicha superficie una fuerza es

expulsada. Como el sistema se encuentra en equilibrio, se sabe que una fuerza de misma magnitud y dirección contraria la anula”<sup>15</sup>.

Las condiciones de la fuerza dependen del plano, por lo que la misma es restringida por el área y por la orientación.

Si el área tiende a cero, la relación entre la fuerza y el área tiene al límite  $\frac{dF}{dS}$ . Debido a que la superficie tiende a cero, la fuerza no genera rotación debido a la ausencia de un brazo de momento.

Esta relación límite es un vector, por lo que, en la mecánica de sólidos, se define como:

$$\frac{\nu}{T} = \frac{dF}{dS}$$

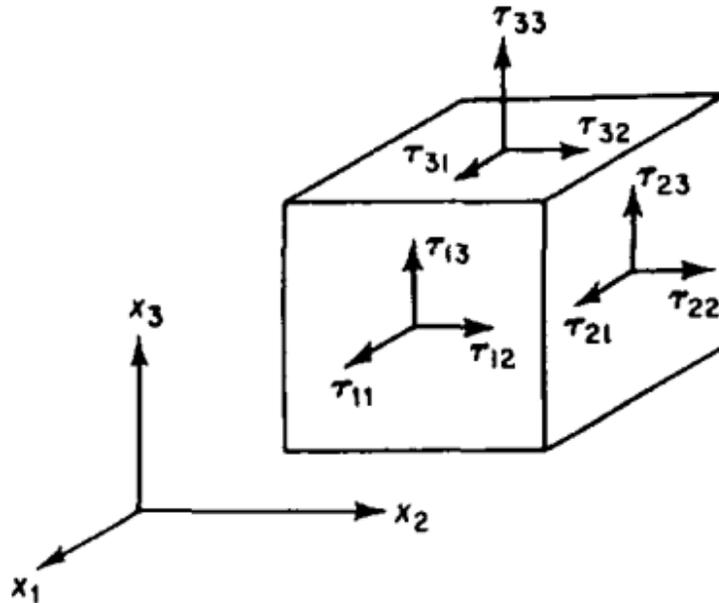
Donde el símbolo  $\nu$  representa la dirección normal positiva al plano.

El caso anterior representa la forma general de la definición de esfuerzo. Si se considera el caso especial en donde el plano es paralelo a uno de los planos coordenados y asumimos que la dirección positiva es la misma que en el plano coordenado, y si se separa la fuerza en sus componentes, se obtiene el siguiente diagrama.

---

<sup>15</sup> FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 196.

Figura 4. Tensor de esfuerzos



Fuente: TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. p. 66.

El gráfico representa los tres posibles planos que podrían existir con base en las suposiciones.

La notación para dicho esfuerzo es  $\tau_{ij}$ , en donde el subíndice  $i$  representa la dirección del plano en donde actúa la fuerza y  $j$  representa la dirección de la componente de la fuerza.

Si se suman los tres vectores, se llega a la definición del estado límite de esfuerzos. Cuando la componente de la fuerza es paralela al vector director del plano, se dice que el esfuerzo es axial. Si la componente de la fuerza es ortogonal a la dirección del plano, se dice que el esfuerzo es cortante.

Para definir si el estado de esfuerzos es positivo o negativo, hace falta analizar la dirección de las fuerzas en los planos que son paralelos a los planos coordenados.

Los esfuerzos axiales son positivos, si la componente de la fuerza es paralela al vector director del plano paralelo al plano coordenado. En este caso el elemento sufre un alargamiento, por lo que la tensión implica un esfuerzo axial positivo y la compresión, negativo.

Los esfuerzos cortantes son positivos si las componentes de la fuerza, ortogonales al vector director del plano paralelo al plano coordenado, son también paralelas a los vectores directores de los planos coordenados restantes.

#### **1.5.6.2. Esfuerzos de compresión y tensión producidos por carga axial y flexión**

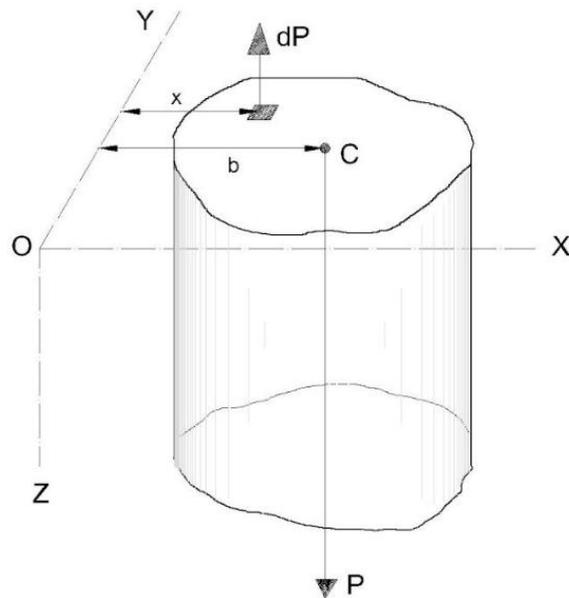
Como se describió anteriormente, los esfuerzos axiales son aquellos que se producen por la componente de una fuerza que es transversal a un plano.

“Cuando una carga se aplica en el centroide de la sección transversal de un elemento con forma prismática, la fuerza se distribuye de igual modo en toda la sección. Esto se puede demostrar cortando el elemento por medio de un plano en cualquier parte del mismo, siendo el mismo perpendicular a la carga”<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> SINGER, Ferdinand L.; PYTEL, Andrew. *Strength of materials*. p. 97.

Figura 5. **Carga axial sobre elemento**



Fuente: elaboración propia, empleando AutoCAD.

El equilibrio debe existir tanto traslacionalmente como rotacionalmente, por lo que las fuerzas elementales respecto a un punto arbitrario en el plano deben generar un momento antiparalelo al producido por la carga axial. Esto se puede resumir en la siguiente expresión

$$P = \int dP = \int \sigma dA$$
$$Pb = \int x dP = \int x\sigma dA$$

El término  $Pb$  representa el momento producido por la carga axial respecto a un punto de referencia arbitrario.

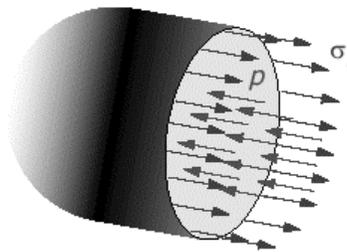
Las expresiones anteriores demuestran que, si la sección es continua, la resultante de todas las fuerzas infinitesimales es una carga  $P$  aplicada en el

centroide y, por lo tanto, el esfuerzo producido por ella es igual al producido por las cargas infinitesimales.

Esto se resume por medio de la expresión:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Figura 6. **Esfuerzo axial**

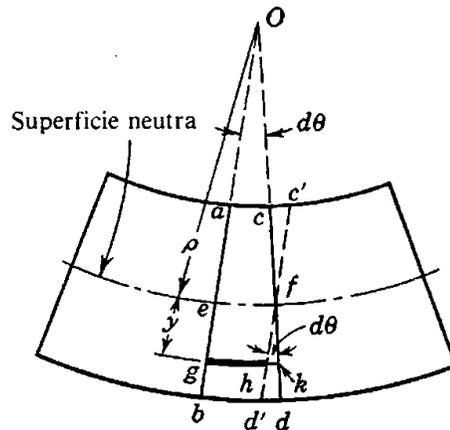


Fuente: IMAZ, Roberto. *Resistencia de materiales*. p. 5.

Si una carga es aplicada excéntrica al centroide de la sección transversal de un elemento o si esta se aplica perpendicular al centroide de la sección transversal, el efecto sobre el elemento es generar un momento, debido al brazo generado con respecto al centroide.

Si se asume que un momento se aplica sobre una sección transversal, el momento generará una deformación que se asume es un arco circular con radio  $\rho$ , que va desde un centro desconocido O y el eje centroidal del elemento.

Figura 7. Deflexión en sección de viga



Fuente: SINGER, Ferdinand. *Resistencia de materiales*. p. 123.

Dado que el elemento se deforma a lo largo de todo su eje, tomamos una deformación infinitesimal, correspondiente a un ángulo infinitesimal  $d\theta$  con respecto al centro O. Esta deformación infinitesimal puede ser tratada como una diferencia infinitesimal lineal, en lugar de arco circular, entonces:

$$\delta = hk = y d\theta$$

La deformación se obtiene dividiendo el alargamiento entre la longitud inicial  $ef$ , de la fibra del elemento:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y d\theta}{ef}$$

Utilizando el radio  $\rho$ , la longitud  $ef$  es igual a  $\rho d\theta$ , por lo que la deformación unitaria vale:

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} = \frac{y d\theta}{\rho d\theta}$$

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece la ley de Hooke, el esfuerzo en la fibra  $\sigma$  está dado por:

$$\sigma = E\epsilon = \left(\frac{E}{\rho}\right)y$$

Esta expresión indica que el esfuerzo en cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia  $y$  a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el módulo elástico es igual a tensión que a compresión. El radio de curvatura  $\rho$  de la superficie neutra es independiente de la ordenada  $y$  de la fibra.

Se aplican las condiciones de equilibrio para completar la deducción de la fórmula de esfuerzo a flexión. Dado que las fuerzas externas se equilibran y los cortes internos se equilibran, la condición de equilibrio indica que:

$$\frac{E}{\rho} \int zy dA = 0$$

La integral es producto de inercia que es nulo únicamente en el eje centroidal. De la condición de equilibrio en momentos se deriva que:

$$M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

Se sabe que  $\int y^2 dA$  es el momento de inercia  $I$ , del área con respecto al eje centroidal, por lo que:

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

Sin embargo, se sabe que  $\sigma = \left(\frac{E}{\rho}\right)y$  por lo que:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Es decir, el esfuerzo es proporcional al momento y a distancia de la fibra esforzada con respecto al eje neutro.

### **1.5.6.3. Esfuerzos de corte producidos por flexión y torsión**

“El esfuerzo cortante, de corte, de cizalla o de cortadura es el esfuerzo interno o resultante de las tensiones paralelas a la sección transversal de un prisma mecánico como por ejemplo una viga o un pilar. Se designa variadamente como T, V o Q”<sup>17</sup>.

Los esfuerzos cortantes o esfuerzos de cortadura provocan la aparición de tensiones de cortadura dentro de la sección en la que actúan. Las tensiones de cortadura se caracterizan porque:

No provocan cambio de volumen, sólo producen una deformación angular. La proporcionalidad entre el ángulo deformado y la tensión viene dada por el módulo de elasticidad en cortadura o módulo de cortadura G, donde:

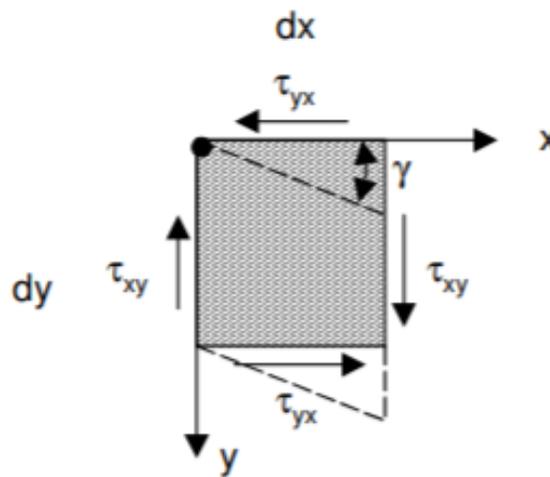
---

<sup>17</sup> SINGER, Ferdinand L.; PYTEL, Andrew. *Strength of materials*. p. 97.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Son iguales en magnitud y opuestos en sentido para caras paralelas.

Figura 8. **Esfuerzos de corte en un elemento infinitesimal**



Fuente: BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales*. p. 15.

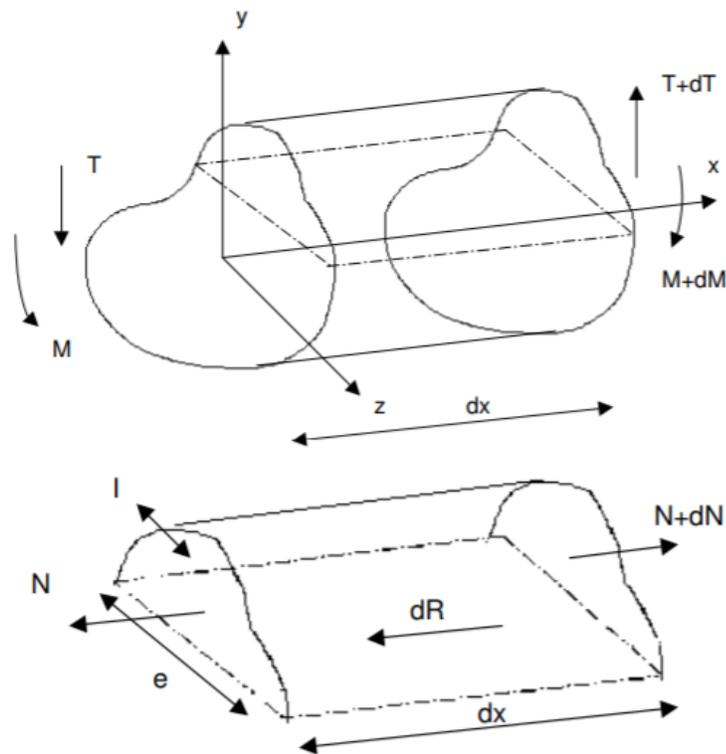
La mayoría de elementos sometidos a flexión tienen fuerzas de cortadura (debido a sus condiciones de apoyo y tensión interna) y momentos flectores. Solo ocasionalmente se encuentran elementos sometidos a flexión pura (el caso de elemento cargado excéntricamente es un ejemplo de flexión más tensiones internas).

La fórmula de flexión se desarrolla asumiendo flexión pura. De hecho, la razón de dicha hipótesis ha sido simplemente eliminar los complicados efectos de las tensiones de cortadura.

Se considera un elemento sometido a fuerzas de cortadura y momentos flectores.

Considérese un elemento  $dx$  de la viga. Supóngase que la sección es arbitraria. Se traza un plano horizontal cortando a la sección y paralelo al plano XZ. Se separa y queda con la parte superior.

Figura 9. **Esfuerzo cortante a lo largo de un plano**



Fuente: BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales*. p. 16.

Donde:

- $T$  es el esfuerzo cortante.

- $dR$  el esfuerzo tangencial horizontal, contenido en el plano horizontal del corte dado a la pieza.
- $N$  tensiones debido a flexión.
- $I_z$  es el momento de inercia de toda la sección.
- $S_i$  el momento estático del área  $I$ .
- $y$  distancia a la fibra neutra.

Debida a la flexión se producen tensiones en cada punto  $dA$ , que darán una resultante  $N$  en una cara y otra en la cara opuesta  $N + dN$ . Para que el elemento esté en equilibrio es necesario una sollicitación  $dR$  en el plano horizontal que se denotará como esfuerzo tangencial horizontal.

$$N - (N + dN) + dR = 0$$

$$N + dN = \int \frac{(M + dM)y}{I_z} dA = \frac{(M + dM)y}{I_z} \int y dA = \frac{(M + dM)y}{I_z} S_i$$

$$N + dN = \frac{(M + dM)y}{I_z}$$

$$N = \int \sigma dA = \int \frac{My}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int y dA = \frac{M}{I_z} S_i$$

$$N = \frac{M}{I_z} S_i$$

Se sustituye para obtener:

$$dR = \frac{dM}{I_z} S_i$$

De la ecuación de la elástica se deduce que  $\frac{dM}{dx} = T$ , por tanto:

$$dR = \frac{TS_i}{I_z} dx$$

Tal ecuación es conocida como la fórmula del esfuerzo tangencial horizontal.

Una vez obtenido  $dR$ , se pueden deducir las tensiones de cortadura asumiendo una distribución uniforme de las mismas en todo lo ancho de la sección.

$$\tau_{xy} = \frac{dR}{e dx} = \frac{TS_i dx}{e dx I_z} = \frac{TS_i}{e I_z}$$

La anterior es la expresión que define el corte en un elemento sometido a flexión; sin embargo, este no es el único tipo de carga que produce flexión.

“Cualquier vector colineal con un eje geométrico de un elemento mecánico se denomina torsor (es decir, el vector que ejerce torsión sobre el elemento)”<sup>18</sup>. Se considerarán las siguientes hipótesis:

Sobre el cilindro actúa un torsor puro (mismo momento torsor en cualquier sección), y las secciones transversales analizadas están lejos de cambio de sección y lejos de punto de aplicación de carga.

Secciones transversales plana y paralelas antes de aplicación del torsor permanecen así después de torsión, y líneas de rectas permanecen rectas.

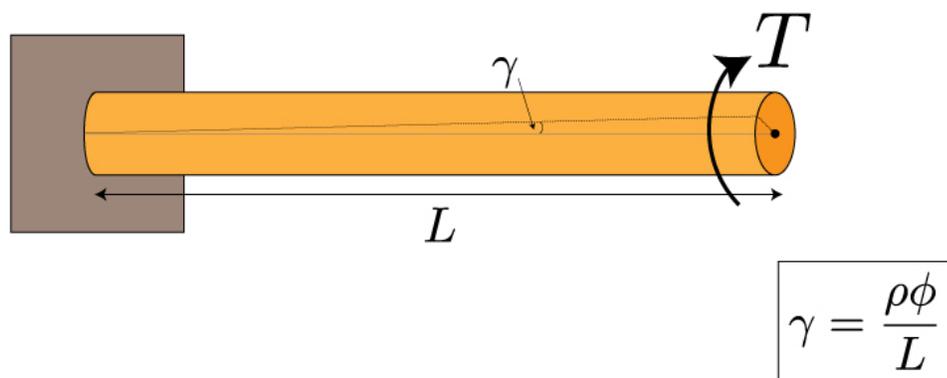
Se cumple la ley de Hooke

---

<sup>18</sup> BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales*. p. 15.

Considérese un cilindro empotrado sometido a un momento torsor. Sobre un elemento  $dx$  a una distancia  $\rho$  del eje  $X$ , el torsor provoca una deformación angular  $\gamma$  tal que  $\tau = G\gamma$ .

Figura 10. **Efecto de torsión sobre cilindro empotrado**



Fuente: BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales*. p. 19.

Por otro lado, asumiendo régimen elástico lineal, las deformaciones se asumen pequeñas, y por lo tanto:

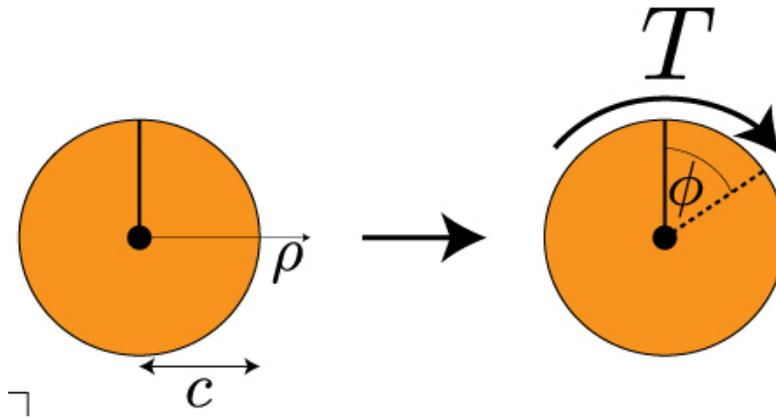
$$\tan(\gamma) = \gamma = \frac{\rho\theta}{L}$$

Y sustituyendo esta expresión en la ecuación de elasticidad perfecta:

$$\tau = G \frac{\rho\theta}{l}$$

Tomando una sección cualquiera del cilindro:

Figura 11. Sección de cilindro empotrado sometido a torsión



Fuente: BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales*. p. 19.

$$dT = \rho dF = \rho \tau dA$$

E integrando

$$T = \int \rho dF = \int \rho \tau dA = \int \frac{\rho G \rho \theta}{L} dA = \frac{G \theta}{L} \int \rho^2 dA = G \frac{\theta}{L} I_p$$

Donde  $I_p$  se define como el momento polar de inercia.

Despejando el ángulo de giro:

$$\theta = \frac{TL}{GI_p}$$

Se concluye que:

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$$

El ángulo máximo de giro  $\theta$  se produce en el extremo del cilindro, y en la sección empotrada el ángulo de giro es nulo (definición de empotramiento).

La tensión a cortadura máxima se produce en la periferia del cilindro,  $\rho = R$ , además, los esfuerzos de corte en el centro del cilindro son iguales a cero.

En barras no circulares, el cálculo a torsión resulta difícil, por lo que se emplea el método de elementos finitos.

### 1.5.7. Deformación unitaria

“La deformación es el cambio en el tamaño o forma de un cuerpo debido a esfuerzos internos producidos por una o más fuerzas aplicadas sobre el mismo o la ocurrencia de dilatación térmica”<sup>19</sup>.

La magnitud más simple para medir la deformación es lo que en ingeniería se llama deformación axial o deformación unitaria. Se define como el cambio de longitud por unidad de longitud:

$$\epsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

---

<sup>19</sup> SINGER, Ferdinand L.; PYTEL, Andrew. *Streght of materials*. p. 97.

Donde  $s$  es la longitud inicial de la zona en estudio y  $s'$  es la longitud final o deformada. Es útil para expresar los cambios de longitud de un cable o un prisma mecánico. La deformación calculada de acuerdo a la ecuación anterior es la principal usada en ingeniería. En la práctica se pueden usar otras medidas relacionadas con estas como el estiramiento:

$$\lambda = \frac{s'}{s} = 1 + \epsilon$$

La deformación axial logarítmica o deformación de Hencky que se define como:

$$\epsilon_H = \ln(\lambda) = \ln(1 + \epsilon)$$

La deformación de Green-Lagrange viene dada por:

$$\epsilon = \frac{1}{s}(\lambda^2 - 1) = \frac{(1 + e)^2 - 1}{2} = e + \frac{e^2}{2} = \frac{e^{2\epsilon_H} - 1}{2}$$

La deformación de Euler-Almansi viene dada por:

$$\epsilon_E = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1 + \frac{\epsilon}{2}}{1 - \epsilon} \epsilon = \frac{1 - e^{-2\epsilon_H}}{2}$$

En la mecánica de sólidos deformables la deformación puede tener lugar según diversos modos y en diversas direcciones, y puede además provocar distorsiones en la forma del cuerpo; en esas condiciones la deformación de un cuerpo se puede caracterizar por un tensor (más exactamente un campo tensorial) de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

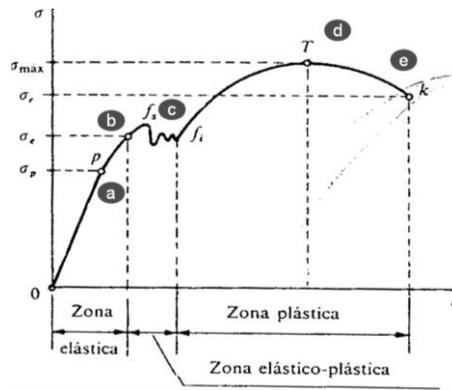
Donde cada una de las componentes de la matriz anterior, llamada tensor deformación, representa una función definida sobre las coordenadas del cuerpo que se obtiene como combinación de derivadas del campo de desplazamientos de los puntos del cuerpo.

### **1.5.8. Diagrama de esfuerzo - deformación unitaria**

El diagrama de esfuerzo - deformación expresa tanto el esfuerzo como la deformación en términos de las dimensiones originales (longitud), un procedimiento muy útil cuando se está interesado en determinar los datos de resistencia y ductilidad para propósito de diseño en ingeniería.

La curva esfuerzo real - deformación real (denominada frecuentemente, curva de fluencia, ya que proporciona el esfuerzo necesario para que el metal fluya plásticamente hacia cualquier deformación dada), muestra cómo evoluciona el esfuerzo y la deformación unitaria de un elemento sometido a ensayo.

Figura 12. **Diagrama de esfuerzo – deformación unitaria**



Fuente: NILSON, Arthur. *Diseño de estructuras de concreto*. p. 56.

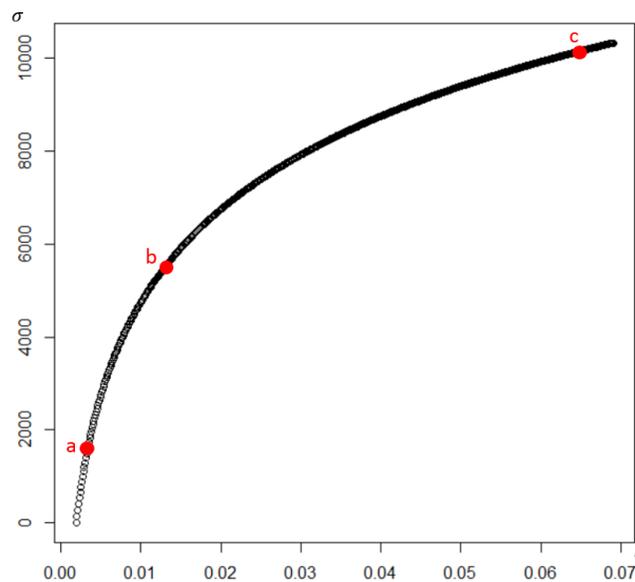
En el diagrama se puede caracterizar diferentes zonas:

- Límite de proporcionalidad (punto a del gráfico), es el punto que determina el límite de proporcionalidad, es decir, donde la ley de Hooke es válida. Posterior a este punto, el material o sistema estructural deja tener esfuerzos proporcionales sus deformaciones unitarias y se considera que empieza si fase elastoplástica.
- El límite elástico (punto b del gráfico) es aquel punto que separa la zona elástica (la cual contiene una parte de la zona elastoplástica) de la zona plástica, es decir, zona donde el material no es capaz de recuperar su forma original.
- Límite de fluencia ( $f_s$ , punto c de la gráfica) es el esfuerzo máximo al que el material es capaz de recuperar parcialmente su forma. Este punto puede o no manifestarse, siendo típico del acero al carbono, mientras que otras aleaciones, o materiales frágiles no lo manifiestan.

- Esfuerzo máximo (T, punto d de la gráfica) es la máxima ordenada en la curva esfuerzo deformación unitaria.
- Esfuerzo de rotura (punto e de la gráfica) es el esfuerzo generado al momento de la ruptura. En sistemas estructurales, este punto es considera como el esfuerzo de colapso.

Dada la alta capacidad de los postes, generalmente, no es posible observar todas las fases descritas anteriormente, siendo la fluencia el punto máximo de carga, por tanto, el diagrama a utilizar se simplifica como:

Figura 13. **Diagrama esfuerzo deformación para postes**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

Es decir, únicamente abarcará el límite de proporcionalidad, el límite elástico y posiblemente el esfuerzo de fluencia.

### **1.5.8.1. Zona elástica**

“La zona elástica se encuentra delimitada superiormente por el límite elástico, también denominado límite de elasticidad. Esta es la tensión máxima que un material elastoplástico puede soportar sin sufrir deformaciones permanentes. Si se aplican tensiones superiores a este límite, el material experimenta un comportamiento plástico con deformaciones permanentes y no recupera espontáneamente su forma original al retirar las cargas. En general, un material sometido a tensiones inferiores a su límite de elasticidad es deformado temporalmente de acuerdo con la ley de Hooke”<sup>20</sup>.

#### **1.5.8.1.1. Módulo de Young**

El módulo de Young o módulo de elasticidad longitudinal es un parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza.

Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para una tracción que para una compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda de un valor máximo denominado límite elástico, y es siempre mayor que cero: si se tracciona una barra, aumenta de longitud.

Tanto el módulo de Young como el límite elástico son distintos para los diversos materiales. El módulo de elasticidad es una constante elástica que, al igual que el límite elástico, puede encontrarse empíricamente mediante ensayo

---

<sup>20</sup> OUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; FORD, A. Lewis. *Sears and Zemansky's university physics: with modern physics*. p. 96.

de tracción del material. Además de este módulo de elasticidad longitudinal, puede definirse el módulo de elasticidad transversal de un material.

Como se describió anteriormente, el módulo de Young es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

Para materiales anisótropos:

$$E = l_x E_x + l_y E_y + l_z E_z$$

En donde  $(l_x, l_y, l_z)$  son los cosenos directores de la dirección en que se mide el módulo de Young respecto a tres direcciones ortogonales dadas.

#### 1.5.8.1.2. Resiliencia

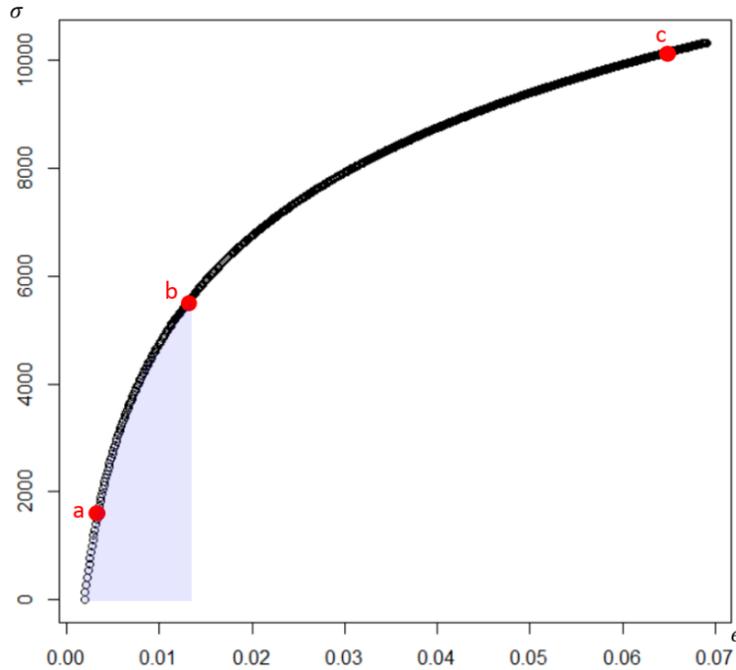
“Se llama resiliencia de un material a la energía de deformación (por unidad de volumen) que puede ser recuperada de un cuerpo deformado cuando cesa el esfuerzo que causa la deformación”<sup>21</sup>. La resiliencia es igual al trabajo externo realizado para deformar un material hasta su límite elástico:

$$E_{res} = \int_{\epsilon_0}^{\check{\epsilon}} \sigma(\epsilon) d\epsilon$$

---

<sup>21</sup> GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 78.

Figura 14. **Resiliencia**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

El área de color azul es la resiliencia.

### 1.5.8.2. **Zona elastoplástica**

La zona elastoplástica se encuentra delimitada inferiormente por el límite elástico y superiormente por el límite plástico. En esta zona los materiales tienden a adquirir deformaciones permanentes, sin embargo, son capaces de recuperar su forma original luego de un prolongado tiempo.

“Dada la variabilidad poco predecible de esta zona, los modelos tienden a incluir esta zona como elástica o plástica. Los modelos más complicados

ponderan el comportamiento de la zona como una combinación del comportamiento elástico y plástico”<sup>22</sup>.

### **1.5.8.3. Zona plástica**

La plasticidad es un comportamiento mecánico característico de ciertos materiales consistente en deformarse permanente e irreversiblemente cuando se encuentra sometido a tensiones por encima de su rango elástico, es decir, por encima de su límite elástico.

En los metales y sistemas estructurales, la plasticidad se explica en términos de desplazamientos irreversibles de dislocaciones.

#### **1.5.8.3.1. Tenacidad**

La tenacidad es la energía de deformación total que es capaz de absorber o acumular un material antes de alcanzar la rotura en condiciones de impacto, por acumulación de dislocaciones. Se debe principalmente al grado de cohesión entre moléculas. En mineralogía la tenacidad es la resistencia que opone un mineral u otro material a ser roto, molido, doblado, desgarrado o suprimido.

Nótese que para un material viscoelástico dicha energía dependería de la evolución de velocidad deformación, mientras que en materiales elastoplásticos es independiente de ellos.

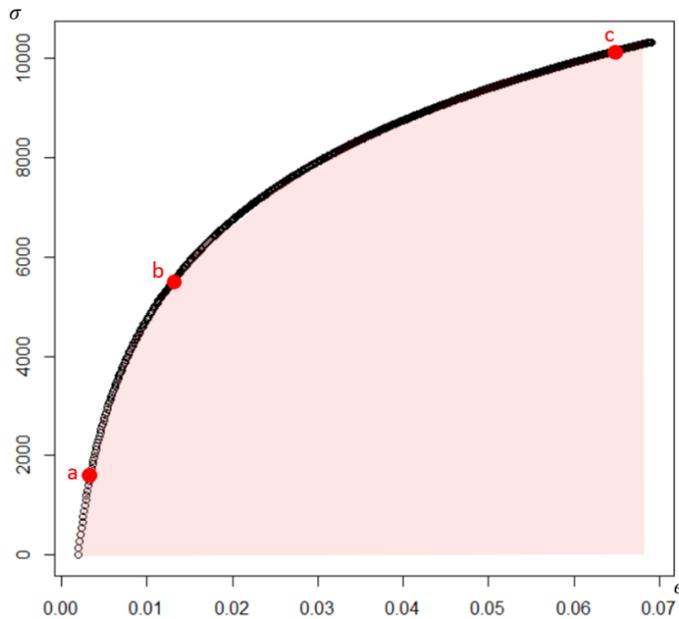
Si un material o elemento estructural se somete a un ensayo cuasi estático, la tenacidad puede medirse como:

---

<sup>22</sup> GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 79.

$$E_{ten} = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \sigma(\epsilon) d\epsilon$$

Figura 15. **Tenacidad**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

La tenacidad es el área bajo toda la curva esfuerzo deformación unitaria.

Por definición, la tenacidad es siempre mayor a la resiliencia.

#### 1.5.8.4. **Endurecimiento plástico**

El endurecimiento por deformación (también llamado endurecimiento en frío o por acritud) es el endurecimiento de un material por una deformación plástica a nivel macroscópico que tiene el efecto de incrementar la densidad de dislocaciones del material. A medida que el material se satura con nuevas

dislocaciones, se crea una resistencia a la formación de nuevas dislocaciones y a su movimiento. Esta resistencia a la formación y movimiento de las dislocaciones se manifiesta a nivel macroscópico como una resistencia a la deformación plástica.

“En cristales metálicos, el movimiento de las dislocaciones es lo que produce la deformación plástica (irreversible) a medida que se propagan por la estructura del cristal. A temperaturas normales cuando se deforma un material también se crean dislocaciones, en mayor número de las que se aniquilan, y provocan tensiones en el material, que impiden a otras dislocaciones el libre movimiento de estas. Esto lleva a un incremento en la resistencia del material y a la consecuente disminución en la ductilidad”<sup>23</sup>.

## **1.6. Histéresis**

La histéresis es la tendencia de un material a conservar una de sus propiedades en ausencia del estímulo que la ha generado. Se pueden encontrar diferentes manifestaciones de este fenómeno. Por extensión se aplica a fenómenos que no dependen solo de las circunstancias actuales, sino también de cómo se ha llegado a esas circunstancias.

La curva de histéresis muestra la curva de deformación de un material. Sea cual sea el material específico, la forma tiene características similares.

Al principio, la deformación requiere un mayor esfuerzo. Este intervalo es la llamada zona reversible.

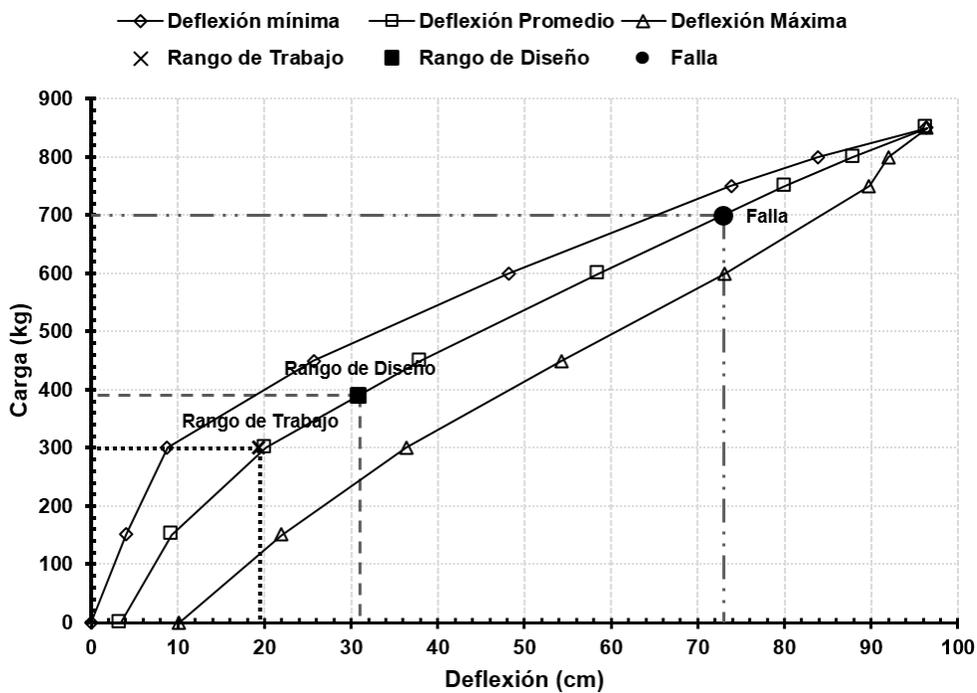
En un determinado punto, la deformación se produce de forma proporcional. En ese punto se inicia la denominada zona lineal.

---

<sup>23</sup> GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 81.

Finalmente, se llega un instante a partir del cual el material tiende a comportarse plásticamente, siendo esta zona caracterizada por una transición en la cual la deformación aumenta mientras que el esfuerzo no lo hace.

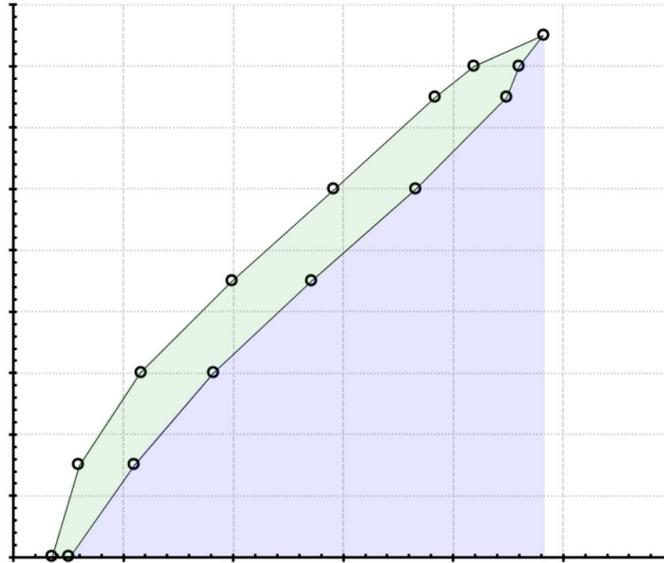
Figura 16. **Curvas de histéresis para proceso de carga y descarga de un poste**



Fuente: elaboración propia, empleando Excel.

La gráfica representa el proceso de carga y descarga en ciclos sucesivos. La histéresis se caracteriza por el hecho de que el material no tiene la misma trayectoria de carga y descarga.

Figura 17. **Hoja de histéresis**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

El área verde constituye la hoja de histéresis. Esta región constituye la cantidad de energía que el material es capaz de disipar en forma de deformación permanente, calor, fisuración. El área bajo el límite inferior de la curva de histéresis constituye la energía que el material puede transformar como energía cinética.

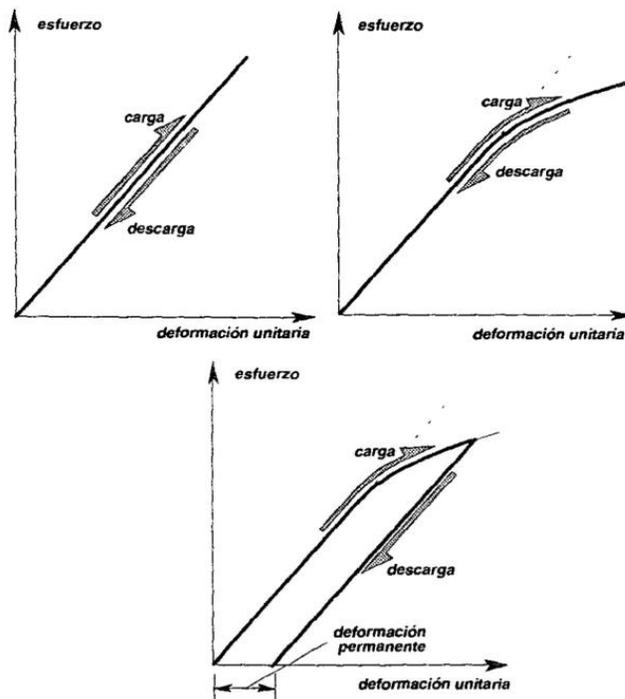
La histéresis de un material también constituye una medida de a capacidad de disipar energía. Entre mayor sea la energía disipada por un material, mayor será la histéresis del mismo (lo que es equivalente a una región de absorción de energía menor).

### 1.6.1. Materiales y elementos estructurales elásticos e inelásticos

Por definición, el comportamiento elástico implica la ausencia de cualquier deformación permanente debido a que se haya aplicado y retirado la fuerza.

“Algunos materiales exhiben una relación esencialmente lineal entre esfuerzos y deformaciones, y se denominan materiales linealmente elásticos. Otros materiales muestran alguna curvatura en sus relaciones esfuerzo deformación, y se denominan materiales no linealmente elásticos. En ambos casos la curva de carga y de descarga es la misma. Un tercer caso es el material inelástico, en el cual la descarga no ocurre siguiendo la misma trayectoria de la carga y se presenta deformación permanente”<sup>24</sup>.

Figura 18. Comportamiento de materiales elásticos y elastoplásticos



Fuente: GARCÍA REYES, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 121.

<sup>24</sup> GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 85.

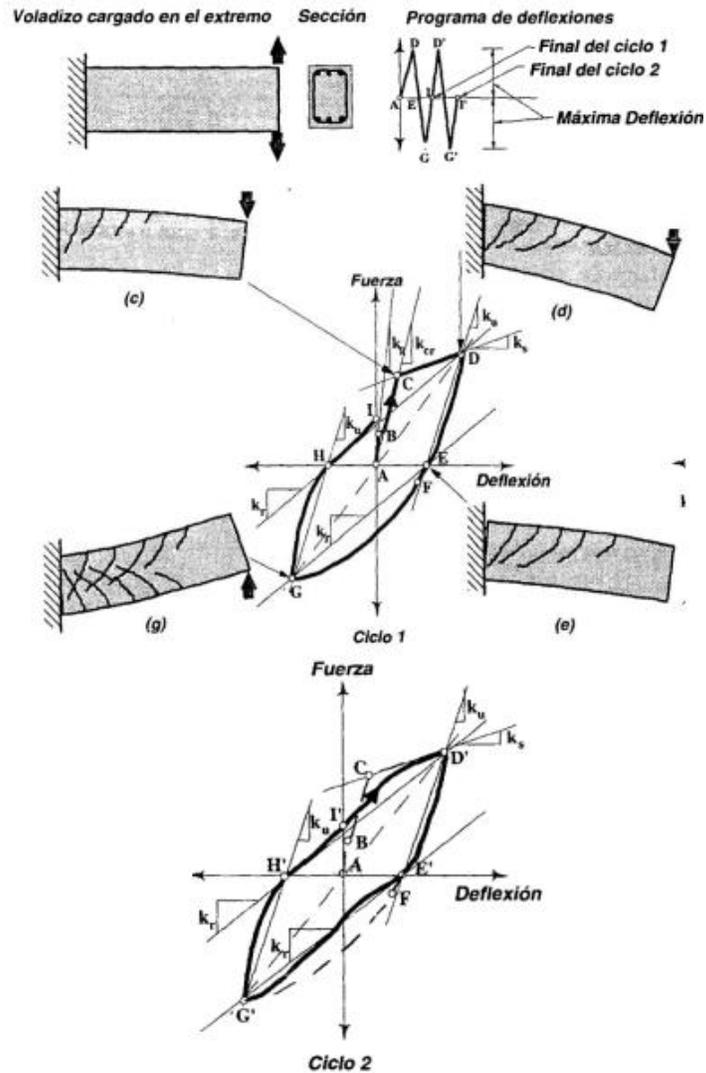
En general, la clasificación anterior hace referencia al comportamiento del material en el rango inicial de carga, cuando los esfuerzos y las deformaciones son pequeñas.

### **1.6.2. Concreto estructural**

El concreto reforzado es la unión de dos materiales con propiedades mecánicas totalmente diferentes. Para solicitaciones estáticas, las características de los dos materiales han obligado a respaldar los criterios de diseño con investigaciones experimentales.

Con el fin de ilustrar el comportamiento histerético de elementos de concreto reforzado, se presenta la respuesta ante cargas alternantes de una viga en voladizo, con refuerzo longitudinal simétrico. La viga se somete a un programa de deformaciones consistente en dos ciclos completos de deflexiones verticales iguales en las dos direcciones. Las deformaciones se logran por medio de fuerzas verticales aplicadas en el extremo libre del voladizo. Se supone que el refuerzo longitudinal de la viga está adecuadamente anclado de tal manera que no haya problemas de adherencia del refuerzo. Igualmente, se supone que dispone de suficiente refuerzo transversal.

Figura 19. Comportamiento del concreto bajo cargas cíclicas



Fuente: GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 124.

En la figura se muestra el primer ciclo de respuesta en términos de la fuerza aplicada y del desplazamiento vertical en el extremo libre del voladizo. El primer cuarto de ciclo de respuesta muestra tres etapas bastante bien definidas: AB, BC v CD. La etapa AB representa la respuesta de la viga antes de que

ocurra fisuración del concreto en tensión en la parte superior de la sección. La aparición de la primera fisura, usualmente en la base del voladizo, reduce apreciablemente la rigidez de la viga.

Esta reducción es mayor al comienzo, cerca a B, y luego va disminuyendo gradualmente en la medida que se acerca al punto C; y es consecuencia de la mayor fisuración, de la aparición de deformaciones en el rango inelástico del concreto, de la reducción de la zona de compresión al subir la localización del eje neutro de la sección, y del resbalamiento del acero de refuerzo debido a la disminución de su adherencia al concreto. La reducción en rigidez puede verse a través de la diferencia entre  $k_g$  y  $k_cR$ ; corresponde la primera a la sección no fisurada y la segunda a la sección fisurada, cuando el refuerzo en tensión está llegando al punto de fluencia.

En el punto C el acero superior de la viga, el cual está en tensión, fluye llegando a  $f_y$ . En este punto, la viga típicamente tiene una serie de microfisuras de diferente longitud vertical, con su trayectoria dictada por el estado de esfuerzos principales que existen en una viga no fisurada.

“Es importante anotar que el comportamiento descrito corresponde al de un elemento que disipa energía por flexión. Para lograr este comportamiento debe garantizarse que el elemento no falle por esfuerzos cortantes o por ausencia de un refuerzo transversal de confinamiento adecuado”<sup>25</sup>.

### **1.6.3. Modelos matemáticos de histéresis**

El comportamiento inelástico de elementos estructurales construidos con diferentes materiales es complejo y sensitivo a un gran número de variables. En

---

<sup>25</sup> GARCÍA, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 124.

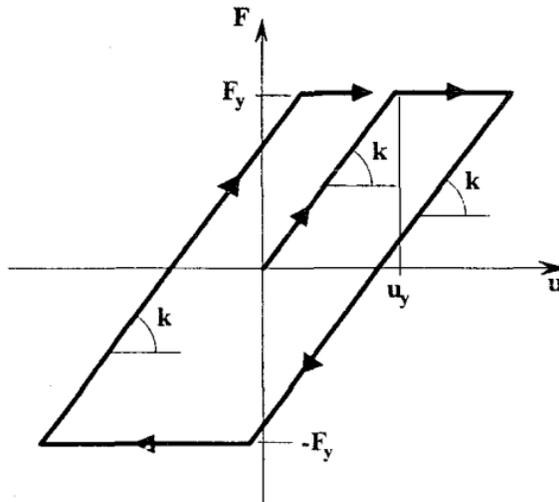
general, dentro del alcance de toda investigación experimental, se formula un modelo matemático que permita describir, lo más fielmente posible, el fenómeno investigado. Por esta razón, el número de modelos matemáticos de histéresis ha aumentado al ritmo de la creciente investigación en el tema. Muchos de ellos son derivaciones y refinamientos de modelos anteriores. Se describirán tres modelos de histéresis: el elastoplástico, el de Rarnberg-Osgood y a un modelo de rigidez degradante.

#### **1.6.3.1. Modelo elastoplástico**

El modelo más simple para describir la histéresis de curvas fuerza-desplazamiento es el modelo elastoplástico.

El modelo elastoplástico tiene una descripción matemática relativamente simple y su implementación dentro de algunos de los métodos de solución relativamente sencilla. Basta reemplazar el término  $k_u$  de las ecuaciones de equilibrio dinámico por la fuerza que efectivamente lleva el resorte, la cual ya no depende directamente de la deformación  $u$  del sistema, dado que se presentan deformaciones inelásticas.

Figura 20. **Modelo elastoplástico**

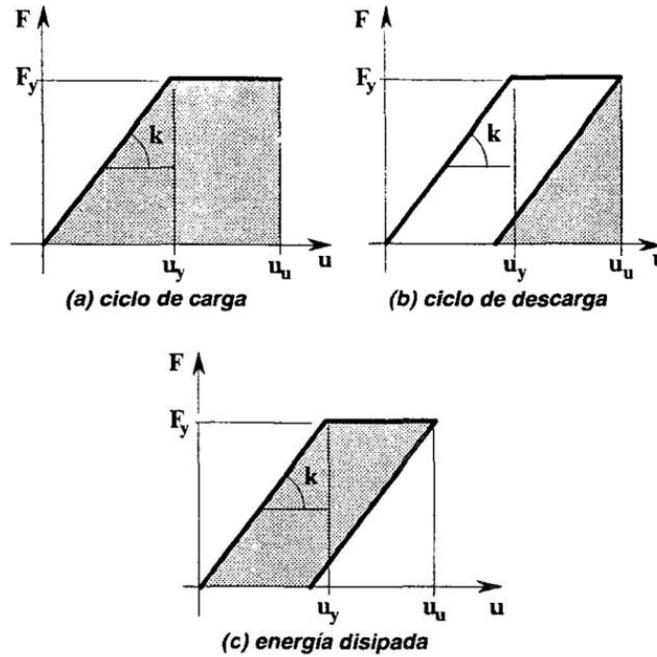


Fuente: GARCÍA, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 135.

Dentro del modelo elastoplástico, el material se comporta como un material totalmente elástico, con rigidez  $k$ , hasta que llega al nivel de la fuerza de fluencia  $F_y$ , y a este punto hay deformación sin que se presente un aumento en la fuerza.

La acumulación de energía de deformación corresponde al área bajo la curva de carga. Cuando hay una descarga, la energía de deformación que el sistema trasfiere a energía cinética corresponde al área bajo la curva de descarga. La diferencia entre las dos áreas corresponde a energía disipada por el sistema y que se convierte en calor, ruido u otros tipos de energía.

Figura 21. **Energía acumulada, disipada y transformada en el modelo elastoplástico**



Fuente: GARCÍA, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 135.

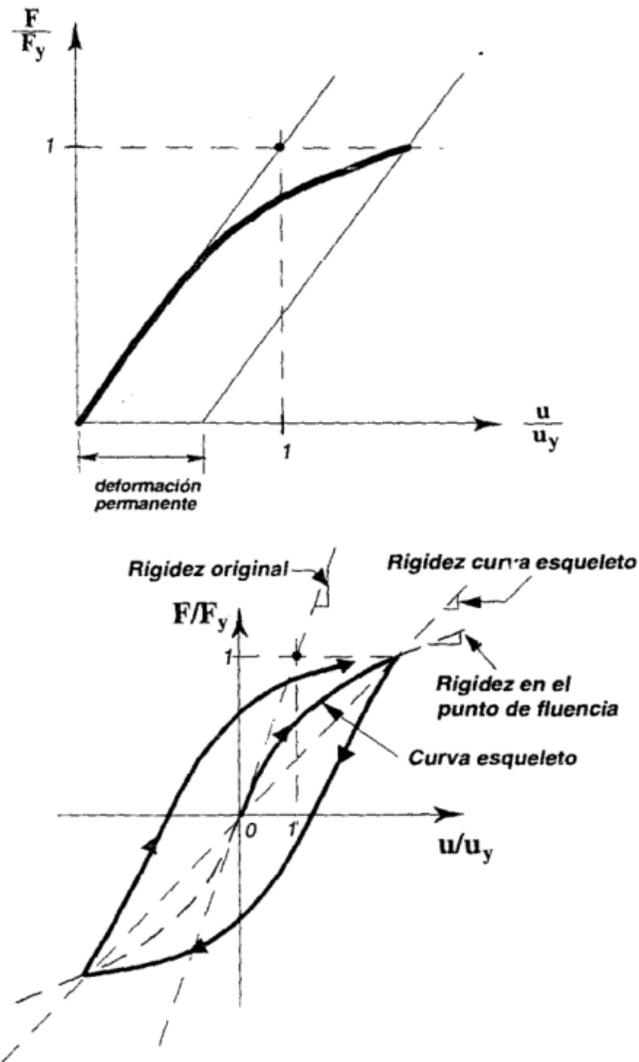
#### 1.6.4. Modelo de Ramberg-Osgood

Un modelo de histéresis que se ajusta a las curvas fuerza-deformación de varios materiales, fue desarrollado por W. Ramberg y R. Osgood en 1943.

El modelo está descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{u}{u_y} = \frac{F}{F_y} + \alpha \left( \frac{F}{F_y} \right)^r$$

Figura 22. Modelo de Ramberg-Osgood



Fuente: GARCÍA, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 140.

La definición de  $F_y$ , y  $U_y$ , está basada en la medición del límite proporcional en el ensayo de un material inelástico por el método del corrimiento. El parámetro  $\alpha$  define la rigidez de la curva esqueleto,  $k_{cr}$ ; y está relacionada de la siguiente manera con la rigidez original  $k_g$ :

$$k_{cr} = \left(\frac{1}{1} + \alpha\right) k_g$$

El exponente  $r$ , en conjunto con  $\alpha$ , definen la rigidez en el punto de fluencia,  $k_g$ , de la siguiente manera:

$$r = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)$$

$$\frac{k_s}{k_g} = \gamma$$

Dada la gran complejidad del modelo, se ha simplificado a una forma funcional en términos del esfuerzo y a la deformación unitaria:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{C}\right)^m$$

En donde tanto  $C$  como  $m$  son parámetros. El modelo describe una parte que es la deformación elástica y una parte que corresponde a una deformación permanente. Si se reescribe el modelo tomando en cuenta que el esfuerzo está en función de la deformación unitaria y se hace supuesto respecto a la parte elástica y la uniformidad del material, el modelo se puede reescribir como:

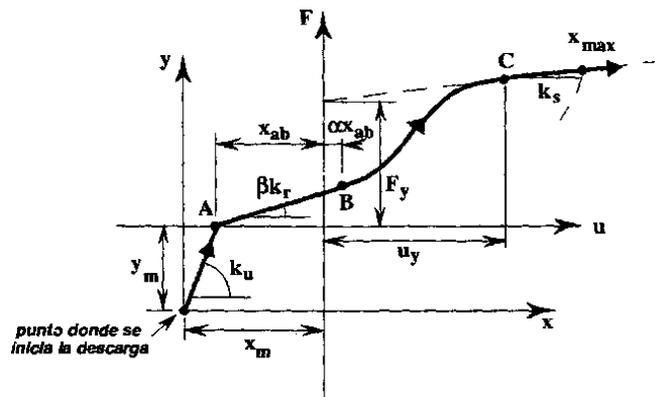
$$\sigma = \beta_0 + \beta_1 \ln(\epsilon)$$

#### **1.6.4.1. Modelo de degradación de rigidez**

Este modelo es especialmente bueno para modelar la respuesta de estructuras de concreto reforzado con características de degradación de rigidez (tal es el caso de la mampostería de concreto).

En este modelo la respuesta se describe por medio de segmentos rectos. La parte matemática del modelo es algo compleja dada la gran cantidad de posibilidades de rigidez durante la recarga y la descarga del elemento. Posteriormente, se han realizado numerosos estudios donde se han evaluado las bondades de diferentes modelos, muchos de los cuales permiten realizar simplificaciones importantes que reducen el trabajo numérico.

Figura 23. **Modelo de degradación de rigidez**



Fuente: GARCÍA, Luis. *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. p. 144.

El modelo permite simular el efecto que tienen las fisuras dentro de una estructura de concreto que se encuentra subreforzado o estructuras de mampostería (muros de corte).

Una variación del modelo simula la degradación de rigidez como transiciones de polinomios de tercer o mayor grado, planteando la hipótesis de que el punto de inflexión es el punto en dónde se produce la fisura.

### 1.6.5. Ductilidad

La ductilidad es una propiedad que presentan algunos materiales, como las aleaciones metálicas o materiales asfálticos, los cuales bajo la acción de una fuerza, pueden deformarse plásticamente de manera sostenible sin romperse, permitiendo obtener alambres o hilos de dicho material. A los materiales que presentan esta propiedad se les denomina dúctiles. Los materiales no dúctiles se califican como frágiles. Aunque los materiales dúctiles también pueden llegar a romperse bajo el esfuerzo adecuado, esta rotura solo sucede tras producirse grandes deformaciones.

En otros términos, un material es dúctil cuando la relación entre el alargamiento longitudinal producido por una tracción y la disminución de la sección transversal es muy elevada.

En postes de concreto reforzado, la ductilidad es proveída por el refuerzo transversal y longitudinal que no está sometido a presfuerzo.

La ductilidad se clasifica en:

- Ductilidad de curvatura: cuando la ductilidad se mide con respecto a la curvatura de la sección del elemento estructural. La curvatura se define como el cociente entre el momento flector aplicado y la rigidez de la sección.
- Ductilidad de rotación: cuando la ductilidad se mide con respecto a la rotación que tiene un sector longitudinal del elemento estructural. La rotación se define como la pendiente de la línea elástica del elemento

medida con respecto a la posición original del eje longitudinal del elemento.

### **1.6.6. Aplicación a la dinámica de estructuras**

El limitar el estudio de la dinámica estructural a sistemas linealmente elásticos reduciría su rango de aplicación enormemente; pues la gran mayoría de los materiales estructurales muestran dentro del rango de esfuerzos utilizados en la práctica, en alguna medida, características inelásticas (recuérdese que el diseño de marcos especiales de concreto reforzados toma en cuenta la ductilidad del marco).

“Algunos materiales como el concreto son inelásticos en casi todo el rango útil de esfuerzos. Además, en la respuesta de estructuras sometidas a los efectos de sismos fuertes, seguramente estas actuarán más allá del rango elástico: permitiendo que parte de la energía que impone el movimiento sísmico se pierda como energía disipada; reduciendo la energía que se convierte en energía cinética y disminuyendo las fuerzas inerciales a que se ve sometida la estructura. En principio, en el análisis de la respuesta dinámica de una estructura, hay necesidad de disponer de una relación fuerza-desplazamiento que describa lo que ocurre en la estructura, para cualquier nivel de desplazamiento y a cualquier velocidad de deformación, durante una serie de solicitaciones alternantes”<sup>26</sup>.

Dado que una falla frágil en un material o sistema estructural viola el objetivo de que la sobreviva a cargas dinámicas, se buscan maneras de disponer y diseñar los materiales estructurales para que respondan dinámicamente en el rango inelástico, sin pérdida grave de la resistencia y

---

<sup>26</sup> GARCIA REYES, L. Diseño estructural aplicada al diseño sísmico. p. 50

estabilidad del sistema estructural. Esta particularidad de los materiales de resistir deformaciones en el rango inelástico sin falla se ha enmarcado dentro de términos tales como ductilidad y tenacidad.

La aplicación de la curva de histéresis permite determinar el grado de disipación de energía de un sistema estructural junto a los esfuerzos asociados, que permite la calibración del sistema para que cumpla con los requerimientos dinámicos y de resistencia.

## **2. MARCO METODOLÓGICO**

### **2.1. Ensayos de postes a flexión**

Uno de los factores importantes que intervienen en el diseño y uso económico de los postes para el soporte de páramos y líneas eléctricas es el valor de la tensión máxima de la fibra para los diferentes tipos de postes. Para obtener información sobre esta característica, pruebas mecánicas en postes de tamaño natural han sido realizadas por numerosos investigadores.

Estos ensayos se han realizado de diferentes formas, utilizando máquinas de ensayo, sosteniendo la base de poste horizontalmente en una cuna y aplicando carga puntual o colocando los postes en la tierra y aplicando carga en la punta (usualmente con polipasto).

En este trabajo se describe el método de Cantiléver, este es conveniente dado la facilidad de reproducción, además de ser el método de ensayo utilizado en la Sección de Estructuras del Centro de Investigaciones de Ingeniería.

#### **2.1.1. Normas relacionadas**

- Calidad de los postes

Para postes de concreto presforzado se sugiere la norma ASTM C1089. La norma cubre postes de concreto presforzado fundido para usar como soporte estructural de alumbrado público, señales de tráfico y transmisión, distribución y líneas de comunicación.

La norma da las bases de aceptación de postes de concreto centrifugado presforzado. La aceptabilidad depende de los resultados de las pruebas de flexión a gran escala (tamaño natural), siendo esta comparada con la base de la certificación del producto (es decir, el diseño del poste) y los datos de pruebas históricas de otros postes iguales o más grandes. La aceptación de un poste depende de los requisitos de resistencias especificados por el comprador.

La norma exige un recubrimiento del concreto de acero de 19 mm. Para los postes de alumbrado público, se requiere un recubrimiento de 13 mm.

El espaciado de la espiral de hacer debe tener un máximo de 102 mm, excepto en los extremos (medidos desde la parte superior o inferior hasta una distancia de 305 mm) donde el espacio máximo será de 25 mm.

Los postes deben diseñarse para resistir una carga máxima. La capacidad máxima del poste se determinará de acuerdo con la guía PCI para el diseño. Dónde los códigos locales lo requieran, las cargas sísmicas se deben considerar en el diseño de los postes (el caso de Guatemala).

Con respecto a las tolerancias, la longitud no debe variar en más de 50 mm mas 6 mm por cada 3 metros de longitud. El diámetro exterior no debe variar en más de 6mm y el grosor de pared no debe ser menor al 88 % del espesor de diseño o no más de 6mm menos que el grosor de diseño (el que se mayor). La masa no debe variar en más de 10 % de la de diseño.

Se tolera una variación de la posición del refuerzo longitudinal de no más de 6 mm para elementos individuales y no más de 3 mm para el centroide del grupo. El refuerzo en espiral debe estar dentro de 38 mm de su ubicación

especificada, excepto en los extremos, donde la ubicación del espaciado debe estar dentro de 6 mm.

#### **2.1.1.1. Ensayo de los postes**

La norma ASTM C1089 especifica que los postes deben ser ensayados sujetos de la base (hasta la línea de tierra) y sometidos a cargas puntuales de flexión en la punta. La metodología de ensayo adoptada en el Centro de Investigaciones de Ingeniería se basa en la norma ASTM D1036, método estándar de estático para postes de madera. Aunque la norma sea específica para postes de madera, la metodología de ensayo puede ser extrapolada a todos los tipos de postes, dado que se basa en un ensayo tipo Cantiléver para elementos sometidos a flexión en forma de voladizo.

La norma exige la medición inicial (previo al ensayo) del peso, longitud (25 mm de precisión como mínimo), clase, circunferencia en la base (línea de tierra y fondo) y punta, diámetro en cada extremo, ubicación del centro del poste y espesor de pared. Además de las medidas iniciales, se sugiere una inspección del poste para identificar posibles irregularidades que puedan reducir la resistencia de los postes.

Los resultados del ensayo consisten en el ploteo de la curva carga-deflexión y cálculo del máximo esfuerzo de fibra extrema por carga en la línea de tierra (empotramiento).

El esfuerzo de la fibra extrema por carga en la línea se calcula como:

$$F = \frac{32\pi^2 P(L - \Delta_L)}{C^3}$$

Donde:

- $F$  es el esfuerzo en  $MPa$
- $P$  es la carga aplicada en  $N$
- $L$  es la distancia desde la línea de tierra al punto de carga en  $mm$
- $\Delta_L$  es la deflexión en el punto de carga en  $mm$
- $C$  es la circunferencia en la línea de tierra en  $cm$

### **2.1.2. Método de Cantiléver**

Consiste en el sistema de apoyo y carga de un poste en voladizo. Se simula un empotramiento en la base y se aplica carga puntual cerca de la punta. Los esfuerzos máximos se darán en la línea de empotramiento, dado que es el punto en donde se concentra el mayor momento y corte (condición de voladizo).

En el método de ensayo cantiléver, el poste es sujetado de forma segura en la sección inferior a la línea de tierra (la línea de tierra, es la longitud de empotramiento que corresponde al 10 % de la longitud del poste más 40 centímetros) en una posición horizontal. La carga se aplica cerca de la punta del poste por medio de una línea de tensión.

En la ilustración se presenta un esquema del aparato para el respectivo ensayo. El poste se apoya hasta la línea de tierra. Este apoyo debe restringir los movimientos verticales, horizontales y de rotación.

A tres cuartos de la distancia desde la línea de tierra al punto de aplicación de la carga, se colocará un riel con la finalidad de minimizar los movimientos verticales en ese punto y minimizar los esfuerzos producidos por el peso del

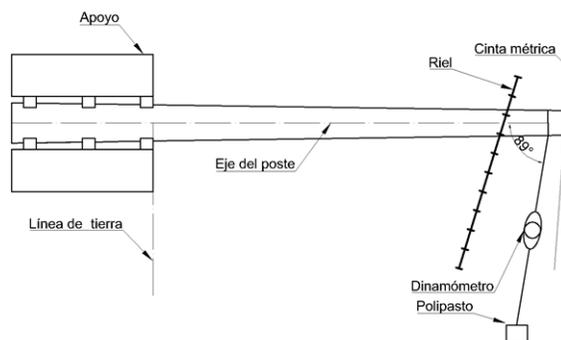
poste. Este soporte debe carecer de fricción asociada con la deflexión del poste.

La carga se aplica a 30 cm de la punta del poste, por medio de un polipasto. La línea de carga debe mantenerse al nivel de punto de aplicación de carga y el polipasto. La carga debe ser aplicada de forma continua hasta que el poste falle (o hasta la carga máxima que provea el equipo).

La línea de carga debe ser asegurada alrededor del poste en el punto de carga. Un dinamómetro se coloca en serie con la línea de carga y el polipasto con el fin de registrar las cargas aplicadas, así como posibles pérdidas de carga repentinas asociadas a fallas.

Las deflexiones son medidas en el punto de aplicación de carga con una cinta métrica.

Figura 24. **Planta: ensayo de postes por el método de Cantiléver**



Fuente: elaboración propia, empleando AutoCAD.



### **3. PROCESAMIENTO DE DATOS**

#### **3.1. Matemáticas para el modelo de Ramberg-Osgood**

En esta sección se expondrán los fundamentos básicos para la realización de un modelo estadístico, en particular, del modelo de Ramberg Osgood.

Un modelo estadístico es la forma que puede tomar un conjunto de datos obtenidos de un muestreo de datos con comportamiento aleatorio. Son aquellos modelos matemáticos que usan la probabilidad y que incluye un conjunto de asunciones sobre la generación de algunos datos muestrales, de tal manera que se asemeje a la población mayor.

En el ensayo de un elemento estructural a flexión, la población representa todos las posibles parejas carga-deformación que pueden ser generadas, por lo tanto, un muestreo es representado por las parejas carga-deformación obtenidas en un ensayo.

Se asumirá que el comportamiento de los sistemas estructurales depende únicamente del material, geometría y carga o tipo de ensayo. Otros factores como condiciones ambientales, errores de medición, estado del material, etc., serán reunidos en una sola variable de error, la cual se considerará aleatoria. Es esta variable de error la que provee al modelo su característica de probabilístico o no determinístico.

### 3.1.1. Procedimiento para la construcción de un modelo probabilístico

Para definir formalmente un modelo probabilístico, es necesario hacer un breve recordatorio de algunos conceptos matemáticos.

#### 3.1.1.1. Variables aleatorias

Se define una variable aleatoria como una función que asigna a cada elemento del conjunto de espacio muestral un número real. Formalmente:

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria es una función:

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Donde  $\Omega$  el espacio muestra,  $F$  el conjunto potencia o familia de eventos y  $P$  las probabilidades.

Se dice que  $X$  es una variable aleatoria discreta si el número de valores que puede tomar es contable.

Se entiende por conjunto contable aquel conjunto al cual se puede establecer una biyección entre sus elementos y los números naturales.

Dado el comportamiento de un material o sistema estructural se asume que se comporta de forma continua al aplicarse carga, la variable aleatoria de deformación se considerará continua.

Una variable aleatoria es continua si  $X$  puede tomar valores dentro de un intervalo. Se puede demostrar que un intervalo  $[a, b] \in \mathbb{R}$  donde  $a < b$  no es un conjunto contable, es decir, no se puede establecer una biyección entre todos los elementos del intervalo y los números naturales.

Sea  $(\Omega, F, P)$  un espacio de probabilidad y  $X$  una variable aleatoria continua sobre  $\Omega$ . La función de distribución de  $X$ ,  $F(x)$  está dada por:

$$F(x) := P(X \leq x) \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Si la función de distribución es continua, también, lo será la variable aleatoria.

La función de distribución tiene como propiedades

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow F(x_1) \geq F(x_2)$$

Para una variable aleatoria continua  $X$  se tiene que, para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ :

$$P(X = x) = 0$$

Si la función de distribución es continua, es decir,  $F(x)$  es una función de distribución de una variable aleatoria continua  $X$ . La función de densidad de probabilidad para  $X$ ,  $f(x)$ , está dada por:

$$f(x) = \frac{d[F(x)]}{dx}$$

Se puede deducir que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Si  $f(x)$  es una función de densidad para la variable aleatoria continua  $X$ , entonces:

$$f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Si  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad  $f(x)$  y  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq b$ . Entonces la probabilidad de que  $X$  esté en  $[a, b]$  está dada por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Se define la esperanza matemática para variables continuas como:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Y la varianza para variables continuas como:

$$V(x) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

“La esperanza matemática puede ser interpretada, intuitivamente, como el valor más frecuente al realizar muchos experimentos independientes de la misma naturaleza”<sup>27</sup>.

En términos de álgebra lineal, la esperanza se puede interpretar como un operador lineal, es decir, cumple con la siguiente propiedad:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } X, Y \text{ v. a. c. : } E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

La varianza puede ser interpretada más fácilmente como el cuadrado de la dispersión. Es decir, una medida que indica lo alejado que están los valores a sus medias o esperanzas.

La varianza no es un operador lineal, por lo que sus propiedades más importantes son:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}: V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$$

$$\forall X, Y \text{ v. a. c. : } V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\forall X, Y \text{ v. a. c. : } V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$$

Se define la covarianza como:

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)])$$

Se dice que, si dos variables aleatorias (discretas o continuas) son independientes  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

---

<sup>27</sup> WACKERLY, D.; W., Mendenhall; SCHEAFFER, R. *Estadística matemática con aplicaciones*. p. 49.

Tanto la esperanza matemática como la varianza dependen de la función de densidad de probabilidad. Se presentarán algunas distribuciones notables y útiles para la naturaleza de este trabajo.

### 3.1.1.2. Distribuciones de probabilidad importantes

Una de las distribuciones más importantes en las ciencias es la distribución normal o gaussiana. Se dice que, si una muestra es suficientemente grande, se puede aproximar su distribución a una normal (esto se enuncia en el teorema de límite central).

Una variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución de probabilidad normal si y solo si la función de densidad de  $X$  es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Para simplificar la notación, si  $X$  se distribuye normalmente, será denotado por  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .

Nótese que, para  $X \sim N(\mu, \sigma)$ :

$$E(X) = \mu \text{ \& } V(X) = \sigma^2$$

Además de la distribución normal, para las técnicas de inferencia estadística es importante definir:

- Distribución chi-cuadrada: inferencia con respecto a la varianza de una población normal.

- Distribución t-student: inferencia sobre la media (o diferencia de media) de una población normal.
- Distribución F-Fisher: inferencia con respecto a la diferencia de dos varianzas de poblaciones normales.

Sea  $\{X\}_{i=1}^n$  una muestra aleatoria tal que  $\forall i, X_i \sim N(\mu, \sigma)$ . Entonces,  $\forall i, Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$  son independientes y

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Tiene una distribución chi-cuadrada con  $n$  grados de libertad ( $\sim \chi^2(n)$ ).

Si  $Z \sim N(0,1)$  y  $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ , entonces:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/n}}$$

Tiene una distribución t-student con  $v$  grados de libertad ( $T \sim T(v)$ ).

Se dice que tiene una distribución F-Fisher con  $v_1$  grados de libertad en el numerador y  $v_2$  grados de libertad en el denominador. Por ejemplo, se tiene que:

Sean  $\chi_1^2 \sim \chi^2(v_1)$  y  $\chi_2^2 \sim \chi^2(v_2)$ , entonces:

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2}$$

### 3.1.1.3. Estimación puntual

A cada muestra de observaciones independientes, se le asocia un único valor como aproximación del valor de un determinado parámetro. Por ejemplo, se tiene que  $\{X\}_{i=1}^n$  es una muestra aleatoria e independiente tal que  $\forall i, X_i \sim N(\mu, \sigma)$ , entonces, un estimador para  $\mu$  puede ser el conocido promedio aritmético, definido como  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Un estimador es una regla que establece cómo calcular una estimación basada en las mediciones contenidas en una muestra.

Se pide que un estimador posea dos propiedades principales:

- Distribución centrada en el parámetro objetivo
- Varianza mínima

Formalmente:

Sea  $\hat{\theta}$  un estimador puntual de un parámetro  $\theta$ . Se dice que  $\hat{\theta}$  es un estimador insesgado si:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

El sesgo se define como:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Algunos estimadores comunes son:

Figura 25. **Estimadores insesgados**

$\theta$	Muestra	$\hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	$V(\hat{\theta})$
$\mu$	$n$	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$\mu$	$\frac{\sigma^2}{n}$
$p$	$n$	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$p$	$\frac{p(1-p)}{n}$
$\mu_1 - \mu_2$	$n_1, n_2$	$\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
$p_1 - p_2$	$n_1, n_2$	$\widehat{p_1 - p_2} = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}$	$p_1 - p_2$	$\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$

Fuente: elaboración propia, empleando LaTeX.

Se ha dicho que un estimador debe ser aquel que tenga mínima varianza.

Si  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$  son dos estimadores insesgados para el parámetro  $\theta$ , cuyas varianzas son  $V(\hat{\theta}_1)$  y  $V(\hat{\theta}_2)$ , respectivamente, entonces la eficiencia relativa de  $\hat{\theta}_1$  con respecto a  $\hat{\theta}_2$  se define como la razón

$$ER(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

De donde, las posibilidades para ER:

- $ER(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) < 1$
- $ER(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) > 1$
- $ER(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = 1$

Siempre se elige el estimado que posea la menor varianza.

### 3.1.2. Regresión lineal

La regresión lineal es un tipo de modelación probabilística de una respuesta que sea función de una o más variables independientes.

$$y = f(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$$

El superíndice de cada variable independiente no es un exponente, sino únicamente un índice.

Un modelo estadístico lineal que relaciona una respuesta aleatoria  $y$  con un conjunto de variables independiente  $\{x^{(i)}\}_{i=1}^k$  es de la forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^{(1)} + \dots + \beta_k x^{(k)} + \epsilon$$

O:

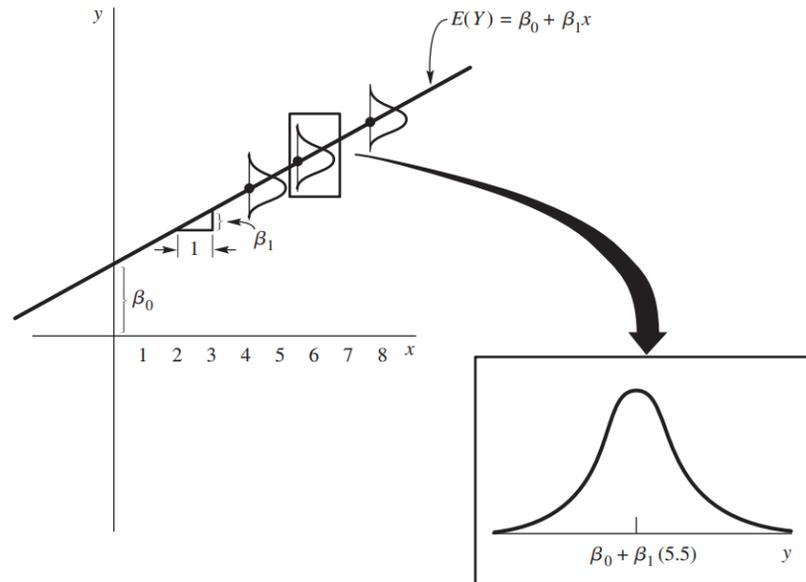
$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x^{(i)} + \epsilon$$

Donde  $\epsilon$  es una variable aleatoria tal que:

$$E(\epsilon) = 0 \text{ y } V(\epsilon) = \sigma^2$$

$\{\beta_i\}_{i=0}^k$  es un conjunto de parámetros desconocidos.

Figura 26. **Modelo probabilístico lineal**



Fuente: WACKERLY, Dennis. *Estadística matemática con aplicaciones*. p. 565.

Son modelos lineales todos aquellos que sean lineales  $\beta_i, \forall i = 0, \dots, k$ .

Otra forma para definir la linealidad es, si todas las derivadas parciales con respecto a los parámetros  $(\frac{\partial y}{\partial \beta_i}, \forall i = 0, \dots, k)$  no depende de ningún parámetro, entonces es modelo lineal.

Un modelo de la forma  $y = \beta_0 x + e^{\beta_1 x} + \beta_2 \sin(x) + \epsilon$  es lineal con respecto a los parámetros  $\beta_i, \forall i = 0, 1, 2$ .

Un modelo de la forma  $y = \beta_0 + \beta_1^2 x + \epsilon$  es no-lineal con respecto a los parámetros  $\beta_i, \forall i = 0, 1$ .

En este trabajo se abordarán los modelos de regresión lineal, siendo este una adaptación del modelo original de Ramberg-Osgood.

### 3.1.2.1. Especificación del modelo general de regresión lineal

Un modelo general de regresión lineal (MGRL) se caracteriza porque en este, la variable dependiente  $y_i$  es explicada por más de una variable independiente. Se considerará que son  $K-1$  las variables independientes del modelo:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \cdots + \beta_K x_{1K} + \epsilon_1 \\ y_2 &= \beta_1 + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \cdots + \beta_K x_{2K} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ y_N &= \beta_1 + \beta_2 x_{N2} + \beta_3 x_{N3} + \cdots + \beta_K x_{NK} + \epsilon_N \end{aligned}$$

Nótese que son  $N$  observaciones de la variable dependiente  $y_i$ . Además, por cada observación de la variable dependiente, se tiene una observación de la variable  $x_{ik}, \forall k = 2, \dots, K$ .

De forma equivalente:

$$y_n = \beta_1 + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + \cdots + \beta_K x_{nK} + \epsilon_n, \forall n = 1, \dots, N$$

Donde  $y_n$  es la variable dependiente en la observación  $n$ ,  $x_{nk}$  y  $\beta_k, \forall k = 2, \dots, K$ , son de manera respectiva, la  $k$ -ésima variable independiente en la observación  $n$  y  $\beta_k$  correspondiente parámetro.  $\epsilon_n$  es el término estocástico.

Nótese que el modelo está compuesto por una parte determinista:

$$\beta_1 + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + \dots + \beta_K x_{nK}$$

Y una parte estocástica representada por el término  $\epsilon_n$ .

En términos matriciales, se puede plantear el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1k} & \dots & x_{1K} \\ 1 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2k} & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nk} & \dots & x_{nK} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N2} & x_{N3} & \dots & x_{Nk} & \dots & x_{NK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{pmatrix}$$

El vector compuesto únicamente por unos, representa el intercepto o constante. Los parámetros  $\beta_k$  se pueden interpretar como las pendientes del hiperplano con respecto a cada variable o como el efecto marginal de dicha variable sobre la variable dependiente.

De forma reducida, se expresará lo anterior como:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

En donde  $Y$  es el vector el cual tiene componentes cada una de las observaciones de la variable dependiente.  $X$  es la matriz de variables independientes en donde el elemento  $x_{nk}$  es la observación  $n$  de la variable independiente  $k$ .  $\beta$  representa el vector de parámetros y  $\epsilon$  es el vector de términos estocásticos.

El arreglo matricial será útil para realizar de forma compacta las pruebas matemáticas estadísticas.

### 3.1.2.2. Supuestos del modelo de regresión lineal

Todo modelo está sujeto a supuestos que ayudan a simplificar su análisis. Los supuestos que se presentarán tienen como objetivo proveer un conjunto de características al modelo, de tal manera que sea posible realizar inferencia estadística en él. Esta inferencia incluye: realizar estimaciones puntuales en los parámetros, realizar intervalos de confianza y pruebas de hipótesis en el modelo.

#### 3.1.2.2.1. Supuestos en la componente determinística

Se supondrá que el tamaño de la muestra  $N$ , es mayor al número de parámetros, denotado como  $K$ . Este supuesto tiene como objetivo el de asegurar la cantidad de grados de libertad necesarios para estimar el modelo.

Anteriormente se expuso que un modelo lineal es aquel que es lineal bajo sus parámetros. Formalmente, el modelo será lineal si  $E(Y|X)$  es lineal bajo el vector de parámetros  $\beta$ .

Se asumirá que el modelo está correctamente especificado, es decir, las variables independientes  $x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nK}$  son las únicas que explican o determinan el comportamiento de  $y_n$ .

Además, se asumirá independencia lineal de las variables explicativas o independientes. En términos simples, se espera que todas las variables explicativas no tengan correlación entre sí. Este supuesto garantiza que la matriz  $X$  sea de rango completo,  $\rho(X) = \min\{K, N\} = K$ , lo que evitará problemas de multicolinealidad (variables repetidas) en la matriz  $X$ .

### 3.1.2.2. Supuestos Gauss Markov

Los supuestos Gauss Markov se hacen sobre el término estocástico, con el fin de facilitar el tratamiento estadístico del modelo.

El primer supuesto Gauss Markov (de ahora en adelante como G.M.) enuncia que la esperanza condicional de los errores (también llamados términos estocásticos) tienen esperanza cero.

$$E(\epsilon_n | x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nK}) = 0, \forall n = 1, \dots, N$$

Es decir, sin importar el valor que adquiriera cada una de las variables independientes, se espera que los términos estocásticos sean cero.

El segundo supuesto G.M. enuncia que, los términos de error  $\epsilon_n, \forall n = 2, \dots, N$ , tienen la misma variabilidad con respecto a la media sin importar el valor que adquieran las variables independientes.

$$V(\epsilon_n | x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nK}) = \sigma^2, \forall n = 2, \dots, N$$

El tercer supuesto G.M. enuncia que los términos de error no presentan autocorrelación, es decir, no es posible explicar la variabilidad de un término de error dada la variabilidad de otro.

$$\text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_s | x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nK}, x_{s2}, x_{s3}, \dots, x_{sK}) = 0, \forall n \neq s, \quad s, n = 1, \dots, N$$

El cuarto supuesto G.M. enuncia que los términos de error se distribuyen normalmente. Es decir:

$$\epsilon_n \sim N(0, \sigma^2), \forall n = 1, \dots, N$$

El primer supuesto G.M. se puede expresar de forma matricial como:

$$E(\epsilon|X) = \mathbf{0}$$

En donde el cero con negrita indica que es un vector compuesto de ceros.

Para expresar el segundo y tercer supuesto de forma matricial, es necesario introducir el concepto de matriz de covarianzas. Dicha matriz está compuesta por todas las posibles covarianzas que pueden ser formadas emparejando los términos de error.

$$\text{Cov}(\epsilon|X) = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_1|X) & \text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_2|X) & \text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_3|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_n|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_1, \epsilon_N|X) \\ \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_1|X) & \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_2|X) & \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_3|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_n|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_N|X) \\ \text{Cov}(\epsilon_3, \epsilon_1|X) & \text{Cov}(\epsilon_3, \epsilon_2|X) & \text{Cov}(\epsilon_3, \epsilon_3|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_3, \epsilon_n|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_3, \epsilon_N|X) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_1|X) & \text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_2|X) & \text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_3|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_n|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_N|X) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(\epsilon_N, \epsilon_1|X) & \text{Cov}(\epsilon_N, \epsilon_2|X) & \text{Cov}(\epsilon_N, \epsilon_3|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_N, \epsilon_n|X) & \dots & \text{Cov}(\epsilon_N, \epsilon_N|X) \end{pmatrix}$$

Nótese que dicha matriz es simétrica de tamaño  $N \times N$ , además, dada la definición de covarianza,  $\text{Cov}(\epsilon_n, \epsilon_n|X) = V(\epsilon_n|X), \forall n = 1, \dots, N$ .

El segundo y tercer supuesto G.M. expresado de forma matricial son:

$$\text{Cov}(\epsilon|X) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov}(\epsilon) = \sigma^2 I$$

Es decir, la matriz de covarianzas de  $\epsilon$  es una matriz escalar  $\sigma^2 I$ .

El cuarto supuesto en forma matricial es:

$$\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

### **3.1.2.3. Propiedades de la variable dependiente**

De ahora en adelante se expondrán todas las propiedades asumiendo los supuestos de las secciones anteriores; es decir, todas las propiedades anunciadas a continuación se basan en que se trata de un modelo general de regresión lineal bajo los supuestos Gauss Markov y supuestos determinísticos.

Como la variable  $y_n$  depende del error aleatorio  $\epsilon_n$ , es de importancia el estudio de las propiedades que sobre la variable dependiente tienen los supuestos Gauss-Markov que se hacen sobre el error; esto es, se determinará la esperanza, varianza y covarianza de  $y_n$  condicionadas a las variables independientes  $x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nK}$ .

#### **3.1.2.3.1. Esperanza condicionada de la variable dependiente**

Dada la forma especificada en forma matricial:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

La esperanza condicionada es:

$$E(Y|X) = E(X\beta + \epsilon|X)$$

Recuérdense que la esperanza matemática es un operador lineal, por lo que:

$$E(Y|X) = E(X\beta|X) + E(\epsilon|X)$$

Dado que el vector  $\beta$  está compuesto únicamente por constantes, y utilizando la propiedad de linealidad de la esperanza matemática, eso es:

$$E(Y|X) = E(X|X)\beta + E(\epsilon|X)$$

Recuérdense que la multiplicación de matrices no es conmutativa, por lo que, al aplicar la propiedad de la esperanza, se debe tomar en cuenta el orden. Recordemos que la matriz  $X$  está compuesta únicamente por variables no aleatorias, por lo que:

$$E(Y|X) = X\beta + E(\epsilon|X)$$

Haciendo uso del primer supuesto Gauss Markov:

$$E(Y|X) = X\beta$$

Es decir, el valor esperado de la matriz de variables dependientes es igual a su parte determinista. Esto implica que, en promedio, los factores estocásticos no influyen el comportamiento esperado de la variable dependiente.

En el contexto de este trabajo, se espera que la respuesta (deformación) de un elemento estructural sometido a carga sea determinado únicamente por su geometría y carga.

### 3.1.2.3.2. Varianza y covarianza de la variable dependiente

Utilizando la definición de covarianza y recordando que en términos matriciales lo que se calcula es la matriz de covarianza de la variable dependiente, se tiene que:

$$Cov(Y|X) = E\{[Y - E(Y|X)][Y - E(Y|X)]'|X\}$$

Donde el apostrofe indica que se está transponiendo dicha matriz. Utilizando el resultado anterior:

$$Cov(Y|X) = E\{[Y - X\beta][Y - X\beta]'|X\}$$

Sin embargo, dada la forma del modelo, nótese que  $Y - X\beta = \epsilon$  por lo que:

$$Cov(Y|X) = E\{\epsilon\epsilon'|X\}$$

Utilizando el segundo y tercer supuesto Gauss Markov, se tiene que:

$$Cov(Y|X) = \sigma^2 I$$

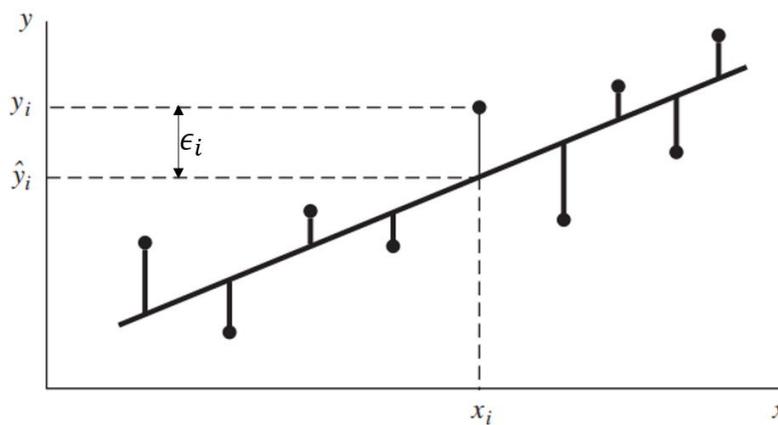
Esto quiere decir que la variable dependiente tiene la misma variación con respecto a su media sin importar cual observación sea, y que no presenta autocorrelación.

Nótese que el parámetro  $\sigma^2$  es desconocido, por lo que posteriormente se procederá a estimarlo.

### 3.1.2.4. Estimación del modelo general de regresión lineal (MGRL)

La intuición de la estimación del modelo es que se desean estimar los parámetros  $\beta$  de tal manera que estos minimicen los errores.

Figura 27. Método de mínimos cuadrados



Fuente: WACKERLY, Dennis. *Estadística matemática con aplicaciones*. p. 569.

Formalmente:

$$S(\beta) = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^2 = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} \epsilon \epsilon'$$

Dada la forma especificada del modelo, es posible sustituir:

$$S(\beta) = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} \epsilon \epsilon' = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} (Y - X\beta)(Y - X\beta)'$$

Si se desarrollan dicho producto, se pueden reescribir como:

$$S(\beta) = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} \epsilon\epsilon' = \min_{\beta_1, \dots, \beta_K} Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta$$

Nótese que esta es una función continua que puede ser derivada. Dado que es un proceso de optimización, se aplican condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial S(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

De dónde se obtienen las ecuaciones normales:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Esta expresión da los estimadores para todos los parámetros del modelo general de regresión lineal; sin embargo, se debe comprobar que estos minimizan la suma de cuadrados de los errores, que son insesgados y que son eficientes.

Para probar que dichos estimadores son los que minimizan la suma de cuadrados residuales, nótese que el Hessiano de dicha función es:

$$H = \frac{\partial^2 S(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}'} = 2X'X$$

Es una matriz definida positiva, lo que garantiza que los estimadores  $\hat{\beta}$  son los que minimizan la suma de cuadrados de los errores.

### 3.1.2.4.1. Propiedades algebraicas de las pendientes $\hat{\beta}$

Nótese que las ecuaciones normales,  $X'X\hat{\beta} = X'Y$ , son funciones lineales de los parámetros  $\hat{\beta}$ .

Los estimadores  $\hat{\beta}$  minimizan la suma de los cuadrados de los errores, es decir:

$$S(\hat{\beta}) = \hat{\epsilon}\hat{\epsilon}'$$

Es mínimo. El término  $\hat{\epsilon}$  representa los residuos generados en el proceso de minimización.

Los parámetros  $\hat{\beta}$  están en función de  $Y$ .

Es fácilmente demostrable que el punto  $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_K, \bar{y})$  está en el hiperplano de regresión, puesto que se satisface la ecuación normal:

$$\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \dots + \hat{\beta}_K\bar{x}_K$$

El promedio de los residuos es cero, es decir,  $\bar{\hat{\epsilon}} = 0$ .

Los vectores  $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \dots, \hat{\epsilon}_N)'$  y  $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{Nk})'$  son ortogonales entre sí para todo  $k = 2, \dots, K$ . Además, estos vectores no presentan correlación.

El promedio de los valores ajustados  $\hat{y}_n$ , es igual al de los valores observados de  $y_n$ , esto es:

$$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

### 3.1.2.4.2. Momentos poblacionales de las pendientes $\hat{\beta}$

La esperanza del vector  $\hat{\beta}$  está dada por:

$$E(\hat{\beta}|X) = E[(X'X)^{-1}X'Y|X]$$

Se sabe que  $Y = X\beta + \epsilon$  por lo que puede sustituir para obtener:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}|X) &= E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \epsilon)|X] \\ E(\hat{\beta}|X) &= E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon|X] \\ E(\hat{\beta}|X) &= E[\beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon|X] \\ E(\hat{\beta}|X) &= E[\beta|X] + (X'X)^{-1}X'E[\epsilon|X] \end{aligned}$$

De las propiedades de esperanza, se sabe que la esperanza de una constante es ella misma y, dado el primer supuesto Gauss Markov, la esperanzan del término estocástico es cero, por lo que:

$$E(\hat{\beta}|X) = \beta$$

Es decir, el estimador  $\hat{\beta}$  es insesgado.

La definición de la matriz de varianzas y covarianzas de  $\hat{\beta}$  se define como:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|X)][\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|X)]'|X\}$$

Utilizando el resultado anterior se tiene que:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = E\{[\hat{\beta} - \beta][\hat{\beta} - \beta]'|X\}$$

Se sabe que:

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'Y - (X'X)^{-1}X'X\beta$$

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'(Y - X\beta)$$

Se sustituye:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = E\{[(X'X)^{-1}X'(Y - X\beta)][(X'X)^{-1}X'(Y - X\beta)]'|X\}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = E\{(X'X)^{-1}X'(Y - X\beta)(Y - X\beta)'X(X'X)^{-1}|X\}$$

Aplicando las propiedades de linealidad de la esperanza y sabiendo que  $Y - X\beta = \epsilon$ , se tiene que:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'E\{(Y - X\beta)(Y - X\beta)'|X\}X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'E\{\epsilon\epsilon'|X\}X(X'X)^{-1}$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'\sigma^2IX(X'X)^{-1}$$

Dado que la matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices y que  $\sigma^2$  es un escalar, se tiene que:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}|X) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Nótese que los elementos de la diagonal de dicha matriz son las respectivas varianzas condicionales para cada  $\hat{\beta}_k, \forall k = 1, \dots, K$  y los términos fuera de la diagonal son  $\text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_h|X), \forall k \neq h, k, h = 1, \dots, K$ . Dado que estas covarianzas no son iguales a cero, existe correlación entre los diferentes componentes del vector  $\hat{\beta}$ .

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_h|X) = \sigma^2(X'X)^{-1}_{kh}, \forall k \neq h, k, h = 1, \dots, K$$

La varianza está dada por:

$$V(\hat{\beta}_k) = \sigma^2(X'X)^{-1}_{kk}, \forall k = 1, \dots, K$$

Por lo que el error estándar de cada estimador es:

$$ee(\hat{\beta}_k) = \sqrt{\sigma^2(X'X)^{-1}_{kk}}, \forall k = 1, \dots, K$$

### 3.1.2.4.3. Teorema de Gauss Markov y eficiencia de los estimadores

$$\hat{\beta}$$

El teorema de Gauss Markov afirma que los estimadores mínimos cuadráticos del modelo de regresión lineal son óptimos no en el sentido de minimizar la suma de cuadrados de los residuos, sino también que la varianza de los mismos es la menos de los de su clase. Dado el modelo de regresión lineal general:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

Y los supuestos de Gauss Markov antes expuestos, el estimador de mínimos cuadrados de  $\beta$  dentro de los estimadores lineales e insesgados, el de mínima varianza (eficiencia), es decir, dado cualquier estimador lineal:

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} + CY$$

Dónde C es una matriz de tamaño  $K \times T$  compuesta de constantes.

La varianza del estimador  $\tilde{\beta}$  es mayor que la correspondiente a la de los estimadores mínimos cuadráticos  $\hat{\beta}$ .

Nótese que:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y + CY \\ \tilde{\beta} &= (X'X)^{-1}X'\epsilon + CX\beta + C\epsilon\end{aligned}$$

Nótese que, para que  $\tilde{\beta}$  sea insesgado se debe tener que  $CX = 0$ . De esa expresión se tiene que:

$$\tilde{\beta} - \beta = [(X'X)^{-1}X' + C] \epsilon$$

Utilizando la definición de matriz de covarianzas:

$$Cov(\tilde{\beta}|X) = E [(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' | X]$$

$$Cov(\tilde{\beta}|X) = E [(X'X)^{-1}X' + C] \epsilon \epsilon' [(X'X)^{-1}X' + C]' | X]$$

$$Cov(\tilde{\beta}|X) = [(X'X)^{-1}X' + C] E[\epsilon \epsilon' | X] [(X'X)^{-1}X' + C]'$$

$$Cov(\tilde{\beta}|X) = \sigma^2 [(X'X)^{-1} + CC']$$

$$Cov(\tilde{\beta}|X) = Cov(\hat{\beta}|X) + \sigma^2 CC'$$

Lo que implica que  $V(\tilde{\beta}_k|X) \geq V(\hat{\beta}_k|X), \forall k = 1, \dots, K$  por lo que  $\hat{\beta}_k$  es el estimador de mínima varianza del conjunto de todos los estimadores insesgados de  $\beta$ .

### 3.1.2.5. Estimación de la varianza de los errores $\sigma^2$

El proceso de estimación de mínimos cuadrados para el modelo general de regresión lineal no proporciona un estimador para la varianza de los errores  $\sigma^2$ . Dado esto, se propone un estimador insesgado de la forma:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - K} \sum_{n=1}^N \hat{\epsilon}_n^2$$

O de forma vectorial:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - K} \hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}$$

Donde K es el número de grados de libertad (cantidad de parámetros estimados), dado que hay K restricciones impuestas sobre los residuos, una por cada ecuación normal o parámetros estimado.

### **3.1.2.6. Bondad de ajuste o coeficiente de determinación**

Al realizar un modelo probabilístico (y cualquier modelo) surge la pregunta de qué tanto el modelo explica las variaciones de la variable dependiente. En el contexto del modelo general de regresión lineal, la pregunta es: ¿en qué medida el hiperplano de regresión estimado se ajusta a los datos?, ¿se cumple que los residuos son pequeños? Es de vital importancia contestar estas preguntas para saber si dicho modelo es adecuado o no.

Dado el estimador de la varianza de los residuos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - K} \hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{N - K} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

Se sabe que:

$$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Si se sustituye  $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$  se tiene que:

$$\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = Y'Y - 2[(X'X)^{-1}X'Y]'X'Y + [(X'X)^{-1}X'Y]'X'X(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = Y'Y - 2Y'X(X'X)^{-1}X'Y + Y'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = Y'Y - \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

O de forma equivalente:

$$Y'Y = (X\hat{\beta})'X\hat{\beta} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$$

De esta manera la suma de los cuadrados de la variable dependiente se puede expresar como la suma de cuadrados de la variable ajustada más la suma de los cuadrados de los residuos.

El coeficiente de determinación centrado en cero es:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}$$

Sin embargo, este coeficiente no presenta una interpretación intuitiva. Dado esto, se procede a determinar el coeficiente de determinación centrado en la media. Para esto, se resta en ambos lados de la descomposición de cuadrados el término  $N\bar{y}^2$

$$Y'Y - N\bar{y}^2 = \hat{Y}'\hat{Y} - N\bar{y}^2 + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$$

Lo cual es equivalente a:

$$\sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2 = \sum_{n=1}^N (\hat{y}_n - \bar{y})^2 + \sum_{n=1}^N \hat{\epsilon}_n^2$$

Es decir, la variación total con respecto a la media se puede descomponer en la variación de la estimación con respecto a la media más la variación de los residuos. Otra forma de interpretar esta descomposición es que la variación total de la variable dependiente es la suma de la variación explicada más la variación no explicada:

$$VT = VE + VnoE$$

Por tanto, coeficiente de determinación se puede centrado en la media se puede calcular como:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y} - N\bar{y}^2}{Y'Y - N\bar{y}^2} = 1 - \frac{\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}}{Y'Y - N\bar{y}^2}$$

El coeficiente de determinación se interpreta como la proporción de la variación muestral de  $y$  que es explicada por el modelo respecto a la variación total. Nótese que  $0 \leq R^2 \leq 1$ , además, entre mayor sea este coeficiente, mayor es la proporción de la variación total que se explica en el modelo.

Cabe destacar que, aunque se desea tener un  $R^2$  cercano a 1, se puede caer en el error de intentar esto violando los supuestos. En orden de prioridad, se desea que el modelo cumpla con todos los supuestos y, posteriormente, tenga una bondad de ajuste alta. También, cabe destacar que la bondad de ajuste es sumamente sensible a la cantidad de variables explicativas añadidas;

entre mayor sea el número de estas, es posible tener una bondad de ajuste alta, sin embargo, se debe fundamentar la inclusión de variables por medio de la teoría.

Si las variables son realizaciones de procesos estocásticos, es necesario verificar que no se está realizando una regresión espuria. Dado que este trabajo no comprende la utilización de variables que son realizaciones de procesos estocásticos, el tratamiento de este tipo de variables no será abordado.

### **3.1.3. Transformación a modelo lineal**

Anteriormente, se describió el modelo general de regresión lineal, así como el método de estimación. El modelo de Ramberg-Osgood sugiere una dependencia no lineal entre el esfuerzo y la deformación, la cual por simplicidad se asumió que es lineal – logarítmica:

$$\sigma = \beta_0 + \beta_1 \log(\epsilon) + u$$

Donde:

- $\sigma$  es una matriz de dimensión  $N \times 1$  la cual contiene todas las observaciones de esfuerzo.
- $\epsilon$  es una matriz de dimensión  $N \times 1$ , la cual contiene todas las observaciones de deformación unitaria.
- $u$  es una matriz de dimensión  $N \times 1$  que contiene todos los errores.

- $\beta_1$  es un escalar que representa la semi elasticidad entre el esfuerzo y la deformación.
- $\beta_0$  es el intercepto al eje del esfuerzo  $\sigma$ .

Nótese que:

$$E(\sigma) = \beta_0 + \beta_1 \log(\epsilon)$$

Es lineal respecto a los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , por lo que se puede decir que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \log \epsilon_1 \\ 1 & \log \epsilon_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log \epsilon_N \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el modelo lineal – logarítmico puede ser reescrito como:

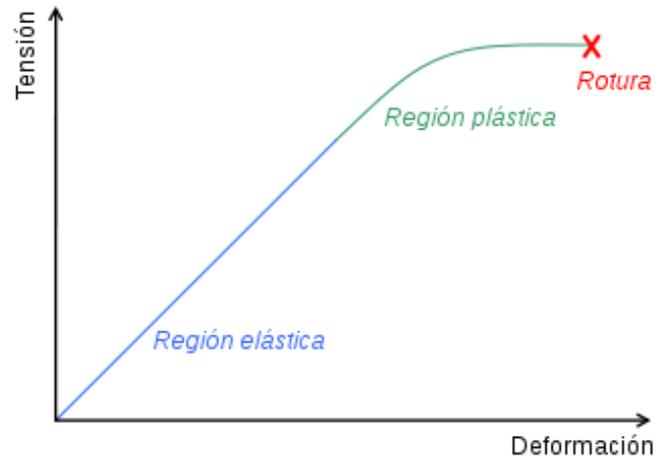
$$\sigma = X\beta + u$$

Modelo que puede ser estimado por medio del método generalizado de mínimos cuadrados.

#### 3.1.4. Determinación de la zona elástica y elastoplástica

El límite elástico, también denominado límite de elasticidad, es la tensión máxima que un material elastoplástico puede soportar sin sufrir deformaciones permanentes. Este límite es la frontera entre la zona elástica y elastoplástica, es decir.

Figura 28. **Zona elástica y plástica en diagrama de esfuerzo deformación unitaria**



Fuente: elaboración propia, empleando AutoCAD.

En términos del modelo estimado, el límite elástico es aquel punto en dónde la relación entre el esfuerzo y la deformación deja de ser lineal. Dado que se estimó un modelo lineal - logarítmico, es necesario estimar un punto (deformación unitaria – esfuerzo) el cual cumpla aproximadamente con dichas características.

Dada la complejidad de las pruebas estadísticas de cambio estructural, en este trabajo de graduación se sugiere un método numérico aproximado para determinar dicho punto.

#### 3.1.4.1. Procedimiento de cálculo

Dado el modelo estimado:

$$\hat{\sigma} = X\hat{\beta}$$

Se determina una grilla de datos tales que:

$$\epsilon_g = \left( \begin{array}{l} \epsilon_0 = \{\epsilon: \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log \epsilon = 0\} \\ \vdots \\ \max[\{\epsilon\}_{n=1}^N] \end{array} \right) \text{ y } |\epsilon_g| \geq 1\,000$$

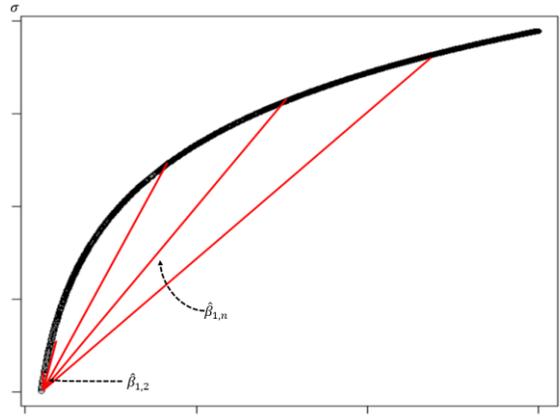
Es decir, se simula una serie de deformaciones unitarias tales que la deformación unitaria inicial sea aquella que produce un esfuerzo cero ( $\{\epsilon: \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log \epsilon = 0\}$ ), y la deformación unitaria final sea la mayor de todas las registradas en los datos utilizados para la estimación del modelo. Además, se ha impuesto la restricción de que el número de deformaciones unitarias simuladas sea mayor a 1 000 ( $|\epsilon_g| \geq 1\,000$ ), para asegurar un espaciamiento mínimo entre deformaciones simuladas.

Dada la matriz  $\epsilon_g$  se calculan los esfuerzos estimados correspondientes:

$$\hat{\sigma}_g = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log \epsilon_g$$

Si se plotea  $\hat{\sigma}_g$  versus  $\epsilon_{cor} = \epsilon_g - \epsilon_0$  ( $\epsilon_{cor}$  es la deformación unitaria corregida, es decir, sin la deformación inicial  $\epsilon_0$ ) se obtiene un gráfico similar al siguiente:

Figura 29. Método de estimación de límite elástico



Fuente: elaboración propia, empleando R.

El proceso restante consta en comparar diferentes pendientes de rectas que parten del origen a puntos sobre la curva. El límite elástico es el máximo punto que tiene una diferencia porcentual absoluta con la derivada en el origen igual o menor al 10 %.

Específicamente, se ajusta el modelo:

$$\hat{\sigma}_{g,n} = \epsilon_{cor,n} \hat{\beta}_{1,n} + u, n = 2, \dots, |\epsilon_g|$$

El subíndice  $g$  denota que se trata de datos simulados (la grilla calculada anteriormente).

El subíndice  $n$  especifica el número de datos (submuestra) que se están utilizando para dicha estimación. Si las series completas son  $\{\epsilon_{cor,n}, \hat{\sigma}_{g,n}\}_{i=1}^{|\epsilon_g|}$ , entonces, las series utilizadas en la estimación son un subconjunto  $\{\epsilon_{cor,n}, \hat{\sigma}_{g,n}\}_{i=1}^n$  tal que  $2 \leq n \leq |\epsilon_g|$ .

Se asume que  $\hat{\beta}_{1,2}$  aproxima a la derivada en el origen.

Dado lo anterior, se procede a calcular las diferencias porcentuales absolutas de las pendientes:

$$\Delta\%_n = \begin{cases} 0, & n = \{1,2\} \\ \left| \frac{\hat{\beta}_{1,2} - \hat{\beta}_{1,n}}{\hat{\beta}_{1,2}} \right|, & n = \{3, \dots, |\epsilon_g|\} \end{cases}$$

Nótese que, dado que el mínimo de datos necesarios para hacer una estimación lineal es de dos, las diferencias porcentuales  $\Delta\%_1$  y  $\Delta\%_2$  no puede ser calculadas.

Finalmente, se selecciona aquel punto  $(\check{\epsilon}, \check{\sigma}) = (\epsilon_{g,n}, \hat{\sigma}_{g,n})$  tal  $n$  (el número de dato) corresponda al máximo punto que cumpla  $\Delta\%_n \leq 0,1$  (o 10 %). El valor de  $\epsilon_{g,n}$  se calcula como:

$$\epsilon_{g,n} = \epsilon_{cor,n} + \epsilon_0$$

### 3.1.5. Determinación de energía almacenada

Se define la energía almacenada como la energía por unidad de volumen que el material o sistema estructural almacena a lo largo del proceso de carga.

$$E_e = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \sigma(\epsilon) d\epsilon$$

### 3.1.5.1. Determinación de resiliencia

Dado el modelo estimado:

$$\hat{\sigma} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \epsilon$$

Y el límite elástico estimado  $(\check{\epsilon}, \check{\sigma})$ , la resiliencia es:

$$E_{res} = \int_{\epsilon_0}^{\check{\epsilon}} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \epsilon \, d\epsilon$$

En donde  $\epsilon_0$  es la deformación unitaria inicial.

Nótese que la resiliencia no es más que el área de bajo la curva esfuerzo-deformación comprendida entre la deformación inicial estimada y el límite elástico.

En esta región, el material es capaz de almacenar energía potencial elástica sin deformaciones permanentes, es decir, es capaz de transformarla completamente en energía cinética.

### 3.1.5.2. Determinación de tenacidad

Dado que no está completamente definido un punto límite que delimite la zona elastoplástica y plástica, y dado en los ensayos de postes usualmente no se alcanza una zona completamente plástica de deformación; la tenacidad será el área bajo toda la curva esfuerzo – deformación.

Dado el modelo estimado:

$$\hat{\sigma} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \epsilon$$

La tenacidad es:

$$E_{ten} = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \epsilon d\epsilon$$

En donde  $\epsilon_0$  es la deformación unitaria inicial y  $\epsilon_f$  es la máxima deformación unitaria registrada en el ensayo.

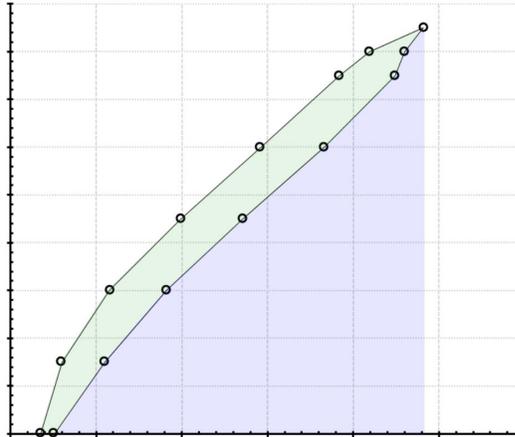
En esta región el material es capaz de almacenar energía potencial elástica, pero adquiere deformaciones permanentes, es decir, es capaz de transformarla parcialmente en energía cinética dado que parte de la energía potencial elástica se disipa por diferentes efectos mecánicos – termodinámicos (emisión de calor, deformación permanente, fisuras, etc.).

Se puede notar que, debido a los supuestos hechos, la energía total almacenada es equivalente a la tenacidad. Esto no es cierto si se cuenta con una estimación del límite elastoplástico.

### **3.1.6. Determinación de la energía total disipada**

Dada la definición de curva histéresis, la energía total disipada no es más que el área bajo el límite inferior de la curva de histéresis.

Figura 30. **Curva de histéresis, energía disipada y transformada**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

En el gráfico, la curva (puntos más línea negra) representa la curva de histéresis para un ciclo de carga de un material dúctil. El área verde representa la energía por unidad de volumen que el material puede disipar en forma de deformación permanente, fisuración, calor y otros tipos de energía.

El área azul representa el total de energía que el material o sistema estructural puede transformar como energía cinética.

Para calcular el total de energía por unidad de volumen disipada, simplemente se calcula el área del polígono formado por el límite inferior de la curva de histéresis, el cual posteriormente se resta de la tenacidad.

Sea  $\{\epsilon_n, \sigma_n\}_{n=1}^N$  el total de observaciones del ensayo, y sea  $\{\epsilon_i, \sigma_i\}_{i=1}^I$  un subconjunto del total de observaciones que representa el límite inferior de la curva de histéresis, entonces:

$$E_{\text{dis}} = E_{\text{ten}} - \sum_{j=1}^{l-1} (\epsilon_{j+1} - \epsilon_j) \frac{\sigma_j + \sigma_{j+1}}{2}$$

Es la energía disipada aproximada.

## 4. MUESTRA DE RESULTADOS

Anteriormente, se presentó el fundamento matemático detrás de los cálculos a realizar; sin embargo, dado el volumen de datos y la complejidad de los cálculos, se implementará el software R para realizar todas las rutinas descritas anteriormente. A lo largo de este capítulo se encontrarán las rutinas realizadas en R para la realización de los cálculos con una breve explicación con el objetivo de que sea reproducible.

R es un entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico. Es una implementación de software libre del lenguaje S pero con soporte de alcance estático. Se trata de uno de los lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística, siendo además muy popular en el campo de la minería de datos, la investigación biomédica, la bioinformática y las matemáticas financieras. A esto contribuye la posibilidad de cargar diferentes bibliotecas o paquetes con funcionalidades de cálculo y gráficas.

R es parte del sistema GNU y se distribuye bajo la licencia GNU GPL. Está disponible para los sistemas operativos Windows, Macintosh, Unix y GNU/Linux.

Se resalta el hecho de que este estudio contemplaba inicialmente el modelado de un conjunto de datos provenientes de muchos ensayos a postes de las mismas características; sin embargo, por circunstancias fuera del control del autor y asesores, no fue posible obtener dicha información, por lo que se procedió a utilizar datos de ensayos realizados en el centro de investigaciones.

#### 4.1. Poste de concreto pretensado centrifugado

- Características del poste

Se ensayó un poste con medidas correspondientes:

Tabla I. **Medidas de poste de concreto presforzado**

Dimensiones del poste				
Sección	Diámetro externo (cm)	Longitud (cm)	Espesor (mm)	Long. Empotramiento (cm)
Base	30,0	916,0	8,0	132,0
Punta				

Fuente: elaboración propia.

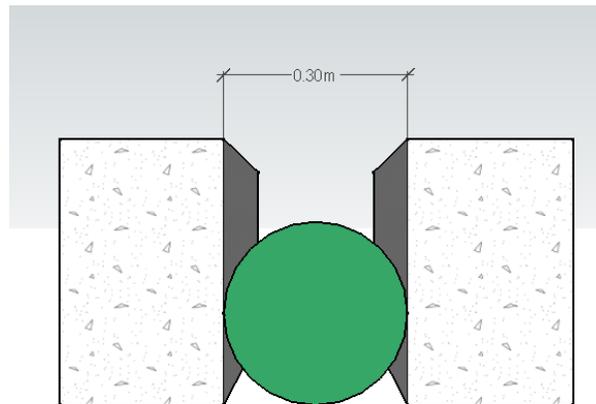
A manera de esquema, se presentan los siguientes dibujos.

Figura 31. **Perfil de poste de concreto presforzado en posición de ensayo**



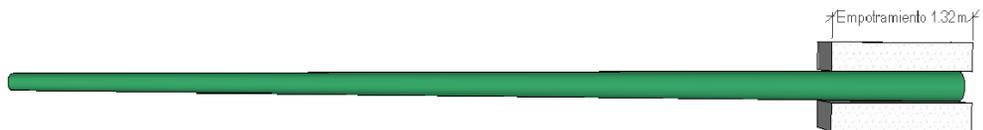
Fuente: elaboración propia, empleando SketchUp.

Figura 32. **Elevación de poste de concreto presforzado en posición de ensayo**



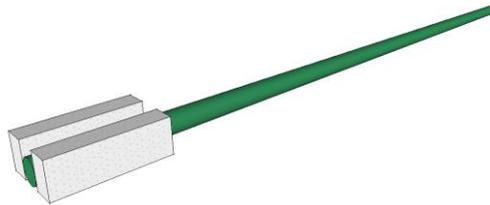
Fuente: elaboración propia, empleando SketchUp.

Figura 33. **Planta de poste de concreto presforzado en posición de ensayo**



Fuente: elaboración propia, empleando SketchUp.

Figura 34. **Isométrico de poste de concreto presforzado en posición de ensayo**

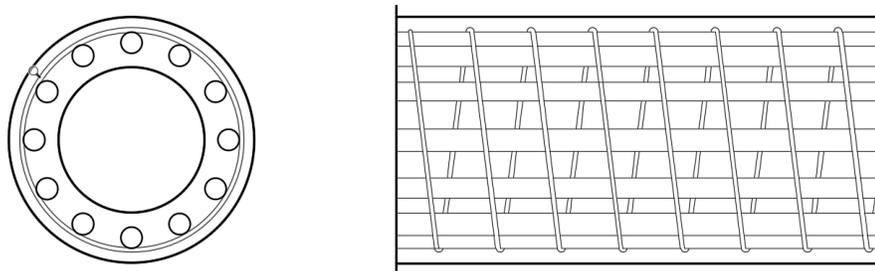


Fuente: elaboración propia, empleando SketchUp.

El poste no presenta ningún tipo de anomalía que afecte directamente su resistencia.

El refuerzo del poste consistía en con 12 barras de acero pretensado de 7,2 mm de diámetro y zunchos de 3,2 mm a 40 mm de separación.

Figura 35. **Armado de poste de concreto presforzado**



Fuente: elaboración propia, empleando AutoCAD.

Se hace notar que dicho armado fue determinado posterior al ensayo, debido a que no se poseía la información técnica previo al mismo. Además, se desconoce la resistencia del concreto.

#### 4.1.1. Datos del ensayo

Los datos del ensayo corresponden a parejas de carga-deflexión, obtenidos por la metodología de ensayo Cantiléver.

Tabla II. Datos de ensayo de poste de concreto presforzado

carga (kg)	deflexión (cm)	carga (kg)	deflexión (cm)
0	0,2	300	15
0	0,5	300	23,4
0	2	300	19,2
0	4,2	300	28,7
0	7	300	23,2
0	10,2	300	36,4
150	4	450	25,6
150	4,2	450	26,8
150	4,6	450	38,8
150	4,4	450	34,6
150	8,2	450	45,8
150	6,1	450	39,8
150	11,6	450	54,2
150	9	600	48,2
150	15,7	600	50,7
150	12	600	62,4
150	22	600	58,4
300	8,8	600	73,2
300	9,2	750	73,8
300	17,4	750	76,7

Fuente: elaboración propia.

#### 4.1.2. Estimación del modelo para el conjunto de datos

A lo largo de estas secciones se verán recuadros azules. Estos recuadros representan el código de R necesario para realizar los cálculos. Si se compilan todas las instrucciones dadas a continuación, se genera un programa que realiza automáticamente todos los cálculos.

Se inicia la rutina de cálculo en el software R cargando las correspondientes librerías a utilizar:

```
library(nleqslv) # Librería que sirve para la solución de ecuaciones  
de forma numérica  
library(readxl) # Librería que permite cargar datos desde archivos de  
Excel  
  
rm(list = ls()); graphics.off() # Rutina que limpia el entorno y  
cierra todas las gráficas previas
```

Se definen las medidas del poste que se utilizarán para cálculos posteriores:

```
L <- 7840 # Longitud desde la línea de tierra en mm  
C <- 2*pi*(30/2) # perímetro en la base en cm calculado a partir del  
diámetro
```

Se cargan los datos que corresponden al ensayo realizado:

```
datos <- read_excel("Libro1.xlsx")
```

La base de datos será almacenada dentro de la rutina con el nombre datos. Es necesario que la base de datos se encuentre dentro del directorio definido en el programa.

Ahora se procede a la estimación del modelo. El primer paso consiste en convertir los datos a las unidades correctas para aplicar la ecuación de esfuerzo en fibra extrema definida en el capítulo 4:

$$F = \frac{32\pi^2 P(L - \Delta_L)}{C^3}$$

```
datos$carga <- datos$carga*9.80665 # Conversión a N
datos$deflexion <- datos$deflexion*10 # Conversión a mm
```

Posteriormente, se calcula la deflexión y la deformación unitaria:

```
datos$f <- 32*((pi)^2)*(datos$carga)*(L-datos$deflexion)/(C^3) #
Esfuerzo en mega pascuales
datos$e <- datos$deflexion / L # Deformación unitaria
datos$loge <- log(datos$e, base = exp(1)) # Logaritmo natural de La
deformación unitaria

datos2 <- datos[4:length(datos$carga),] # Restringimos los datos a los
que son útiles
```

El modelo propuesto:

$$\sigma = \beta_0 + \beta_1 \ln \epsilon + u$$

Se estima usando como variable dependiente el logaritmo de la deformación unitaria; además, se restringe la muestra a aquellos datos con deformación unitaria mayor a cero.

Finalmente, se estima el modelo:

```
linlog <- lm(f~loge, data=datos2) # Estimación del modelo.
beta0 <- summary(linlog)$coefficients[1] # Intercepto
beta1 <- summary(linlog)$coefficients[2] # Pendiente
```

La estimación anterior se resume en los siguientes cuadros.

Tabla III. **Residuos del modelo estimado para poste de concreto presforzado**

Min	1Q	Mediana	3Q	Max
-5826,4	-1908,0	-110,7	2426,1	3805,6

Tabla IV. **Coefficientes del modelo estimado para poste de concreto presforzado**

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t, p-value
$\hat{\beta}_0$	30035,5	1602,4	18,74, < 2e-16 ***
$\hat{\beta}_1$	5591,5	432,4	12,93, 1.1e-15 ***

- Códigos de significancia: 0 '\*\*\*' 0,001 '\*\*' 0,01 '\*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1
- Error estándar de los residuos: 2 731 con 39 grados de libertad
- Coeficiente de determinación  $R^2$ : 0,8109
- Estadístico F: 167,2 con 1 y 39 grados de libertad, p-value: 1,102e-15

#### 4.1.2.1. Forma explícita del modelo

Dado que ya se ha realizado la rutina para estimar el modelo, la forma explícita del modelo es:

$$\hat{\sigma} = \underbrace{\hat{\beta}_0}_{ee(\hat{\beta}_0)} + \underbrace{\hat{\beta}_1}_{ee(\hat{\beta}_1)} \ln \epsilon; R^2; de(\hat{u})$$

Donde:

- $\hat{\beta}_0$  corresponde al intercepto estimado
- $ee(\hat{\beta}_0)$  corresponde al error estándar de la estimación del intercepto
- $\hat{\beta}_1$  corresponde a la pendiente estimada
- $ee(\hat{\beta}_1)$  corresponde al error estándar de la estimación de la pendiente
- $R^2$  corresponde al coeficiente de determinación
- $de(\hat{u})$  corresponde a la desviación estándar de los residuos o desviación estándar estimada de los errores del modelo

Para la estimación realizada, el modelo es:

$$\hat{\sigma} = \frac{30\,035,5}{1\,602,4} + \frac{5\,591,5}{432,4} \ln \epsilon; 0,8109; 2\,731$$

### 4.1.3. Determinación del límite elástico

Se inicia determinado la deformación unitaria  $\epsilon_0$ :

```
# Definimos la función de esfuerzo deformación
funcion <- function(e){
  return(beta0 + beta1*log(e,base = exp(1)))
}

# Determinamos e_0
cero <- nleqslv(1,funcion)$x
```

Se calcula la grilla de datos descrita en la sección 3.1.4:

```

# Definimos un data frame que inicialmente contiene el vector de
simulaciones de la deformación unitaria
datos3 <- data.frame(
  e = seq(cero,max(datos2$e, na.rm = FALSE),0.0001)
)
datos3$log_e <- log(datos3$e, base = exp(1)) # Logaritmo de Las
deformaciones unitarias
datos3$f <- beta0 + beta1*(datos3$log_e) # Calculo de Los esfuerzos
estimados simulados
datos3$e_cor <- datos3$e - cero # Deformaciones unitarias sin
deformación inicial

```

Ya definida la grilla de datos, se procede a realizar el cálculo de las pendientes estimadas de todos los subconjuntos de datos (procedimiento descrito en la sección 3.1.4) y el cálculo de las diferencias porcentuales de dichas pendientes:

```

# Definimos dos vectores que hacen el papel de "cajas vacías" en donde
se almacenarán los resultados de las pendientes y de las diferencias
porcentuales

datos3$pendiente <- rep(NaN,length(datos3$e))
datos3$diferencia <- rep(NaN,length(datos3$e))

# Definimos un loop que calculará las pendientes para cada subconjunto
de datos

for (i in 2:length(datos3$e)) {

datos3$pendiente[i] <- summary( lm(f~e_cor +0 , data =
datos3[seq(1,i),]) )$coefficients[1]

}

# Definimos un loop que calculará las diferencias porcentuales para
cada subconjunto de datos

for (i in 3:length(datos3$e)) {

  datos3$diferencia[i] <- abs( (datos3$pendiente[i]-
datos3$pendiente[2])/(datos3$pendiente[2]) )
}

```

```
}
```

El límite elástico se definió como el mayor valor que tiene una diferencia porcentual en pendientes menor o igual al 10 %. Esto se puede expresar en R del siguiente modo:

```
limite_elastico <- datos3$e[  
  match(  
max(datos3$diferencia[datos3$diferencia<=0.1], na.rm = T)  
  ,datos3$diferencia)  
]
```

Dada la rutina anterior, la deformación unitaria correspondiente al límite elástico para este poste es:

$$\tilde{\epsilon} = 0,006$$

#### 4.1.4. Cálculo de resiliencia y tenacidad

Recordemos que la resiliencia se define como:

$$E_{res} = \int_{\epsilon_0}^{\tilde{\epsilon}} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln \epsilon \, d\epsilon$$

Por lo tanto, la resiliencia para este poste es:

$$E_{res} = \int_{0.00464648}^{0.00614648} 30\,035,46 + 5\,591,483 \ln \epsilon \, d\epsilon$$

$$E_{res} = 1,22788$$

Ahora se calcula la tenacidad. Recuérdense que esta se define como:

$$E_{ten} = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \epsilon d\epsilon$$

Por tanto

$$E_{ten} = \int_{0.00464648}^{0.1229592} 30\,035,46 + 5\,591,483 \ln \epsilon d\epsilon$$

$$E_{ten} = 1\,590,609$$

#### 4.1.5. Cálculo de la energía total disipada

El problema de calcular la energía total disipada consiste en definir el subconjunto  $\{\epsilon_i, \sigma_i\}_{i=1}^l$  de los datos del ensayo. Para determinar este subconjunto y posteriormente calcular la energía disipada, se definirá una rutina en R.

Dado que las cargas son aplicadas a intervalos regulares, se define un vector que contenga las cargas aplicadas sin repeticiones:

```
carga <- datos2$carga[!duplicated(datos2$carga)]
```

Por medio del vector definido anteriormente, filtraremos aquellos datos que correspondan al límite inferior de la curva de histéresis aproximada del poste ensayado:

```
# Definimos vectores vacíos en los cuales guardaremos los respectivos  
datos del límite inferior de la curva de histéresis
```

```
dhi <- rep(NaN, length(carga)) # Deformación unitaria  
ehi <- rep(NaN, length(carga)) # Esfuerzo
```

El siguiente loop determina cada elemento de los vectores  $dhi$  y  $ehi$  tomando en cuenta que el límite inferior de la curva de histéres corresponde al máximo valor de deformación a un nivel de carga dado.

```
for (i in 1:length(carga)) {
  dhi[i] <- datos2$e[
    match(
      max(datos2$e[datos2$carga == carga[i]], na.rm = T)
      ,datos2$e)
  ]

  ehi[i] <- datos2$f[
    match(
      max(datos2$e[datos2$carga == carga[i]], na.rm = T)
      ,datos2$e)
    ]
}
}
```

Una vez determinada la sucesión  $\{\epsilon_i, \sigma_i\}_{i=1}^l$ , se calcula la energía total disipada como:

```
areas_parciales <- rep(NaN,length(carga)-1)

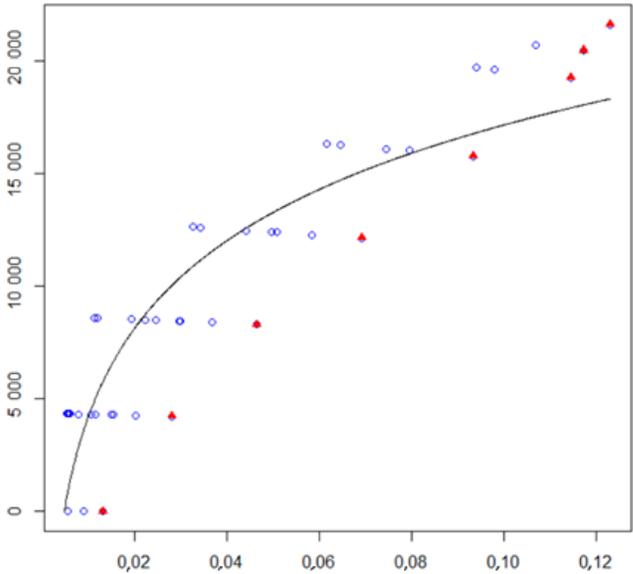
for (i in 1:length(areas_parciales)) {
  areas_parciales[i] <- (dhi[(i+1)] - dhi[(i)])*((ehi[(i+1)] +
ehi[(i)]))/2
}

E_dis <- sum(areas_parciales)
```

Por lo tanto, el total de energía disipada para este poste en este ensayo es:

$$E_{dis} = E_{ten} - 1\,262,265 = 328,344$$

Tabla V. **Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste de concreto presforzado**



Fuente: elaboración propia, empleando R.

En color azul se encuentra la muestra de datos utilizada para la estimación, en negro se encuentra la curva de ajuste y en rojo el límite inferior de la curva de histéresis.

A continuación, se resumen los cálculos anteriores:

Tabla VI. **Resumen de cálculos para poste de concreto presforzado**

Cálculo	Símbolo	Valor	Unidades
Límite elástico	$\epsilon$	0,006	$\frac{m}{m}$
Resiliencia	$E_{res}$	1,22788	$\frac{Mj}{m^3}$
Tenacidad	$E_{ten}$	1 590,609	$\frac{Mj}{m^3}$
Energía disipada	$E_{dis}$	328,344	$\frac{Mj}{m^3}$

Fuente: elaboración propia.

## 4.2. Poste metálico de misma longitud

Dado que se posee una rutina de cálculo, definida en detalle anteriormente, únicamente se mostrarán los resultados para esta sección. Se realizarán los cálculos para un poste metálico con el fin de comparar su comportamiento respecto a un poste de concreto presforzado.

### 4.2.1. Características del poste

Tabla VII. **Medidas poste metálico**

Dimensiones del poste				
Sección	Diámetro Externo (cm)	Longitud (cm)	Espesor (mm)	Longitud Empotramiento (cm)
Base	35,15	915,0	3,25	151,0
Punta	7,00			

Fuente: elaboración propia.

El poste metálico está fabricado en lámina de acero de grado 50, según la norma ASTM A572.

Los datos del ensayo corresponden a parejas de carga-deflexión, obtenidos por la metodología de ensayo Cantiléver.

**Tabla VIII. Datos de ensayo de poste metálico**

<b>carga</b>	<b>deflexión</b>	<b>carga</b>	<b>deflexión</b>
0	1	270	143
0	3	270	217
0	6	360	140
0	9	360	139
0	13	360	148
0	17	360	154
0	25	360	190
0	28	360	181
0	69	360	189
90	27	360	266
90	28	450	189
90	28	450	189
90	30	450	197
90	31	450	237
90	34	450	224
90	37	450	230
90	50	450	308
90	52	540	238
90	59	540	238
90	109	540	278
180	60	540	263
180	59	540	270
180	61	540	353
180	64	630	283
180	67	630	320
180	72	630	302
180	96	630	308
180	100	630	398
180	97	720	332
180	164	720	341
270	102	720	345
270	98	720	439

Continuación de la tabla VIII.

270	100	810	383
270	107	810	384
270	110	810	479
270	144	900	505
270	139	900	528

Fuente: elaboración propia.

#### 4.2.2. Resumen de estimación del modelo

Tabla IX. Residuos del modelo estimado para poste metálico

Min	1Q	Mediana	3Q	Max
-4449,3	-1205,2	-425,5	1117,8	7793,1

Fuente: elaboración propia.

Tabla X. Coeficientes del modelo estimado para poste metálico

Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t, p-value
$\hat{\beta}_0$	18059,1	953,8	18,93 <2e-16 ***
$\hat{\beta}_1$	2891,4	214,1	13,50 <2e-16 ***

Fuente: elaboración propia.

- Códigos de significancia: 0 '\*\*\*' 0,001 '\*\*' 0,01 '\*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1
- Error estándar de los residuos: 2245 con 72 grados de libertad
- Coeficiente de determinación  $R^2$ : 0,7169
- Estadístico F: 182.3 con 1 y 72 grados de libertad, p-value: < 2.2e-16

#### 4.2.2.1. Forma explícita del modelo

Dado que ya se ha realizado la rutina para estimar el modelo, la forma explícita del modelo es:

$$\hat{\sigma} = \underbrace{\hat{\beta}_0}_{ee(\hat{\beta}_0)} + \underbrace{\hat{\beta}_1}_{ee(\hat{\beta}_1)} \ln \epsilon; R^2; de(\hat{u})$$

Donde:

- $\hat{\beta}_0$  corresponde al intercepto estimado.
- $ee(\hat{\beta}_0)$  corresponde al error estándar de la estimación del intercepto.
- $\hat{\beta}_1$  corresponde a la pendiente estimada.
- $ee(\hat{\beta}_1)$  corresponde al error estándar de la estimación de la pendiente.
- $R^2$  corresponde al coeficiente de determinación.
- $de(\hat{u})$  corresponde a la desviación estándar de los residuos o desviación estándar estimada de los errores del modelo.

Para la estimación realizada, el modelo es:

$$\hat{\sigma} = \underbrace{18\,059,1}_{953,8} + \underbrace{2\,891,4}_{214,1} \ln \epsilon; 0,7169; 2\,245$$

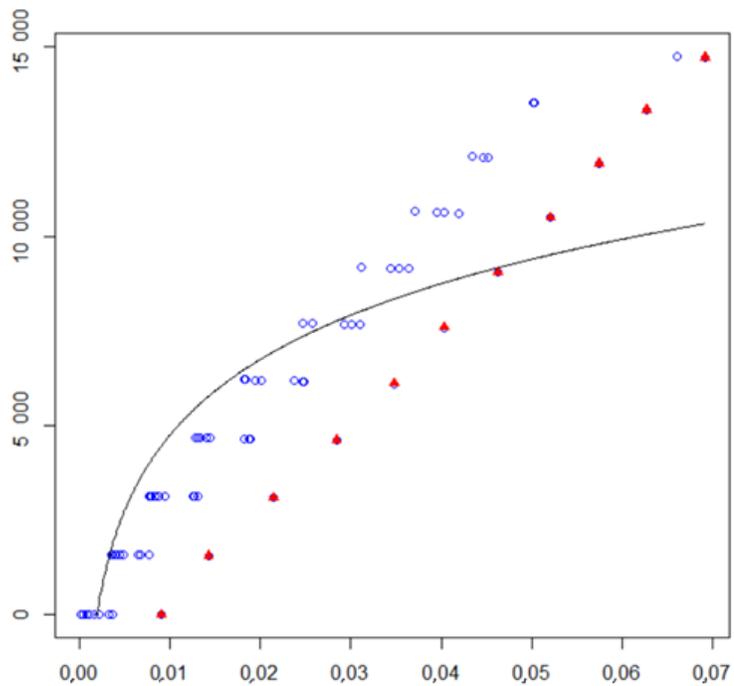
#### 4.2.1. Resumen de magnitudes calculadas

Tabla XI. Resumen de cálculos para poste metálico

Cálculo	Símbolo	Valor	Unidades
Límite elástico	$\epsilon$	0,002	$\frac{m}{m}$
Resiliencia	$E_{res}$	0,3280032	$\frac{MJ}{m^3}$
Tenacidad	$E_{ten}$	519,9103	$\frac{MJ}{m^3}$
Energía disipada	$E_{dis}$	77,4846	$\frac{MJ}{m^3}$

Fuente: elaboración propia.

Figura 36. Modelo estimado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste metálico



Fuente: elaboración propia, empleando R.

En color azul se encuentra la muestra de datos utilizada para la estimación; en negro se encuentra la curva de ajuste y en rojo el límite inferior de la curva de histéresis.

## 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 5.1. Poste de concreto pretensado centrifugado

Dada la forma específica del modelo:

$$\hat{\sigma} = \underbrace{\hat{\beta}_0}_{ee(\hat{\beta}_0)} + \underbrace{\hat{\beta}_1}_{ee(\hat{\beta}_1)} \ln \epsilon; R^2; de(\hat{u})$$

El parámetro  $\hat{\beta}_1$  tiec un significado particular. Si se toma la derivada con respecto al a deformación unitaria:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\epsilon} = \frac{\hat{\beta}_1}{\epsilon}$$

Si se multiplica ambos lados por  $\epsilon$  y se dividen ambos lados, entonces:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\epsilon} \frac{\epsilon}{100} = \frac{\hat{\beta}_1}{100} = \frac{\Delta\hat{\sigma}}{\Delta\% \epsilon}$$

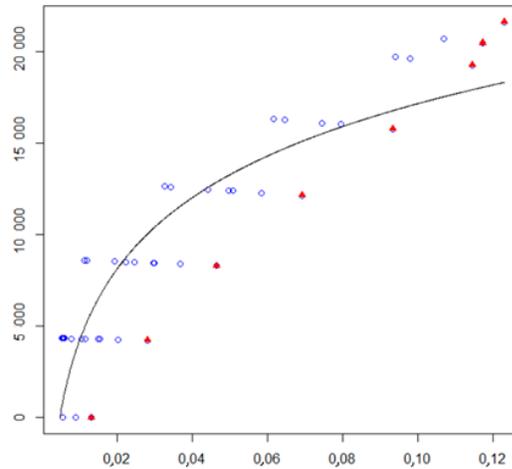
El resultado  $\frac{\Delta\hat{\sigma}}{\Delta\% \epsilon}$  representa la semisensibilidad porcentual del esfuerzo estimado con respecto a la deformación unitaria. Por cada 1 % que aumente la deformación unitaria, el esfuerzo se incrementará en una magnitud  $\frac{\hat{\beta}_1}{100}$ .

Dado esto, se nota que el poste de concreto presforzado tiene un  $\frac{\Delta\hat{\sigma}}{\Delta\% \epsilon} = 55,915$ ; por lo tanto, por cada 1 % que se incremente la deformación unitaria, el esfuerzo se incrementará en 55,915 *MPa*.

El parámetro  $\hat{\beta}_0$  representa un ajuste del modelo dado los datos. Dado que el modelo fue estimado tomando logaritmos de las deformaciones unitarias, el parámetro  $\hat{\beta}_0$  no representa el esfuerzo en un estado de no deformación unitaria (como se interpretaría en un modelo lineal – lineal) y no tiene una interpretación directa como el parámetro  $\hat{\beta}_1$ .

Si se analiza la bondad de ajuste  $R^2$ , un 81,09 % de la variación total de la muestra es explicada por el modelo respecto a la variación total. No está definido un  $R^2$  que justifique un buen ajuste, debido a que es necesario hacer las pruebas de los supuestos; sin embargo, coeficiente de determinación arriba del 70 % se consideran buenos ajustes, especialmente si el modelo es parsimonioso (contiene pocas variables independientes). Dado el coeficiente de determinación obtenido, se puede decir que existe una relación fuerte entre el esfuerzo y la deformación unitaria (tal como se esperaba); sin embargo, es posible mejorar el ajuste con un modelo no lineal.

Figura 37. **Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste de concreto presforzado**



Fuente: elaboración propia, elaborado con R.

En la gráfica se puede notar que el modelo tiende a subestimar los esfuerzos para deformaciones unitarias grandes, mientras que modela bien la tendencia del esfuerzo para deformaciones unitarias pequeñas. Se puede observar que el modelo es mejor simulando el límite superior de la curva de histéresis.

Nótese que, debido a que el poste se sometió a ciclos de carga, tiene una deformación unitaria estimada permanente de magnitud aproximada de 0,0046 o un 0,46 %. Esta deformación unitaria podría ser utilizada como un indicador de la cantidad de energía que el material disipó en forma de deformación, agrietamiento o calor en la zona elastoplástica.

Tabla XII. **Resumen de cálculos para poste de concreto presforzado**

Calculo	Símbolo	Valor	Unidades
Límite elástico	$\epsilon$	0,006	$\frac{m}{m}$
Resiliencia	$E_{res}$	1,22788	$\frac{Mj}{m^3}$
Tenacidad	$E_{ten}$	1 590,609	$\frac{Mj}{m^3}$
Energía disipada	$E_{dis}$	328,344	$\frac{Mj}{m^3}$

Fuente: elaboración propia.

Nótese que la resiliencia del poste de concreto es 0,078 % de la energía total absorbida por el material, lo que indica que el poste tiende a trabajar dentro de la zona elastoplástica; es decir, parte de la energía que absorbe es disipada en forma de agrietamiento, calor, fisuración u otro efecto permanente dentro del poste. Aunque el poste trabaje dentro de la zona elastoplástica, eso no quiere decir que sea propenso a una falla prematura o que tiene un mal diseño, debido a que el diseño depende de su resistencia última.

Nótese que el poste disipó un 20,64 % de la energía total absorbida en forma de deformación y otros efectos permanentes.

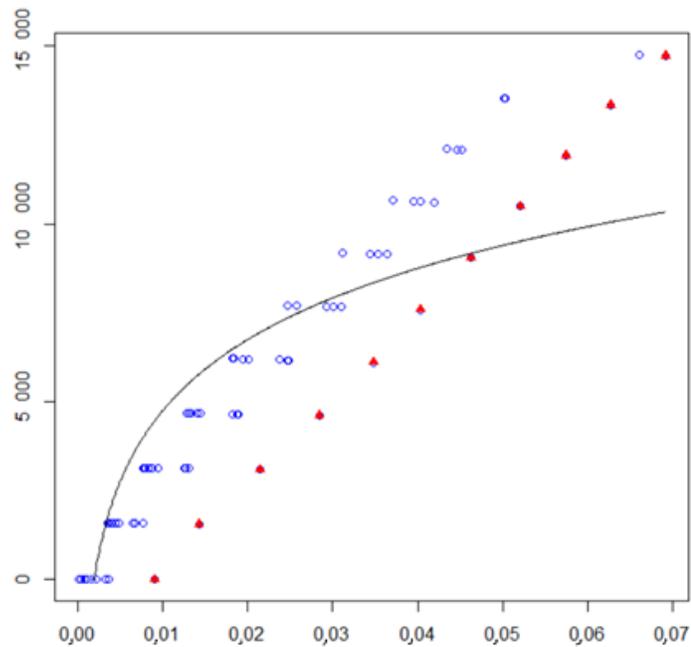
## 5.2. Poste metálico de misma longitud

$$\hat{\sigma} = \frac{18\,059,1}{953,8} + \frac{2\,891,4}{214,1} \ln \epsilon ; 0,7169; 2\,245$$

El poste metálico tiene una semisensibilidad de  $\frac{\Delta\hat{\sigma}}{\Delta\% \epsilon} = 28,914$ ; por lo tanto, por cada 1 % que se incremente la deformación unitaria, el esfuerzo se incrementará en 28,914 MPa.

Si se analiza la bondad de ajuste  $R^2$ , un 71,69 % de la variación total de la muestra es explicada por el modelo respecto a la variación total. Dado el coeficiente de determinación obtenido, se puede decir que existe una relación fuerte entre el esfuerzo y la deformación unitaria (tal como se esperaba); sin embargo, es posible mejorar el ajuste con un modelo no lineal.

Figura 38. **Modelo ajustado, datos y límite inferior de curva de histéresis para poste metálico**



Fuente: elaboración propia, elaborado con R.

Al igual que en el modelo para el poste de concreto presforzado, el modelo para el poste metálico tiende a subestimar los esfuerzos para deformaciones unitarias grandes, mientras que modela bien la tendencia del esfuerzo para deformaciones unitarias pequeñas; además, el modelo es mejor simulando el

límite superior de la curva de histéresis al igual que en el modelo para el poste de concreto presforzado.

Nótese que, debido a que el poste se sometió a ciclos de carga, tiene una deformación unitaria estimada permanente de magnitud aproximada de 0,001938446 o un 0,194 %.

Tabla XIII. **Resumen de cálculos para poste metálico**

<b>Calculo</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
Límite elástico	$\epsilon$	0,002	$\frac{m}{m}$
Resiliencia	$E_{res}$	0,3280032	$\frac{MJ}{m^3}$
Tenacidad	$E_{ten}$	519,9103	$\frac{MJ}{m^3}$
Energía disipada	$E_{dis}$	77,4846	$\frac{MJ}{m^3}$

Fuente: elaboración propia.

La resiliencia del poste metálico es 0,063 % de la energía total absorbida por el material, lo que indica que el poste tiende a trabajar dentro de la zona elastoplástica; es decir, parte de la energía que absorbe es disipada en forma de efectos permanentes dentro del poste.

Nótese que el poste disipó un 15 % de la energía total absorbida en forma de deformación y otros efectos permanentes.

### 5.3. Comparación entre poste de concreto presforzado y poste metálico

Se observa que el poste de concreto presforzado tiene una mayor semisensibilidad  $\frac{\Delta\hat{\sigma}}{\Delta\% \epsilon}$  que el poste metálico; esto indica que a un aumento de 1 % de deformación unitaria en cada poste, el poste de concreto presforzado tiende a esforzarse más, lo que indica que es más rígido que el de metal. Este resultado es esperado, ya que el poste metálico es más dúctil además de poseer una menor sección transversal.

Se observa el poste de concreto presforzado tiene un límite elástico estimado mayor al poste metálico, lo cual parece contra intuitivo; sin embargo, el presfuerzo dota al poste de concreto con una mayor un rigidez y elasticidad. Debido al resultado anterior, el poste de concreto presforzado tiene una resiliencia mayor que el poste metálico; sin embargo, ambas magnitudes representan una pequeña proporción del total de energía absorbida.

Respecto a la histéresis, el poste disipó una menor cantidad de energía, lo que quiere decir que el mismo transformó más energía como movimiento. Este resultado era esperado, ya que el poste metálico lo constituyen materiales más elásticos que el poste de concreto presforzado.



## CONCLUSIONES

1. El método numérico aproximado propuesto para determinar el límite elástico, punto que separa la zona elástica y elastoplástica, requiere de una función estimada del comportamiento del material, por lo que se debe utilizar inferencia estadística para estimar dicho modelo y posteriormente calcular el límite elástico.
2. Se determinó que un modelo de forma lineal – logarítmica es el más simple para modelar la relación entre la deformación unitaria y el esfuerzo. La simpleza del modelo radica en que es posible estimarlo como un modelo lineal, aunque el mismo preste una forma no lineal con respecto a la variable dependiente.
3. Dada la forma funcional elegida para modelar el comportamiento de los postes, se estimó por medio de mínimos cuadrados; sin embargo, es posible que un modelo no lineal requiera una estimación por mínimos cuadrados generalizados o máxima verosimilitud.
4. Para el estudio de materiales dúctiles o sistemas estructurales con poca ductilidad, un modelo probabilístico de forma lineal – logarítmico es capaz replicar el comportamiento de los mismos, explicando más del 70 % de la variación total de los datos de deformación unitaria versus esfuerzo.
5. Gracias al modelo estimado, fue posible determinar que un aproximado del 80 % de la energía total almacenada por un poste de concreto

reforzado sometido a carga deflexión, es disipada por el mismo por medio por medio de deformaciones permanentes, fisuración, reacomodo del elemento (debido a que el empotramiento no es perfecto) y calor en menor medida.

6. Dada la forma del modelo lineal – logarítmico y el porcentaje de disipación de energía, se puede decir que el poste de concreto presforzados evaluado se comportó como un sistema elastoplástico; es decir, se confirmó la hipótesis de que el mismo disiparía energía en una proporción mayor a la energía potencial que se transfiere en forma de energía cinética.
7. Dado el modelo estimado y el límite elástico aproximado, es posible determinar la resiliencia, definida como el área bajo la curva descrita por el modelo con límite superior en el límite elástico.
8. El total de energía almacenada en el rango elastoplástico (tenacidad), se determinó calculando el área bajo la curva descrita por el modelo estimado desde un punto de cero esfuerzo hasta el máximo valor de deformación unitaria registrado en el ensayo.
9. El total de energía disipada por el material es la diferencia de la tenacidad y el área bajo la curva del límite inferior de histéresis, determinada de forma aproximada por medio de los datos.
10. Por medio del modelo estimado, es posible calcular la deformación permanente promedio, siendo esta la cantidad de deformación permanente que genera un valor estimado de cero esfuerzo. Esto

determina una relación entre la deformación permanente y la curva de histéresis.

11. Se estableció un límite del 70 % como mínimo aceptable para el coeficiente de determinación, ya que el modelo no contempla variables como la calidad de los materiales constituyentes, procesos de fabricación, transporte o precisión de los instrumentos de ensayo.
12. Dada la forma lineal – logarítmica del modelo, el parámetro  $\beta$  se puede interpretar como una medida de sensibilidad e los postes a la aplicación de cargas, siendo esta análoga a una medida de ductilidad.



## RECOMENDACIONES

1. Dadas las limitaciones impuestas por el modelo lineal o linealizado, se recomienda realizar una estimación no lineal del modelo original de Ramberg-Osgood por medio de mínimos cuadrados.
2. Para una mejor estimación del límite elástico, se propone la utilización de un modelo no lineal, debido a que dicho límite quedaría estimado en función de los datos y no en función del modelo, tal y como se hizo en este trabajo de graduación.
3. Si se pretende modelar el comportamiento de un conjunto de postes en lugar de un solo poste, se sugiere estimar el límite inferior de la curva de histéresis en lugar de tomarla directamente de los datos, esto para tener un límite inferior promedio que describe correctamente a todos los postes y no solo a uno en particular.
4. Dado que el modelo depende directamente de la cantidad de observaciones, se recomienda utilizar intervalos menores de carga y utilizar una mayor cantidad de postes de la misma clase para dar robustez al estudio.
5. Si se desean incluir variables de carácter cualitativo como la calidad de fabricación, estado previo al ensayo, calidad de materiales y otras, se sugiere implementar dentro de la estimación del modelo, variables binarias. Esta metodología solo se puede implementar si se modelará el

comportamiento de varios postes, debido a que el modelo estimará el efecto que tienen dichas variables en el desempeño de los mismos.

6. Si se quiere realizar un estudio comparativo entre los resultados modelados y una simulación dado un diseño, se recomienda tomar muestras del acero y concreto para determinar sus propiedades mecánicas (punto de fluencia, y resistencia nominal respectivamente), para luego realizar un diseño y comparar este con el modelo estimado.

## BIBLIOGRAFÍA

1. ASTM International. *C1089 Standard specification for spun cast prestressed concrete poles*. [En línea]. <<https://reference.globalspec.com/standard/3811520/astm-c1089-97>>. [Consulta: 11 de octubre de 2017].
2. \_\_\_\_\_. *D1036 standard test method of static test of wood poles*. [En línea]. <[http://www.ign.com/wikis/the-legend-of-zelda-breath-of-the-wild/The\\_Test\\_of\\_Wood](http://www.ign.com/wikis/the-legend-of-zelda-breath-of-the-wild/The_Test_of_Wood)>. [Consulta: 11 de octubre de 2017].
3. BADIOLA, V. *Principios básicos de resistencia de materiales. En diseño de máquinas 1*. Navarra, España: Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional, 2004. 312 p.
4. CENGEL, Yunus; BOLES, Michael. *Termodinámica*. 6a ed. México: McGraw-Hill, 2009. 178 p.
5. FUNG, Yuen-Chen; TONG, Pin. *Classical and computational solid mechanics*. Farrer Road, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001. 289 p.
6. GARCÍA REYES, Luis. *Diseño estructural aplicada al diseño sísmico*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 1998. 315 p.

7. Greene, Willian. *Econometric analysis*. Edinburgh: Pearson Education Limited, 2012. 1232 p.
8. HOWELL, John R.; BUCKIS, Richard. *Principios de termodinámica para ingenieros*. México: McGraw-Hill, 1990. 312 p.
9. IMAZ GUTIÉRREZ, Roberto. *Resistencia de Materiales*. Cantabria, España: Universidad de Cantabria, 2013. 589 p.
10. JENNINGS, Paul C. *Response of simple yielding structures to earthquake excitation*. Pasadena, California: Institute of Technology, 1963. 462 p.
11. MACHLIN, Eugene. *An introduction to aspectos of thermodynamics and kinetics relevant to material science*. 3a ed. Oxford, Reino Unido: Elsevier, 2007. 480 p.
12. MONTGOMERY, Douglas C.; PECK, Elizabeth; VINING, Geoffrey. *Introducción al análisis de regresión lineal*. México: Compañía Editorial Continental, 2006. 392 p.
13. NILSON, Arthur H. *Diseño de estructuras de concreto*. 12a ed. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill. 2001. 403 p.
14. PONCE, Victor Hugo. *Mecánica clásica*. Mendoza, Argentina: EDIUNC, 2010. 607 p.
15. SINGER, Ferdinand L.; PYTEL, Andrew. *Streght of materials*. 5a ed. Reino Unido: Oxford University Press, 2004. 220 p.

16. STOLEN, Svein; GRANDE, Tor. *Chemical Thermodynamics of material: macroscopic and microscopic aspects*. West Sussex, Inglaterra: John Wiley & Sons, Ltd., 2004. 384 p.
17. WACKERLY, Dennis D.; MENDENHALL III, William; SCHEAFFER, Richard L. *Estadística matemática con aplicaciones*. 7a ed. México: Prentice Hall, 2010. 502 p.
18. YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; FORD, A. Lewis. *Sears and Zemansky's university physics: with modern physics*. 3a ed. Boston: Addison-Wesley, 2012. 458 p.



## APÉNDICES

### Apéndice 1. Sistema de aplicación de carga para ensayo de poste de concreto presforzado



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 2. **Empotramiento para ensayo de poste de concreto presforzado**



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 3. **Deflexión producida por ensayo en poste de concreto presforzado**



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 4. **Sistema de ensayo para poste metálico**



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 5. **Empotramiento en poste metálico**



Fuente: elaboración propia.

Apéndice 6. **Deflexión producida por ensayo en poste metálico**



Fuente: elaboración propia.

